



上海交通大学学位论文

大动量有效理论框架下准分子 分布函数的微扰计算

姓名：杨 畅

学 号：119072910030

导 师：高俊，王伟

学 院：物理与天文学院

学科/专业名称：物理学

申请学位层次：硕士学位

2022 年 6 月

A Dissertation Submitted to
Shanghai Jiao Tong University for Master/Doctoral Degree

Perturbative calculation of quasi parton distribution
function in the framework of large momentum
effective theory

Author: Chang Yang
Supervisor: Jun Gao, Wei Wang

School of Physics and Astronomy
Shanghai Jiao Tong University
Shanghai, P.R.China
June 28th, 2022

摘 要

部分子分布函数 (PDF) 是反映核子内部结构最重要的物理量之一, 在标准模型精确检验和未来新物理的探测中都扮演着重要的角色。对于高能散射过程, 通过因子化的方法可以把散射振幅因子化成两部分, 即可以采用微扰论计算的短程硬散射部分以及长程的非微扰部分。而非微扰的长程部分则反应了强子的内部结构, 对于核子来说就是我们要讨论的 PDF。由于无法微扰计算, 传统上得到 PDF 的方法是给出 PDF 的参数化形式, 通过大量的实验数据不断的参数拟合来抽取, 最后得到想要的结果。

近年来, 大动量有效理论的提出成为了从 QCD 第一性原理出发计算核子内部部分子分布的新方法。其主要思想是: 构造等时关联的准 PDF, 由于不包含对时间的依赖, 准 PDF 是可以通过格点 QCD 模拟直接数值计算的, 在动量趋于无穷大的情况下, 准 PDF 通过一定的匹配可以回到我们想要的光锥分布 PDF。这样的话, 我们就可以先对准 PDF 进行格点计算而后再抽取出相应的光锥 PDF。这个抽取的过程对应为一个连接光锥分布与准分布的匹配系数, 那么关键就在于这个匹配系数的获得, 并且要求这个匹配系数是与红外结构无关的, 这也是本文章重点要讨论的。

本文的主要目标是要在大动量有效理论的框架下, 通过微扰计算得到单圈层次的匹配系数, 并证明匹配系数与红外结构无关。首先第一部分将简要介绍标准模型和量子色动力学随后对部分子分布函数的概念做出讨论, 回顾传统上对部分子分布函数的研究方法和不足而引出大动量有效理论的思想以及在部分子分布函数中的主要应用。接着, 第二部分从部分子态下光锥 PDF 和准 PDF 的定义式出发, 分别计算两种 PDF 的树图及单圈层次的结果。对于部分子态下的 PDF 来说红外结构是微扰可算的, 因此, 在这里将采用三种不同的正规红外发散的方法来计算。三种方法分别为: 外线不在壳; 维数正规化; 胶子质量不等于零。最后一部分给出主要结论, 通过匹配公式和微扰计算出的两种 PDF 的结果得到匹配系数, 匹配系数在不同红外正规化方案下是一样的, 表明匹配系数与红外结构是无关的。最后, 以其中一种单圈情况为例对准部分子分布函数作动量积分区域展开, 讨论两种 PDF 之间的深层关系, 从中可以看出, LaMET 方案将两种 PDF 的红外结构视作相同的合理性。

关键词：QCD，部分子分布函数，大动量有效理论，红外发散

ABSTRACT

Parton distribution function (PDF) is one of the most important physical quantities reflecting the internal structure of nucleon. It plays an important role in the accurate test of standard model and the probe for new physics beyond the standard model. In the high-energy scattering process, the scattering amplitude can be factorized into two parts by the factorization method: the short-range hard scattering part which can be calculated by perturbation theory and the long-range nonperturbative part. The non-perturbative long-range part reflects the internal structure of hadrons. The traditional way to get PDF is to adopt the parametric form of PDF, extract it through a large number of experimental data and continuous parameter fitting, and finally get the desired results.

In recent years, Large momentum effective theory (LaMET) has become a new method to calculate PDF based on the first principle of QCD. The main idea is to construct the quasi-PDF of equal-time correlation. Since it does not depend on time, the quasi-PDF can be calculated directly by lattice QCD simulation. When the momentum approaches infinity, the PDF of light cone distribution can be obtained through a perturbative matching. This process requires a matching kernel connecting the light cone distribution and quasi distribution, so a key is to obtain the matching kernel, and it is required that the matching kernel is independent of the infrared structure, which is also the focus of this article.

The main focus of this thesis is to obtain the matching kernel of one-loop level through perturbation calculation under the framework of LaMET, and prove that the matching kernel is independent of infrared structure. The first part will briefly introduce the standard model and quantum chromodynamics, then we will review the traditional research methods of PDF and the shortcomings of these methods which are overcome by large momentum effective theory, and its main applications in PDF. In the second part, starting from the definitions of light cone PDF and quasi-PDF in parton states,

we calculate two kind PDFs of tree-level and one-loop levels respectively. for the PDF in parton states, the infrared structure is perturbative. Therefore, three different methods of deal with infrared divergence will be used here: off-shell external legs; Dimensional Regularization; nonzero gluon mass. Finally, we will get the matching kernel through the matching formula, from which we can see that the matching kernel is independent of the infrared structure. Finally, integration by region to quasi-PDF and based on the results, the internal relationship between the two PDFs will be discussed.

Key words: QCD, Parton distribution function, LaMET, Infrared divergence

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 绪论	1
1.1 标准模型及量子色动力学简介	1
1.2 部分子分布函数与大动量有效理论	6
1.3 本章小结	13
第二章 光锥部分子分布函数	14
2.1 光锥坐标系及光锥部分子分布	14
2.2 微扰计算树图阶及单圈结果	15
2.2.1 光锥 PDF 的树图阶结果	16
2.2.2 外线离壳方案下单圈结果	17
2.2.3 胶子质量方案下单圈结果	24
2.3 本章小结	27
第三章 准部分子分布函数	28
3.1 准分布函数定义式及树图阶结果	29
3.2 不同红外方案下的单圈结果	30
3.2.1 维数正规化方案	31
3.2.2 外线离壳方案	37
3.2.3 胶子质量不为零方案	42
3.3 本章小结	46
第四章 微扰散射核	48
4.1 匹配系数	48
4.2 动量积分区域展开	51
4.3 本章小结	55
第五章 总结展望	56
参 考 文 献	58
附录	68

攻读学位期间学术论文和科研成果目录	69
致 谢	70

第一章 绪论

自人类发展出文明到如今，对自然界最基本规律探索的脚步就从未停下。对于还原论者来说，自然的一切皆可复原为构成万物的基本粒子及其之间的相互作用。那么，从基本的微观世界出发，结合最底层的逻辑及相互作用关系，来建立描述万物的终极统一理论是一代又一代粒子物理学家的终极追求。粒子物理学是一门探索物质基本组成及其相互作用的学科，它建立在标准模型 (Standard Model) 的理论基础上。标准模型是一个描述已知的基本粒子的性质并融合了已知相互作用中强、弱及电磁相互作用的理论，关于它的大部分理论预测都已经得到实验的证实，目前来说是一个十分可靠的理论。本章将首先对标准模型及其中的量子色动力学做简要介绍，第二部分将介绍部分子分布函数 (Parton Distribution Function PDF) 并引入大动量有效理论，最后讨论对部分子分部函数研究的意义。

1.1 标准模型及量子色动力学简介

经过一代代众多物理学家的长期探索与发展，粒子物理标准模型得以较为成功的建立。我们现在所知的最基本的四种相互作用力和最基本的几十种粒子被造物主作为起始代码输入，而衍生出这个丰富多彩纷繁复杂的世界。从古到今，人类刻在基因中的好奇心及社会文明发展的需要就不断地驱使着我们拨开层层迷雾，探索自然界表象之下那些最底层的指令。古希腊的哲学家认为所有的物质都是由空气、土壤、火、水而组成，而中国古人认为是金、木、水、火、土聚合成了世间的一切事物。虽然我们现在知道这两种古人提出的模型过于粗糙和简单化了，但他们的理论目标和标准模型是一脉相承的。标准模型的发展史记录了还原论者一直以来的探索过程。进入近代和现代，随着思想，文化，生产力的解放，粒子物理迎来巨大的发展时期。

1808年，道尔顿提出“原子论”，认为世间万物是由原子这一最基本的元素组成，且原子是不能再被分裂的。在原子论的基础上，门捷列夫发现了元素性质的规律，总结出著名的元素周期表呈递给世人。但原子论不是终点，1897年，J.J. 汤姆逊在阴极射线中发现了电子，这是一种比原子更基本的带负电的粒子。1912年，卢瑟福根据 α 粒子轰击金箔的大角度散射

现象提出了原子的“行星-太阳”模型，将原子内部解释为有集中了正电荷区域的原子核以及绕原子核运动的电子，这些理论与模型的发展使人们进一步看清了更小的世界。1932年，查德威克对中子的发现进一步揭开了原子核的面纱，同年在宇宙射线中安德森发现了正电子，第一次证实了狄拉克在1929年通过量子场论计算预言的反粒子的存在。

之后，随着高能加速器的建造和对宇宙射线的研究，大量新奇的似乎毫无关系的粒子登上了舞台。这些粒子的出现似乎使问题变得复杂了起来，人们逐渐开始相信是由更基本的粒子构成了这些看似毫无关系的粒子。在上世纪六十年代初期，盖尔曼和尼埃曼从对称性入手^[1, 2, 3]，发现了在SU(3)味对称性下强子的八重态，十重态规律。这些规律提示了强子内部的可能结构，在1964年，盖尔曼和茨威格彼此独立的建立了夸克模型，将当时已经发现的强子，包括质子和中子解释为是由三个更基本的粒子u, d, s夸克组成。夸克模型与1969年费曼提出的部分子模型结合为夸克-部分子模型，该模型可以较为清晰的描述强子的内部结构。1970年提出的GIM机制预言了第四种夸克也就是粲夸克(c)的存在^[4]，1974年丁肇中和里克特在实验上分别发现粲夸克的正反夸克束缚态 J/ψ 粒子^[5, 6]。1977年，由莱德曼领导的费米实验室发现了第五种正反夸克束缚态的介子—— Υ 粒子^[7]，这种夸克称为底夸克。最重的一个夸克，顶夸克也在1995年被发现^[8, 9]。除了构成强子的夸克，还有前面提到的电子，以及后续分别在1936年和1975年发现的 μ 子和 τ 子。这三种较轻的带负电的粒子又分别有对应于自身的电中性的中微子，它们被统称为轻子。轻子和夸克同为费米子，其自旋都是二分之一，满足费米-狄拉克统计构成物质的基本组分。

自然界最基本的组分之所以能构成万物，是离不开产生于它们之间最基本的相互作用的。对于仅发生在夸克与夸克色自由度下的相互作用称为强相互作用，它是由胶子承载的。弱相互作用是一种出现在基本粒子内部的力，主要参与粒子的衰变过程，它是由W及Z玻色子的交换所引起的。由于强弱相互作用的力程都非常短，与人类的可感知范围不在一个尺度以至于在日常中都直接忽略了它们。对于我们生活中最为常见的能直接感受的电磁力，它是由光子的交换带来的。至于引力，我们认为引力的承载粒子是引力子，只不过它还未被标准模型纳入其中。承载相互作用的粒子，它们自旋都是整数，是满足玻色-爱因斯坦统计的玻色子。对于电磁和弱相互作用，

由格拉肖、萨拉姆和温伯格三位物理学家将二者统一为 $SU(2) \times U(1)$ 的电弱统一理论，而电弱相互作用与强相互作用的统一即为 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的局域规范理论——标准模型，它描述了不同费米子对应不同玻色子的关联组合而产生的费米子之间的相互作用。2012年7月，位于欧洲的大型强子对撞机宣布发现了标准模型预言中的最后一个粒子——希格斯粒子，自此标准模型预言的所有粒子都在实验上得到了证实并获得了巨大的成功，我们将这些粒子展示在下图中。我们看到费米子分成了三代，代与代之间

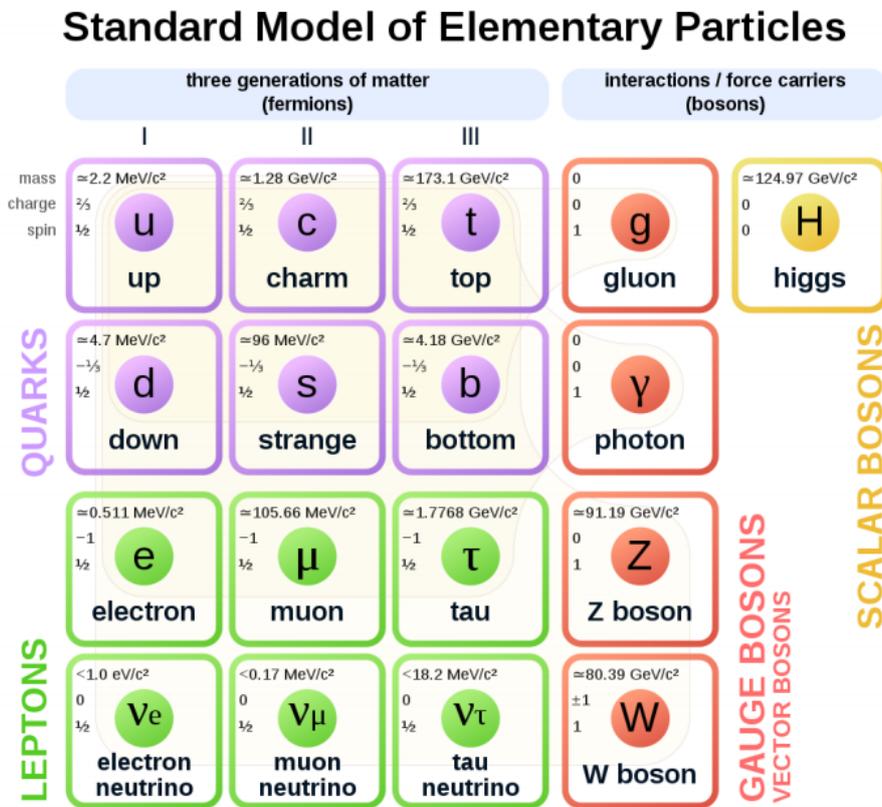


图 1-1 标准模型中的基本粒子

的差异仅体现在质量上的不同，代的数目越高表明质量越大。为什么存在三代？是否还要更高代的存在？这些问题还有待未来更深入的研究。已有的各种现象表明，标准模型还并不是一个完整的理论，依然面临着种种困难，对于中微子质量，暗物质暗能量等仍存在着很多尚未明了的问题。

在二十世纪初期，相对论及量子力学的提出和发展给经典物理带来了

巨大的冲击,同时也为粒子物理的发展带来了必要的工具——量子场论。量子场论认为,相较于粒子,场是更基本的实体存在,不同的粒子不过是对应于不同场的激发,当所有的场都处于能量最低的基态时对应物理上的真空,所以真空并不是真的空无一物。因为场并不是不可入的,所以不同粒子的场可以相互交织重叠而弥散在全空间。不同场的不同激发状态体现为出现不同粒子的不同运动状态,我们之前提到的基本相互作用其实是存在于场与场之间的相互作用,既然粒子其实就是场激发状态的体现,那么粒子间的相互作用实际上也就是场与场之间的相互作用。例如,两个电子之间交换光子的相互作用图像可以理解为,一个表现为电子的电子场的激发态,激发了光子场后表现为一个光子而作用到另一个电子场的激发态上。不同场通过不同的方程来描写,自旋为零的标量粒子对应的标量场方程为克莱因—高登方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi(x) = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \quad (1.1)$$

自旋为二分之一的费米子对应的旋量场方程为狄拉克方程:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (1.2)$$

传递相互作用的矢量粒子,描述它们的矢量场是我们较为熟悉的麦克斯韦方程。在量子场论的框架下,研究电磁相互作用的理论发展为量子电动力学(QED),描述产生于夸克胶子之间强相互作用的理论则为量子色动力学(QCD),它们同为局域规范理论下的量子场论,量子电动力学对应于U(1)的规范不变性,而与量子色动力学相关的对称性则是SU(3)下的局域规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[ig_s \alpha^a(x) T^a] \psi(x) \quad (1.3)$$

其中 $\alpha^a(x)$ 是关于时空坐标的函数, T^a 是SU(3)群的八个生成元,a是为了解决自旋和统计对称性上的矛盾而引入一种新的自由度——色自由度,它对应“红”,“绿”,“蓝”三种SU(3)色空间下的量子态,承载强相互作用的胶子对应SU(3)群的八个生成元,对应的相互作用荷为色荷,只有携带

非零色荷的粒子才会发生强相互作用。由于色空间中 $SU(3)$ 群的生成元不对易，所以量子色动力学是一个非阿贝尔的规范理论，表现为胶子自身也是携带色荷的，那么胶子就可以发生自相互作用而使得量子色动力学变得较为复杂且拥有一些独特的性质。

夸克和胶子作为量子色动力学的基本自由度，它们之间的相互作用决定了强相互作用的独特性质，例如色禁闭或者说夸克禁闭。虽然大量的实验和理论向我们表明夸克是一定存在的，但自由的夸克从未被直接探测到，实验上也从未探测到带色的强子态，也就是说强子都是不带色量子数的。这表明，带有色荷的对象总是被禁闭在一个色单态，不可能有任何实体作为一个携带有色荷的粒子自由传播。色禁闭的原因被认为是由于胶子间的自相互作用带来的，当夸克间的距离被拉开时，夸克间的相互作用会随着距离增大而增大，使得夸克被禁闭在强子内部，因此找不到孤立的夸克或胶子。1973年，维尔切克，波利策和格娄斯发现了强相互作用存在渐近自由的特殊性质^[10, 11]，意思是当夸克之间的距离很小，或者说当动量转移很大，相互作用能量很大时，夸克与夸克之间的相互作用会变的很小从而可以将其近似地看成自由粒子。强相互作用耦合常数本身是依赖于重整化能标 μ 而跑动的，记作 $\alpha_s(\mu)$ 。我们取 μ 值为某一特定过程下的动量转移 Q ，此时的 $\alpha_s(\mu)$ 就是在此特定过程下的有效耦合常数， $\alpha_s(\mu)$ 随能标的跑动方程为：

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \alpha_s = \beta(\alpha_s) = -\frac{\beta_0}{4\pi} \alpha_s^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2} \alpha_s^3 - \dots \quad (1.4)$$

QCD 的渐近自由正是来自上式等号右侧每一项前的负号，由图 1-2^[12] 可见，随着转移动量 Q 的增大耦合常数逐步减弱。根据曲线趋势，在转移动量趋于无穷大时耦合常数也变成一个很小的值，那么在这个高能的区域我们可以采用微扰理论来计算物理过程，当 Q 逐渐减小时，耦合常数迅速增大也导致微扰论迅速失效。渐近自由这一性质直接将 QCD 相关问题拆分成高能区的微扰 QCD 部分和低能区的非微扰部分。在实际问题中，我们会遇到的两个能区同时包含的情况，对于这种情况最直接的想法就是将两个能区分开并用不同的方法加以研究，在下一节将要讨论的部分子分布函数正是这种思路的具体体现。

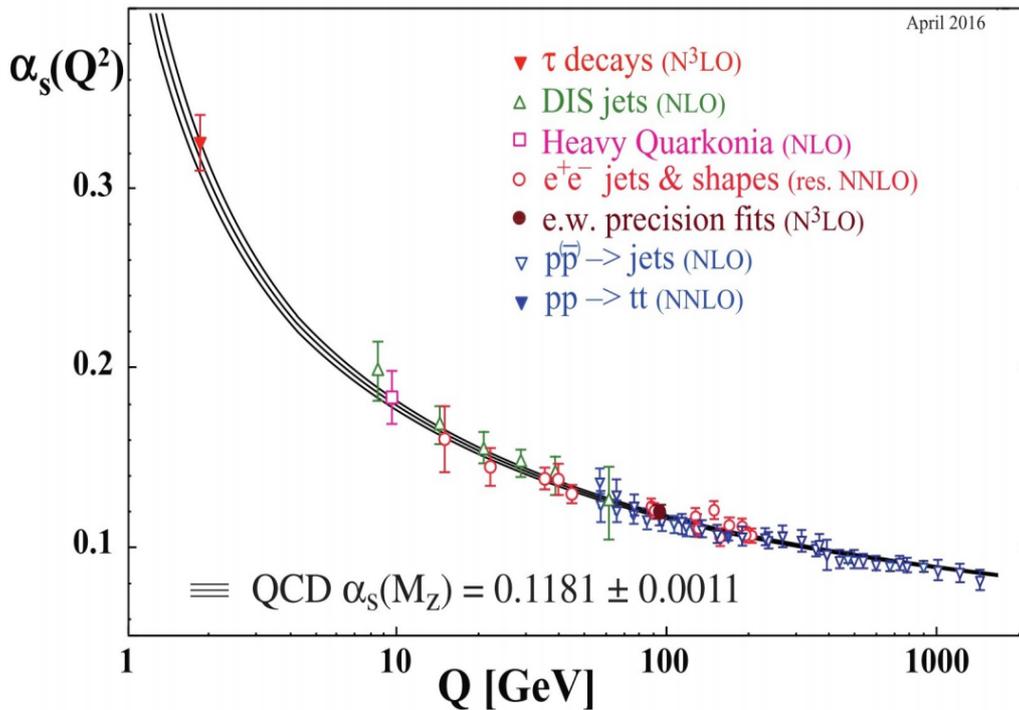


图 1-2 QCD 耦合常数跑动行为

1.2 部分子分布函数与大动量有效理论

在上一节中，我们提到的夸克模型其实是对当时大量涌现的强子的一种分类方法，夸克仅作为一个神奇的数学符号存在于那段时期而并没有被视作一个实体的物理对象。对于核子内部图景的研究，最直接的想法就是深入其中探索一番，比较具有代表性的实验是深度非弹性散射 (DIS)^[13, 14]，如图 1-3，主要做法是将高能电子打入核子内部，根据末态粒子的动力学性质来推断核子内部的情况。在 DIS 实验中我们发现微分散射截面中的结构函数，在较高转移动量 Q 下表现出与 Q 较弱的相关性，这种现象称为比约肯标度无关性^[15]，说明与高能电子发生相互作用的是核子内部的点状粒子。为解释此现象，部分子模型在 1969 年由费曼提出^[16]，表明一些自由运动的点粒子构成高速运动情况下核子的内部图景。而对于实验的另一个重要发现 Callan-Gross 关系^[17] 表明：电子核子深度非弹的背后，实际上是电子与构成核子内部半整数自旋的点状粒子的弹性散射，这两点都指向一个

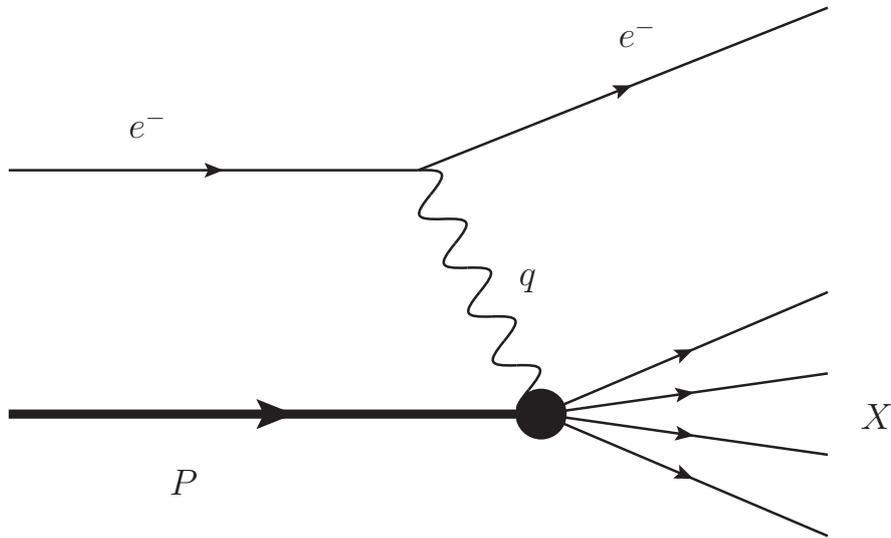


图 1-3 电子-质子深度非弹性散射

结论，夸克就是构成核子的部分子。将两种模型结合得到夸克-部分子模型，在夸克模型中核子是由三个夸克组成而部分子模型并没有限定部分子的个数。如今我们知道，夸克模型给出的是标志核子特性的价夸克，除此之外，在能量较高时由于量子涨落还存在着不断产生湮灭的海夸克对和胶子，它们都是组成核子的部分子。

由于 QCD 存在色禁闭和渐近自由的性质，部分子被禁闭在强子内部无法分离出来，当面临与强子相关的具体问题时我们必须回答夸克胶子作为部分子在强子内部是如何分布的，对于这个问题我们可以引入部分子分布函数 (PDF)，它被定义为：部分子动量占核子动量分数 x 的概率分布函数 $f(x)$ 。在大动量迁移的物理过程中，得益于 QCD 的因子化理论我们可以将对应的矩阵元分解为短程上可微扰计算的硬散射核及长程非微扰的分布振幅或部分子分布函数^[18, 19]，分布振幅对应于遍举过程部分子分布函数对应于单举过程，在这里我们主要讨论部分子分布函数。硬散射部分为夸克胶子等部分子直接参与的相互作用可由微扰论直接精确计算，无法微扰计算的 PDF 则反应了强子内部动力学结构的分布情况，具有普适性，两者卷积给出强相互作用具体结果的理论预言。由此可见，部分子分布函数作为强相互作用理论计算中必要的输入参量，它的重要性不言而喻。

目前对于部分子分布函数最为成熟和广泛的确定方法是全局拟合数值

分析, 这种方法的主要思想是假设一种连续可导的多项式参数化形式, 依据深度非弹性散射实验, 半单举深度非弹性散射实验 (SIDIS)、核子对撞和重夸克对产生等实验的大量数据对未知参数进行拟合。深度非弹性散射过程中反映核子结构特征的独立动力学参量有两个: x 和 Q^2 。其中 x 定义为“比约肯变量”, 就是受打击的部分子的动量所占整个核子的动量分数。变量 Q^2 定义为转移虚光子的四动量平方的负值, 表征散射的强度以此划分不同的散射类型。部分子分布函数关于 Q^2 的依赖由 DGLAP 方程描述^[20, 21, 22]。DGLAP 方程的提出源于实验上测量到深度非弹性散射过程的标度律破坏现象, 标度律的破坏表明随着标度的变化部分子的数量及核子内部的动量分布也会随之变化。以得到质子部分子分布函数为例, 全局拟合一般可概括为三步: 第一步为非微扰的参数化输入, 即选取一个初始标度 Q_0^2 , 并在此标度下确定一个合适的参数化函数形式来描写部分子分布。第二步, 结合第一步 Q_0^2 下的部分子分布函数参数化形式和 DGLAP 方程将其演化到较高 Q^2 下, 并计算得出与之相相关的可观测量物理量的理论值。第三步, 将实验测量的观测量值与第二步计算的理论值进行比较, 得到理论预测值与实际测量值之间的偏差, 用 χ^2 来表示^[23], 寻找最佳的初始部分子分布使得 χ^2 最小。拟合结果达到最佳后便确定了最初参数化下部分子分布函数的具体形式, 那么在往后任何更高标度 Q^2 下的部分子分布函数都可以通过 DGLAP 方程的演化计算而得出。经过多年的发展和努力, 质子部分子分布函数在全局分析的方案下取得了较大进展和突破, 见图 1-4^[24]。虽然在完善质子部分子分布的数据库上目前已经获得了不少的成果, 但是在动量分数 x 很小和很大区域的分布仍然没有足够多的实验数据去限制^[25, 26]。另外, 不同的合作组预言的分布之间也存在着一定的差异^[27, 28, 29]。差异的来源多种多样, 例如: 在输入拟合数据集选择上的不同、有关可观测量的理论计算、部分子分布函数参数化方法的选择、部分子分布函数不确定度的估计和传递以及相关的外部参数的处理等方面。

数值全局拟合的方法获得 PDF 取得了巨大的成功, 但人们同样也努力想要从第一性原理出发计算得到 PDF, 而格点 QCD 就是一个强有力的非微扰工具。格点的思想在于将时空离散化模拟真实的物理过程^[30], 为了保证对泛函积分有更好的收敛性其格点上主要模拟的是欧氏时空。然而, 这样对于定义在闵氏时空中光锥关联的部分子分布函数却是不友好的, 在

后面的讨论中我们将会看到部分子分布函数是一个非定域的算符，若直接对时间维度作维克转动将使其变为虚时，而光锥关联的时空间隔为零，那么 $x^\mu x_\mu = 0$ 导致我们无法区分局域算符和非局域算符，所以格点无法直接计算非定域的光锥关联 PDF。通常格点对 PDF 的确定主要是集中在对其“矩”的计算上，PDF 作为非定域的算符矩阵元它的矩相当于将其展开到定域的算符矩阵元，不再含有光锥间隔。理论上，如果所有的矩都知道了，就可以往回重建出对应的 PDF。然而，对于高阶矩的计算过于复杂且需要消耗大量的计算资源，事实上格点 QCD 能计算的矩数目有限^[31, 32, 33]，不足以精确重建出 PDF。在这个问题上，基于近些年发展起来的大动量有效理论 (LaMET, large momentum effective theory)，人们可以依据在较大动量下运动核子的性质来提取出部分子的物理信息，如此一来从 QCD 第一性原理入手直接计算部分子分布函数成为了一项切实可行的工作。

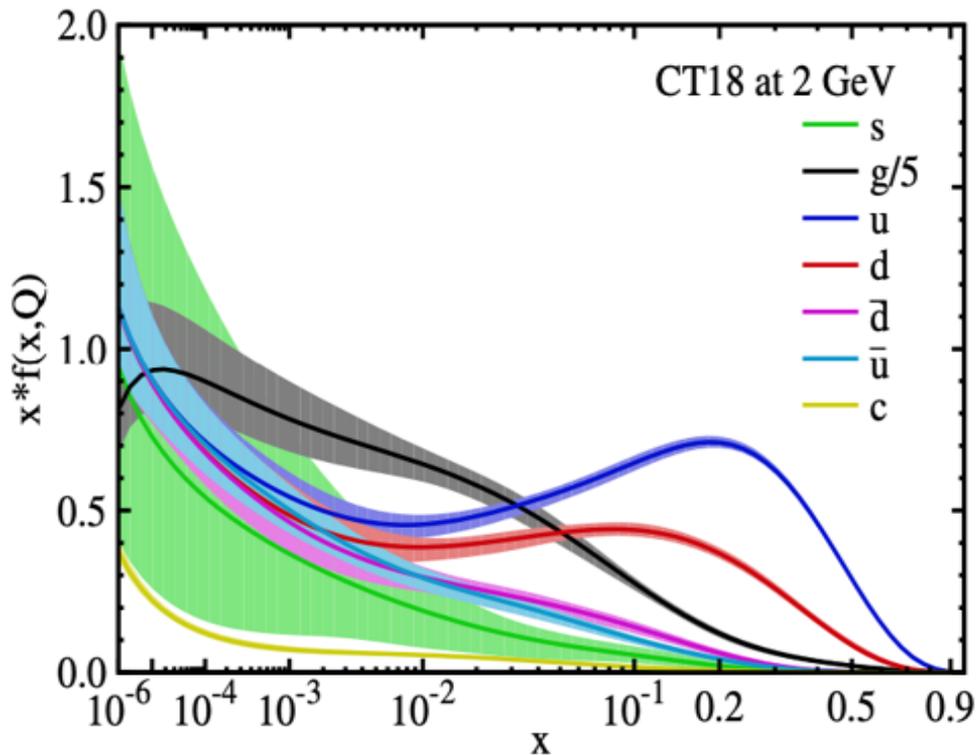


图 1-4 CT18 全局拟合 PDF 结果
Phys.Rev.D 103(2021) 1,014013

2013 年, 论文 [34] 首次提出, 可以通过对大动量极限下等时关联的准部分子分布算符矩阵元的研究而得到光锥关联的部分子分布函数, 等时关联的物理量因为不含对时间的依赖所以可以在格点上直接计算^[35, 36, 37, 38, 39], 这套方法论称为大动量有效理论。该理论通过将部分子退化为高速运动质子态中的静态关联函数, 为计算时间依赖的 PDF 提供了系统的解决方案。大动量有效理论可以绕开对矩的计算, 通过格点计算直接得到最终光锥 PDF 结果的原因是: 依据狭义相对论效应, 大动量运动情况下的结果会存在一个大动量方向上的洛伦兹 boost, 洛伦兹对称性使得以光锥算符表示的标准部分子态可以被一个等价的具有大动量态的算符替代, 且这个算符是时间无关的, 普适的, 称为准的部分子分布函数。基于此理论的大致工作路线可概括为: 首先构造一个合适的静态算符矩阵元 (准观测量), 在外部的强子趋于大动量极限下可近似趋近于部分子可观测量。用这种方式构造的准观测量通常只依赖于强子的动量, 但不依赖于时间, 就不存在我们之前讨论的众多问题并可以很容易的在格点上计算出来。其次, 计算格点上的准观测量, 并采用合适的方案对其进行非微扰重整化。最后, 微扰计算出光锥分布函数与准分布函数的匹配系数, 通过因子化公式, 将重整化后的准观测量与部分子可观测量进行匹配。如图 1-5, 光锥关联的 PDF 坐落

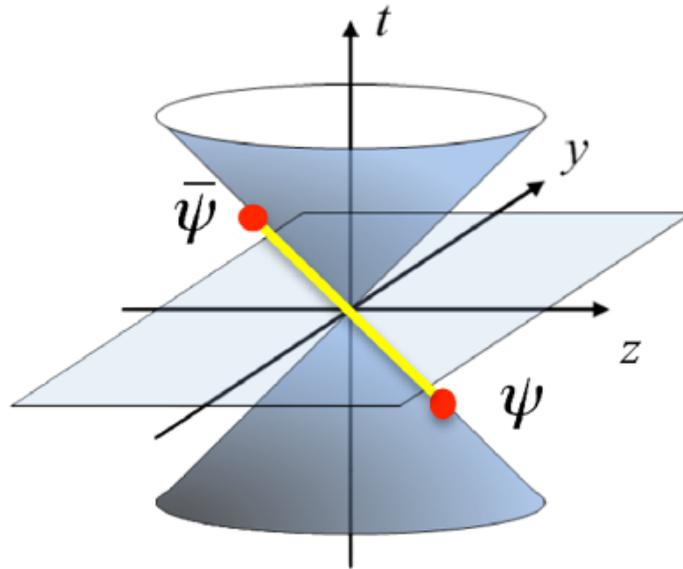


图 1-5 光锥部分子分布函数

于四维闵氏时空的光锥上，从图中我们看到它是包含时间依赖的非定域算符，不能直接在格点上算出，记作 $f(x)$ 。依据上述讨论，准分布函数被定义为等时关联的部分子分布函数，仅包含对欧氏时空的空间分量的依赖，如图 1-6 所示，可以直接通过格点 QCD 的方法进行计算，记作 $\tilde{f}(x)$ 。格点计

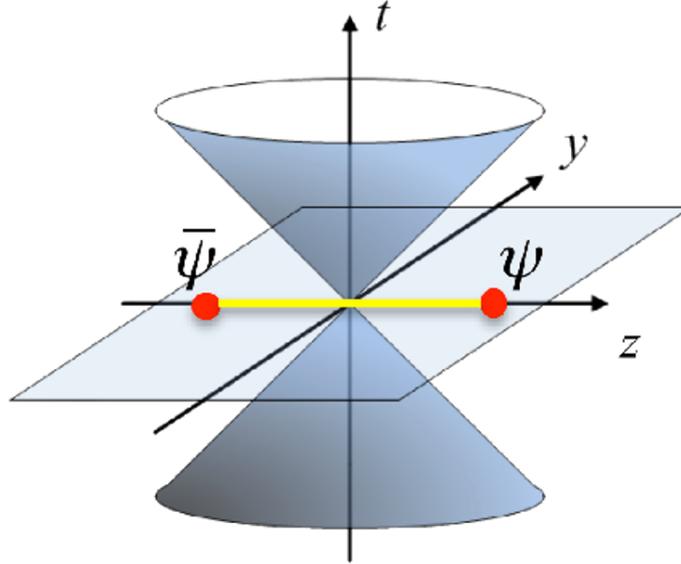


图 1-6 准部分子分布函数

算得到准分布函数后，当动量趋于无穷时准分布函数通过洛伦兹 boost 会无限逼近回到光锥形式，如图 1-7 所示。假设二者包含相同的红外结构通过因子化理论可将其写成如下的匹配公式^[40, 41]。

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x, \mu^2, p_z \rightarrow \infty) = \int_0^1 C\left(\frac{x}{y}, \frac{\mu}{p_z}\right) f_{q/q_0}(y, \mu^2) \frac{dy}{y} + O\left(\frac{M^2}{p_z^2}, \frac{\Lambda^2}{p_z^2}\right) \quad (1.5)$$

其中 μ 为重整化能标， p_z 为大动量方向上的动量大小， C 为匹配系数， M 为强子质量， Λ 表示 QCD 特征能标。我们注意到，准 PDF 在类空区域时空间隔小于零，光锥 PDF 是类光的时空间隔等于零，而洛伦兹 boost 是保证时空间隔不变的变换，是不可能通过洛伦兹 boost 使二者直接相等的，但是我们可以看到，在大动量分量远大于强子质量和 QCD 特征能标时两者的差异以高阶无穷小的形式略去。在此情况下，准 PDF 可以在格点上算出，通过匹配系数及匹配公式可以得到光锥 PDF，那么匹配系数就成为此

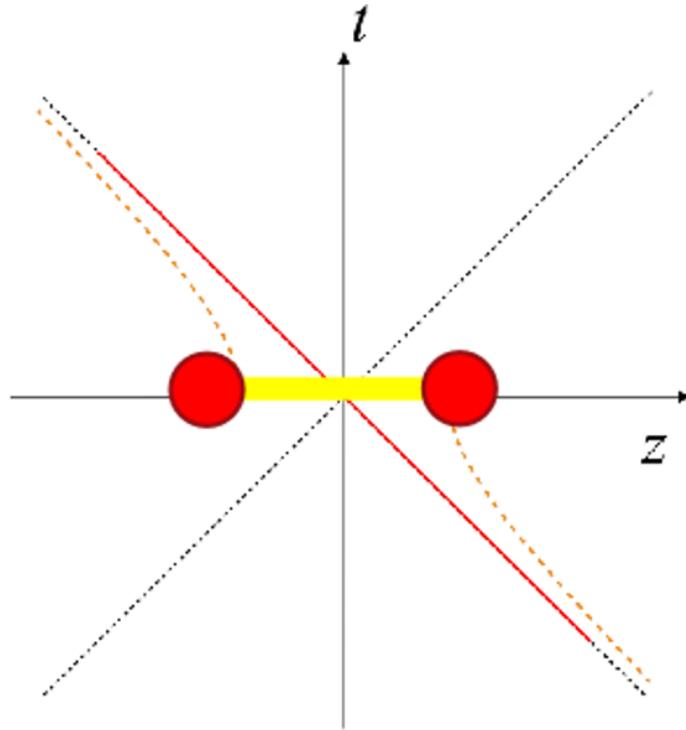


图 1-7 准分布到光锥分布

方法下一个至关重要的量。关于这个匹配系数是怎么得到呢？答案是通过微扰计算。当然，我们前面表明，PDF 是一个非微扰的物理量我们无法进行微扰计算，但是这种情况是针对于强子态下考虑的。对于广义的部分子态下的 PDF 没有像强子态 PDF 中那样的非微扰结构，是可以对其进行微扰计算的。广义的部分子分布函数不拘泥一定要在强子外态中考虑部分子而是包含了在部分子态中去研究部分子，例如我们在接下来的计算中会采用的在夸克态中计算夸克部分子分布的情况。我们的目标是找到匹配系数，对部分子态下的 PDF 作微扰计算得出光锥的分布及准的分布之后，通过匹配公式就可以得到在部分子态下二者之间的匹配系数。事实上，部分子态下的匹配系数和强子态下的匹配系数是一致的^[42, 43]。

能够依据匹配公式从准 PDF 匹配到光锥 PDF 的条件是光锥 PDF 和准 PDF 满足相同的红外结构且匹配系数与红外部分无关。这样的话就可以把强子态下包含非微扰红外部分的准 PDF 在格点计算上得出，通过与红外无关的匹配系数，匹配得到光锥的结果。接下来的两章，就是从常用的三

种正规红外发散的方法出发，分别计算部分子态下光锥部分子分布和准部分子分布的单圈结果，并依据匹配公式分别得到匹配系数。我们将会看到匹配系数中的红外正规子被一一消去，表明匹配系数确实与红外部分无关。

1.3 本章小结

本章一一回顾了标准模型中的基本粒子及相互作用力，从标准模型承接描写强相互作用的量子色动力学及其色禁闭与渐近自由的特殊性质，在第二节从 DIS 实验出发引入了夸克-部分子模型，介绍了部分子分布函数的定义和传统方法上对部分子分布函数的研究及缺陷，进一步引出了大动量有效理论及其思想和应用。大动量有效理论为 PDF 的研究提供了一种新思路，使得从第一性原理出发理论计算得出 PDF 成为了一项切实可行的工作。

第二章 光锥部分子分布函数

2.1 光锥坐标系及光锥部分子分布

在上一章中我们已经详细介绍了部分子的概念以及部分子分布函数的引入和意义，接下来将直接进入对其定量计算的细节展示。在实际的实验测量中及部分子模型下，核子通常都是以无限大动量运动的，无限大动量意味着在四维时空下贴近到光锥上。为了所研究问题的便利，可以将坐标系选取在光锥上而建立光锥坐标系^[44]。在光锥坐标系下得到部分子分布函数称为：光锥部分子分布函数 (light-cone PDF)。在光锥坐标系的建立中，首先要选定两个类光的单位矢量，分别写作：

$$n_{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \quad n_{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \quad (2.1)$$

这两个类光的光锥单位矢量的关系满足：

$$n_+ \cdot n_- = 1, \quad n_{\pm}^2 = 0 \quad (2.2)$$

在光锥坐标系下，任意一个四维矢量 a_{μ} 都可以分解为沿光锥的光锥分量 a^+ 和 a^- 与垂直方向上的垂直分量 a_{\perp}

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= n_- \cdot a n_{+\mu} + n_+ \cdot a n_{-\mu} + a_{\perp\mu} \\ &= a^- n_{+\mu} + a^+ n_{-\mu} + a_{\perp\mu} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中，光锥分量的表达式为：

$$a^+ = \frac{a^0 + a^3}{\sqrt{2}}, \quad a^- = \frac{a^0 - a^3}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

当采用光锥分量时，四维积分和 d 维积分应分别拆解为：

$$d^4k = dk^+ dk^- d^2k_{\perp}, \quad \mu^{4-d} d^d k = \mu^{4-d} dk^+ dk^- d^{d-2}k_{\perp} \quad (2.5)$$

其中，对于引入 μ^{4-d} 的目的是为了平衡在 d 维情况下积分测度的量纲。

在高能情况下，强子的动量方向几乎处于光锥上，因此它们的质量几乎可以忽略。可以选取动量 P 的方向为 n_- 方向，那么 P 所取的光锥分量即为 P^+ 。对于坐标选取的方向为沿着 n_+ 方向，同样，对于坐标的光锥分量为 ξ^- 。由上，可以给出在算符层次上，夸克的部分子分布函数定义式^[45]：

$$f_{q/H}(x) = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle P(p) | (\bar{q}W_c)(\xi) \frac{\not{n}_+}{2} (W_c^\dagger q)(0) | P(p) \rangle \quad (2.6)$$

公式中 x 表示部分子动量占强子动量的动量分数。从以上的夸克部分子分布表达式中可以看出这是一个非局域算符矩阵元，为保证规范不变性而引入作为规范链接^[46] 的 Wilson 线 W_c

$$W_c(\xi) = \bar{P} \exp(-ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^a(\xi + sn_+) T^a) \quad (2.7)$$

Wilson 线中的 P 为类比编时算符的编路径算符， T^a 为色矩阵。因为量子场论认为场是最基本的所以对时间的依赖都是包含在场算符中，场随着时间的演化而演化，所以量子场论中的表达式一般都是定义在海森堡绘景下的。但在微扰计算中，要将随时间演化的相互作用项显露出来才能按耦合常数逐阶展开，那么需要做的就是将海森堡绘景下的表达变换到相互作用绘景下而自然的分离出相互作用项，接着把相互作用项按耦合常数做微扰展开：

$$\hat{O}_H = \hat{O}_I \exp[ig_s \int d^4x \bar{q} A^a T^a q] = \hat{O}_I [1 + ig_s \int d^4x \bar{q} A^a T^a q + o(g_s)] \quad (2.8)$$

以上引出了光锥坐标系，光锥单位矢量，以及在此坐标系下的部分子分布函数的定义式。介绍完这些必要的基本概念接下来将会进行具体的计算，给出微扰计算下光锥部分子分布函数树图阶的结果及在三种不同的正规红外发散方法下的单圈结果。

2.2 微扰计算树图阶及单圈结果

因为在强子态中的部分子分布函数包含着非微扰的红外结构，所以人们是无法通过微扰计算的方法直接得到在强子外态下的矩阵元结果的。然

而，我们最终的目的是为了得到光准分布函数和准分布函数之间的匹配系数。若只是为了得到匹配系数的话，实际上可以绕过对强子外态下矩阵元的计算，而是对可微扰的夸克外态下矩阵元的计算。因为夸克态的红外结构是可微扰的，所以可分别采用外线离壳，维数正规化及胶子质量不等于零的三种不同方法来正规红外发散。这样，在夸克态下计算出光准分布和准分布，通过二者的匹配公式就可得到匹配系数。已有理论与实践表明，取部分子外态微扰计算得到的匹配系数同样适用于强子外态，那么，接下来的计算过程都是将强子外态改为夸克态下进行演示的，用 $f_{q/q_0}(x)$ 来表示夸克态下的夸克部分子分布函数，意思是在夸克中找到动量分数为 x 的夸克部分子的几率分布，是广义的部分子分布函数。

2.2.1 光锥 PDF 的树图阶结果

从光锥部分子分布函数定义式出发进行微扰计算时，需要分别对 Wilson 线和相互作用项中的耦合常数作微扰展开，组合成关于耦合常数 g_s 平方的多项式。对于树图阶，Wilson 线和相互作用项都展开到 g_s 的最低阶，即这两项都取“1”得到的树图阶费曼图如下。

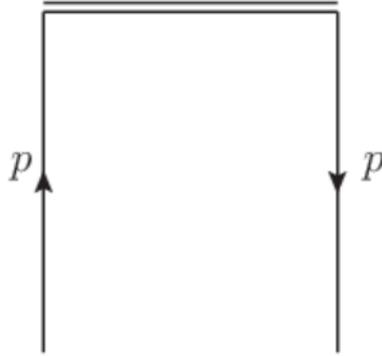


图 2-8 树图阶光锥 PDF

树图阶计算结果如下：

$$f_{q/q_0}(x) = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\not{p}_+}{2} q(0) | q(p) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - xp^+)\xi^-} \frac{\text{tr}[p\not{\xi}^+]}{2} \\
&= \delta(x-1)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

在这里及后续的计算中都考虑了夸克的极化并对其取了平均。

2.2.2 外线离壳方案下单圈结果

对于单圈，是将 Wilson 线和相互作用项按耦合常数 g_s 分别展开，组合到 g_s^2 平方阶。根据场之间不同的收缩方式完成计算，后验的发现有五张对最终结果有贡献的费曼图。光锥部分子分布单圈情况下包含紫外和红外两种发散，对于紫外发散我们采取的正规化方案是维数正规化^[47, 48, 49, 50]，并将此种方案下出现的紫外结构 $\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma$ 简记作 $\frac{1}{\epsilon}$ 。对与红外发散，在此节我们采取的正规化方案为外线不在壳，即外线四动量平方不为零，在计算种保留 $p^2 \neq 0$ 且 $p^- = \frac{p^2}{2p^+}$ 。单圈的光锥部分子分布函数费曼图如下：

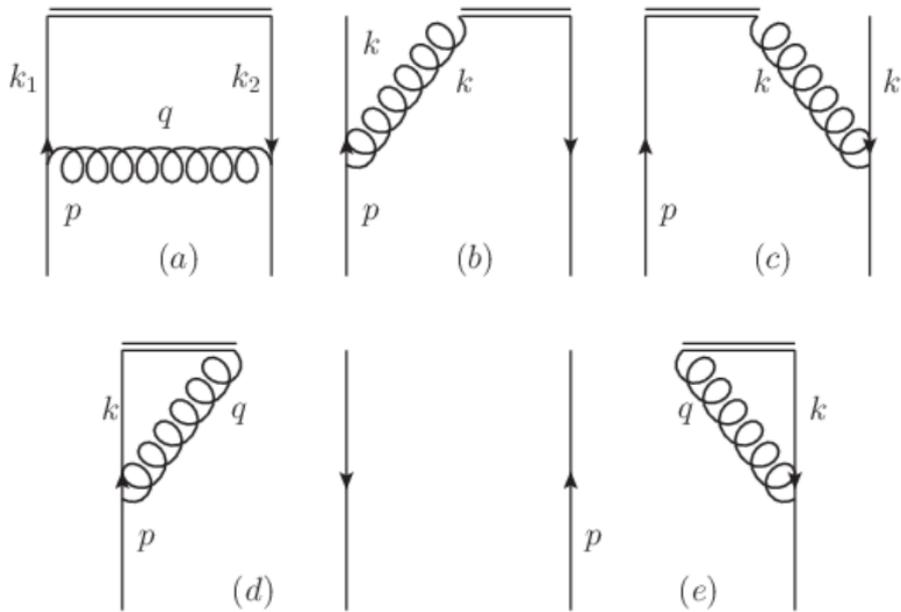


图 2-9 单圈光锥 PDF

接下来开始演示各图的计算细节，首先是图 a 将相互作用项展开到两阶：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta_2 \bar{q}(\eta_2) A^a(\eta_2) T^a q(\eta_2)] \bar{q}(\xi^-) \frac{\not{n}_+}{2} q(0) \\
&\quad \times [ig_s \int d^4\eta_1 \bar{q}(\eta_1) A^b(\eta_1) T^b q(\eta_1)] | q(p) \rangle \\
&= \frac{-g_s^2 C_F}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \int d^4\eta_1 \int d^4\eta_2 \bar{u}(p) e^{ip\eta_2} \gamma^\mu \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{ik_2}{k_2^2} e^{-i(\eta_2-\xi^-)k_2} \\
&\quad \frac{\not{n}_+}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{ik_1}{k_1^2} e^{-i(0-\eta_1)k_1} \gamma^\nu \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} e^{-i(\eta_2-\eta_1)q} u(p) e^{-ip\eta_1} \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+-q^+-xp^+)\xi^-} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2(p-q)^2(p-q)^2 q^2} \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2[(p-q)^2]^2 q^2} \delta(p^+ - xp^+ - q^+)
\end{aligned}$$

相互作用项展开到二阶产生的系数 $\frac{1}{2}$ 与对称因子 2 抵消，对于夸克场，需要考虑对旋量指标求和并取平均。通过场与场之间收缩为传播子并进行积分运算，会得出一系列德尔塔函数使表达式得到一定程度的化简，从费曼图可以看出，这是相互作用顶点上动量守恒的必然结果。在这里及以后的计算中均采用了费曼规范，化简后仅留下对胶子传播子的四动量积分，此积分会带来发散，因为这里采取了维数正规化方案在 D 维时空下来正规紫外发散，所以对于分子上 γ 结构的缩并与在四维情况下会略有不同。按照惯例取 $D = 4 - 2\epsilon$ ，此时 γ 结构为： $\gamma^\mu (\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q}) \gamma_\mu = (2-D)(\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q})$ ^[51]，承接上式可以得到：

$$f_{q/q_0}(x) = ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} (D-2) \frac{1}{2} \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q})]}{2[(p-q)^2]^2 q^2} \delta(p^+ - xp^+ - q^+)$$

为了平衡在 D 维下积分测度的量纲而引入 $\mu^{2\epsilon}$ ，对于分子 trace 结构化简如下^[52]：

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q})] &= 4[p(p-q)(p^+ - q^+) - p^+(p-q)(p-q) \\
&\quad + p(p-q)(p^+ - q^+)] \\
&= 4[p^2 p^+ + q_\perp^2 p^+ + 2p^-(q^+)^2 - 2p^2 q^+]
\end{aligned}$$

代入上式得：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \frac{ig_s^2 C_F}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{[\mu^{2\varepsilon}(D-2)]4[p^2 p^+ + q_\perp^2 p^+ + 2p^-(q^+)^2 - 2p^2 q^+]}{2[p^2 + 2q^-(q^+ - p^+) - q_\perp^2 - 2p^- q^+ + i\varepsilon]^2} \\
&\quad \times \frac{\delta(p^+ - xp^+ - q^+)}{[2q^+ q^- - q_\perp^2 + i\varepsilon]} \\
&= ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \frac{(D-2)}{(2\pi)^2} \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{(D-2)}} dq^- \frac{\frac{q_\perp^2 + p^2 x^2}{[q^- - \frac{p^2 x - q_\perp^2 + i\varepsilon}{2xp^+}]^2 [q^- - \frac{q_\perp^2 - i\varepsilon}{2(1-x)p^+}]}{8x^2(1-x)(p^+)^2}
\end{aligned}$$

最后一步依据 $p^2 \neq 0$ 推出 $p^- = \frac{p^2}{2p^+}$ 代入化简后得到上式。我们可以看到，上式关于 q^- 有两个一阶极点分布在实轴两侧，接下来我们取下半平面作关于 q^- 的围道积分，根据留数定理此时需要取下侧极点，而下侧极点的留数即关于 q^- 的主值积分

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \frac{(D-2)}{(2\pi)^2} \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{(D-2)}} (-2\pi i) \frac{q_\perp^2 + p^2 x^2}{8x^2(1-x)(p^+)^2 \left[\frac{p^2(x-1)x + q_\perp^2}{2x(1-x)p^+} \right]^2} \\
&= g_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \frac{(D-2)}{4\pi} (1-x) \left[\frac{p^2 x^2}{(4\pi)^{\frac{D-2}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D-2}{2}\right) (x(x-1)p^2)^{\left(\frac{D-2}{2}-2\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-2}{2}}} \frac{D-2}{2} \Gamma\left(1 - \frac{D-2}{2}\right) (x(x-1)p^2)^{\left(\frac{D-2}{2}-1\right)} \right] \\
&= \frac{g_s^2 C_F (1-x)}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln\left[\frac{p^2 x(x-1)}{\mu^2}\right] + \frac{2-x}{x-1} \right] \tag{2.10}
\end{aligned}$$

圈动量各分量积分完成后，将 ε 视作无穷小量并作展开且忽略高阶小项，得到最终的结果。 $\hat{\varepsilon}$ 作为紫外正规子趋于零时带来紫外发散， p^2 为红外正规子。依据同样的思路，可以依次得到剩下四种情况的结果。

对于图 b 则是展开初态相互作用项和末态 Wilson 线得到：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+ \xi^-} \langle q(p) | \bar{q}(\xi^-) [-ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^a(\xi + sn_+) T^a] \frac{\not{n}_+}{2} \\
&\quad \times q(0) [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \int_0^\infty ds \int d^4\eta \bar{u}(p) e^{ip^+\xi^-} n_{+\mu} \frac{\not{n}_+}{2} \\
&\quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\not{k}}{k^2} e^{-ik(0-\eta)} \gamma_\nu \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} e^{-i(\xi+sn_+-\eta)q} u(p) e^{-ip\eta} \\
&= g_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+-xp^+-q^+)\xi^-} \int_0^\infty ds e^{-isn_+q} \int d^4\eta e^{i(k+q-p)\eta} \\
&\quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \bar{u}(p) \frac{\not{n}_+}{2} \frac{\not{k}}{k^2} \not{n}_+ u(p)
\end{aligned}$$

其中对 ds 的积分中, 为了保证结果收敛, 需要在被积函数 e 指数上加上一个小量 $-i\epsilon$ 且 ϵ 是比 s 在趋于无穷大时更高阶的无穷小。此时表达化为 $\int_0^\infty ds e^{-is(n_+q-i\epsilon)}$, 得到的结果为 $\frac{i}{q^+}$

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= -ig_s^2 C_F \delta(xp^+ - p^+ + q^+) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_+ (\not{p}-\not{q}) \not{n}_+ u(p)}{2(p-q)^2 q^2} \\
&= -ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \delta(xp^+ - p^+ + q^+) \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{4p^+}{q^+} \frac{p^+ - q^+}{(p-q)^2 q^2} \\
&= -ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \frac{1}{2} \int \frac{dq^- d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^D} \frac{xp^+}{1-x} \\
&\quad \frac{1}{-x(1-x)p^+ p^+ \times [q^- - \frac{2(1-x)p^- p^+ + q_\perp^2 - p^2 - i\epsilon}{-2xp^+}] \times [q^- - \frac{q_\perp^2 - i\epsilon}{2(1-x)p^+}]} \\
&= ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \frac{1}{2} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^D} \frac{1}{(1-x)^2 p^+} (-2i\pi) \frac{2x(1-x)p^+}{q_\perp^2 + p^2 x(x-1)} \\
&= \frac{1}{4\pi} g_s^2 C_F \frac{2x}{1-x} \mu^{2\epsilon} (4\pi)^{\epsilon-1} [p^2 x(x-1)]^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \frac{x}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} - \ln\left(\frac{p^2 x(x-1)}{\mu^2}\right) \right] \tag{2.11}
\end{aligned}$$

对于图 c 的矩阵元可以写出并化简为:

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta \bar{q}(\eta) A^a(\eta) T^a q(\eta)] \bar{q}(\xi^-) \frac{\not{n}_+}{2} \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^b(sn_+) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= \frac{-g_s^2 C_F}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \int_0^\infty ds \int d^4\eta \bar{u}(p) e^{ip\eta} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\not{k}}{k^2} e^{-ik(\eta-\xi^-)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\not{n}_+}{2} n_{+\nu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} e^{-i(\eta - sn_+)q} u(p) \\
&= -g_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(k^+ - xp^+) \xi^-} \int d^4 \eta e^{i(p-k-q)\eta} \int_0^\infty ds e^{iqs n_+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
& \quad \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \gamma_\mu \frac{\not{k}}{k^2} \frac{\not{n}_+}{2} n_+^\mu \frac{1}{q^2} u(p) \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - xp^+ - q^+) \xi^-} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_+ (\not{p} - \not{q}) \not{n}_+ u(p)}{2(p-q)^2 q^2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

可以看到，从矩阵元出发，通过化简计算图 b 和图 c 会给出相同的结果。此结论同样适用于图 d 和图 e，对于结果相同的两种情况我们只需要计算其中一种即可。接下来，我们首先计算同时展开初态相互作用项和 Wilson 线的图 d 结果：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+ \xi^-} \langle q(p) | \bar{q}(\xi^-) \frac{\not{n}_+}{2} [ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^a(0 + sn_+) T^a] \\
& \quad \times q(0) [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^a(\eta) T^a q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - xp^+) \xi^-} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_+ (\not{p} - \not{q}) \not{n}_+ u(p)}{2(p-q)^2 q^2} \\
&= ig_s^2 C_F 2\mu^{2\varepsilon} \delta(1-x) \int \frac{dq^+ dq^- d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^D} \frac{p^+ - q^+}{q^+} \\
& \quad \frac{1}{\overline{[p^2 + 2q^-(q^+ - P^+) - 2p^- q^+ - q_\perp^2 + i\varepsilon] * [2q^+ q^- - q_\perp^2 + i\varepsilon]}} \\
&= ig_s^2 C_F 2\mu^{2\varepsilon} \delta(1-x) \int \frac{dq^+ dq^- d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^D} \frac{p^+ - q^+}{q^+} \\
& \quad \frac{1}{\overline{2(q^+ - p^+) \times [q^- - \frac{2p^- q^+ + q_\perp^2 - p^2 - i\varepsilon}{2(q^+ - p^+)}] \times 2q^+(q^- - \frac{q_\perp^2 - i\varepsilon}{2q^+})}}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

此时 q^- 有两个极点，可以令 $q^+ = (1-y)p^+$ 且 $0 < y < 1$ 使两个极点分布在实轴两侧。因为 q 对应的胶子动量是从部分子动量 p 中劈裂出来，所以

这么做是合理的。同样，选取下侧极点做留数定理可以给出：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= ig_s^2 C_F 2\mu^{2\varepsilon} \delta(1-x) \int \frac{dq^+ dq^- d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^D} \frac{y}{1-y} \\
&\quad \frac{1}{-4y(1-y)p^+ p^+ [q^- - \frac{q_\perp^2 - p^2 + 2p^-(1-y) - i\varepsilon}{-2yp^+}] [q^- - \frac{q_\perp^2 - i\varepsilon}{2(1-y)p^+}]} \\
&= -\frac{1}{2} ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \int d(1-y) \frac{y}{1-y} \frac{\delta(1-x)}{y(1-y)p^+} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^D} \\
&\quad -2\pi i \frac{2y(1-y)p^+}{q_\perp^2 + (y-1)p^2 + 2p^-(1-y)^2 p^+} \\
&= -\frac{1}{4\pi} g_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \int d(1-y) \frac{2y\delta(1-x)}{(1-y)} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^{(D-2)}} \frac{1}{q_\perp^2 + p^2 y(y-1)} \\
&= -\frac{1}{4\pi} g_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \int d(1-y) \frac{2y\delta(1-x)}{(1-y)} [(4\pi)^{\frac{2-D}{2}} [p^2 y(y-1)]^{\frac{D}{2}-2} \Gamma(2-\frac{D}{2})] \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \int_0^1 d(y) \frac{y\delta(1-x)}{(1-y)} \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln\left(\frac{p^2 y(y-1)}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.14)
\end{aligned}$$

自此，我们已经演示了在外线离壳方案下上述五种情况单圈部分子分布函数的结果。在将所有的结果加起来之前还有一种情况需要我们额外讨论即外线的自能修正。

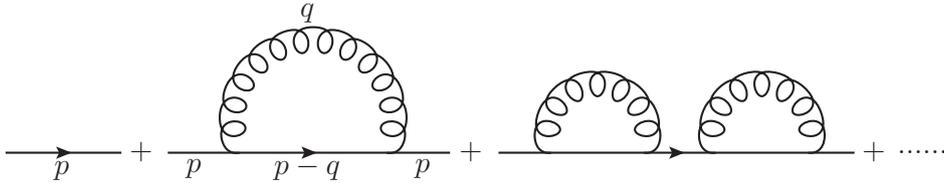


图 2-10 链近似下夸克传播子展开

夸克传播子可写作 $(\not{p} - m)^{-1}$ ，忽略质量并在“链近似”（即表示不考虑辐射的胶子有交叉的情况，见图 2-10)^[53] 下可表达为 2.15 式：

$$S_n^0 = \frac{i}{\not{p}} + \frac{i}{\not{p}} \Sigma \frac{i}{\not{p}} + \frac{i}{\not{p}} \Sigma \frac{i}{\not{p}} \Sigma \frac{i}{\not{p}} + \dots \quad (2.15)$$

其中 Σ 是夸克单圈自能修正贡献，用图像表达出来对应于下图 2-11。只取

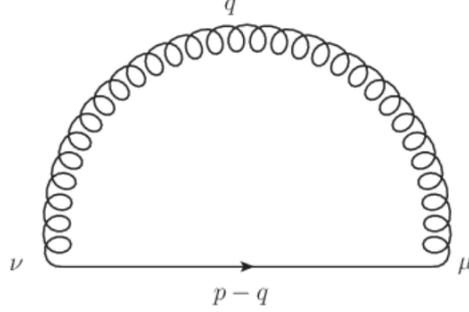


图 2-11 夸克自能图

S^0 的前两项为:

$$S_2^0 = \frac{i}{\not{p}} \left(1 + \Sigma \frac{i}{\not{p}} \right) \quad (2.16)$$

通过费曼规则 (取费曼规范), 可以将 Σ 的结果计算出来

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} i g_s t^a \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{q})}{(p-q)^2} i g_s t^a \gamma_\mu \frac{-i}{q^2} \\ &= -g_s^2 C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{q}) \gamma_\mu}{(p-q)^2 q^2} \\ &= g_s^2 C_F (D-2) \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(\not{p} - \not{q})}{(p-q)^2 q^2} \end{aligned}$$

其中, 对于 \not{q} 的积分是一个奇函数积分, 结果为零

$$\begin{aligned} &= g_s^2 C_F \not{p} (D-2) \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-q)^2 q^2} \\ &= g_s^2 C_F \not{p} (D-2) \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q-xp)^2 - x(x-1)p^2]^2} \\ &= g_s^2 C_F \not{p} \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx (D-2) \frac{(-1)^2 i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} [x(x-1)p^2]^{\frac{D}{2}-2} \\ &= \frac{i g_s^2 C_F}{8\pi^2} \not{p} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma - 1 - \ln[x(x-1)p^2] + \ln(\mu^2) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{ig_s^2 C_F}{8\pi^2} \not{p} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.17)$$

根据 Σ 的结果代回 2.16 式可以推导出:

$$S^0 = \frac{i}{\not{p}} \left[1 - \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \right] \right] \quad (2.18)$$

S^0 为裸量, 引入重整化常数 Z 使得 $S^r = Z^{-1}S^0$ 为有限量, 使用固定动量点减除方案 (MOM), 以此得出 Z 为:

$$Z^{-1} = 1 + \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.19)$$

$$Z = 1 - \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.20)$$

拿 $Z - 1$ 乘上树图阶结果即得到包含外线自能修正的结果:

$$(Z - 1)\delta(1 - x) = -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \delta(1 - x) \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.21)$$

再将结果求和前, 我们引入形如: $\frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x} - \delta(1-x) \int_0^1 \frac{1}{1-y} dy$ 的 Plus 函数, 通过演算比较可知图 b,c 与图 d,e 可以分别凑成 Plus 函数, 而图 a 可以和自能修正结果凑成 Plus 函数。最终将所有结果相加, 得到在外线离壳方案下光锥部分子分布函数单圈的结果为:

$$f_{q/q_0}(x) = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2 + 1}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} - \ln(p^2 x(x-1)) \right] + (x-2) \right]_+ \quad (2.22)$$

2.2.3 胶子质量方案下单圈结果

在维数正规化正规红外发散的情况下, 因为光锥部分子分布函数结果中的紫外与红外发散形式一致, 所以紫外和红外将相互抵消使其最终结果为零, 在这里不做过多的论述而直接进入下一种方案的讨论。“胶子质量”方案是指在胶子传播子中加入一个小的质量 m_g 作为正规子来正规红外发散, 计算思路与上一种情况类似, 所以我们将直接给出必要的计算过程和结果。在这种方案下外线是在壳的, 所以 $p^2 = 2p^+p^- = 0$ 。对于 a 图同样

是将相互作用项展开到两阶得到：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta_2 \bar{q}(\eta_2) A^a(\eta_2) T^a q(\eta_2)] \bar{q}(\xi^-) \not{n}_+ \\
&\quad \times q(0) [ig_s \int d^4\eta_1 \bar{q}(\eta_1) A^b(\eta_1) T^b q(\eta_1)] | q(p) \rangle \\
&= -\frac{ig_s^2 C_F}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - q^+ - xp^+)\xi^-} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q}) \not{n}_+ (\not{p} - \not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2(p-q)^2 (p-q)^2 (q^2 - m_g^2)} \\
&= ig_s^2 C_F (D-2) \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{p^+ q_\perp^2 + 2p^- q^{+2}}{[(p-q)^2]^2 (q^2 - m_g^2)} \delta(p^+ - xp^+ - q^+) \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} (D-2) \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{(1-x)[2p^+ p^- (x-1)^2 + q_\perp^2]}{2[q_\perp^2 + 2p^+ p^- (x-1)^2 + xm_g^2]} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{4\pi} \mu^{2\epsilon} (2-2\epsilon)(1-x) \left[\frac{1}{(4\pi)^{1-\epsilon}} (1-\epsilon) \frac{\Gamma[\epsilon]}{\Gamma[2]} (xm_g^2)^{-\epsilon} \right] \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} (1-x) \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} - \ln\left(\frac{xm_g^2}{\mu^2}\right) - 2 \right] \tag{2.23}
\end{aligned}$$

b 图结果为展开初态相互作用和末态 Wilson 线：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | \bar{q}(\xi^-) [-ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^a(\xi + sn_+) T^a] \not{n}_+ \\
&\quad q(0) [ig_s \int d^4\eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= g_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - xp^+ - q^+)\xi^-} \int_0^\infty ds e^{-isn_+q} \int d^4\eta e^{i(k+q-p)\eta} \\
&\quad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m_g^2)} \bar{u}(p) \not{n}_+ \frac{\not{k}}{k^2} \not{n}_+ u(p) \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_+ (\not{p} - \not{q}) \not{n}_+ u(p)}{2(p-q)^2 (q^2 - m_g^2)} \delta(xp^+ - p^+ + q^+) \\
&= -ig_s^2 C_F \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \frac{\mu^{2\epsilon} [2p^+(p^+ - q^+)] \delta(xp^+ - p^+ + q^+)}{q^+ [2q^+ q^- - q_\perp^2 - 2(p^+ q^- + p^- q^+)] [2q^+ q^- - q_\perp^2 - m_g^2]} \\
&= (-2\pi i) \frac{ig_s^2 C_F}{4\pi^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{x}{(1-x)} \frac{1}{q_\perp^2 + 2p^+ p^- (x-1)^2 + xm_g^2} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \frac{x}{(1-x)} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{1}{q_\perp^2 + xm_g^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \frac{x}{(1-x)} \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \Gamma[\varepsilon] (xm_g^2)^{-\varepsilon} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \frac{x}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln\left(\frac{xm_g^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.24)
\end{aligned}$$

d 图结果为展开初态的相互作用项和 Wilson 线：

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle q(p) | \bar{q}(\xi^-) \not{\xi}^+ [ig_s \int_0^\infty ds n_+ \cdot A^a(0 + sn_+) T^a] \\
&\quad q(0) [ig_s \int d^4\eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{i(p^+ - xp^+)\xi^-} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{\xi}^+ (\not{p} - \not{q}) \not{\xi}^+ u(p)}{2(p-q)^2 (q^2 - m_g^2)} \\
&= \frac{ig_s^2 C_F}{2} \frac{\delta(1-x)}{p^+} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^+} \frac{\bar{u}(p) \not{\xi}^+ (\not{p} - \not{q}) \not{\xi}^+ u(p)}{2(p-q)^2 (q^2 - m_g^2)} \\
&= \frac{ig_s^2 C_F}{p^+} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{2\mu^{2\varepsilon} 2p^+ (p^+ - q^+) \delta(1-x)}{q^+ [2q^+ q^- - q_\perp^2 - 2(p^+ q^- + p^- q^+)] [2q^+ q^- - q_\perp^2 - m_g^2]} \\
&= (-2\pi i) \frac{ig_s^2 C_F}{4\pi^2 p^+} \int_{-\infty}^\infty dq^+ \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{\mu^{2\varepsilon} p^+ (q^+ - p^+) \delta(1-x)}{q^+ [p^+ (q_\perp^2 + m_g^2) + q^+ (2p^- q^+ - m_g^2)]}
\end{aligned}$$

取 $q^+ = (1-y)p^+$ 代入原式

$$\begin{aligned}
f_{q/q_0} &= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \frac{\delta(1-x)}{p^+} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 p^+ dy \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{p^+ (-yp^+)}{(1-y)p^+ [p^+ q_\perp^2 + yp^+ m_g^2]} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \delta(1-x) \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dy \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{y}{1-y} \frac{1}{q_\perp^2 + ym_g^2} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \delta(x-1) \int_0^1 d(y) \frac{y}{(1-y)} \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln\left(\frac{ym_g^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (2.25)
\end{aligned}$$

同上一节，图 b 图 c 结果一致，图 d 图 e 结果一致。考虑自能修正，将所有结果求和，写成 Plus 函数形式：

$$f_{q/q_0}(x) = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2 + 1}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln(xm_g^2) \right] - 2(1-x) \right]_+ \quad (2.26)$$

2.3 本章小结

本章主要目的是微扰计算夸克部分子态下光锥部分子分布函数，在开头首先引入了为方便计算而定义的光锥坐标系，介绍了光锥坐标系中的光锥单位矢量及单位矢量间的关系，演示了任意四矢量在光锥坐标系下的拆分，在此之后则给出部分子分布函数在光锥坐标系下的定义式。在第二部分通过对耦合常数展开，逐阶计算了树图阶及单圈的结果。其中，对于单圈结果中的红外发散，我们采取了外线离壳和引入胶子质量两种正规化方案，对于维数正规化方案因为结果为零所以没有做过多论述。同时，在夸克传播子“链近似”下考虑了外线自能修正的结果，最后将所有结果求和以 Plus 函数的形式给出。下一章我们将以同样的思路给出另一种部分子分布函数的结果。

第三章 准分子分布函数

在第一章我们提到，要想使用格点 QCD 直接计算光锥分子分布函数会有诸多难以解决的问题。如光锥分布函数是定义在闵氏时空光锥上且包含时间依赖的非局域矩阵元，由于格点模拟的是欧式时空（见图 3-12），若想在格点上直接计算光锥分布要对其含时部分作维克转动处理，这样的话光锥上可观测量的时空间隔为零将导致局域量和非局域量无法区分。为了避开这些问题，大动量有效理论引入了准分子分布函数。从图 1-6 可以看到准分子分布函数定义在类空区域且是与时间无关的，那这样就可以不用考虑对时间部分的依赖而直接采用格点 QCD 对其经行数值计算。当在某一方向上动量趋于无限大时洛伦兹 boost 使得准分布函数在我们可接受的误差范围内非常近似的回到现实情况下的光锥分子分布，对于建立光锥分布与准分布匹配关系有一个至关重要的匹配系数，在绪论中我们已经讨论了它的重要性以及关于它要做的工作。

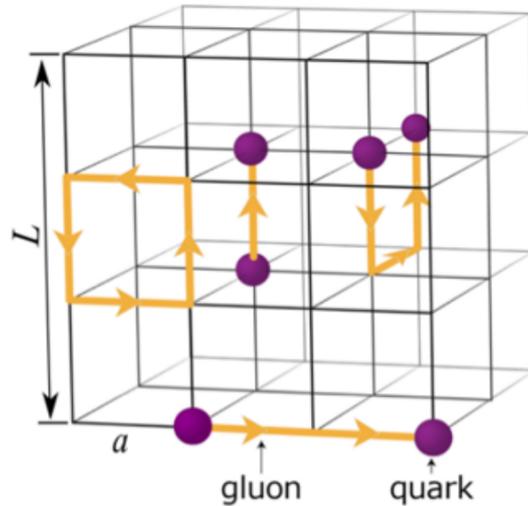


图 3-12 欧式时空格点 QCD

与上一章类似，这一章仍要在夸克外态下来做微扰计算，从准分子分布函数的定义式出发，为可微扰的红外结构采用三种不同的正规化方法来计算出树图阶，单圈阶结果。

3.1 准分布函数定义式及树图阶结果

准部分子分布函数所涉及的单位矢量即四维坐标下的时间单位矢量 n_0 与某一空间单位分量 n_3 。对于这两个单位矢量可以直接给出表达式以及它们之间的相互关系：

$$\begin{aligned} n_{0\mu} &= (1, 0, 0, 0), & n_{3\mu} &= (0, 0, 0, -1) \\ n_0 \cdot n_0 &= 1, & n_3 \cdot n_3 &= -1, & n_0 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

任意矢量在此完备坐标系下可以分解为时间分量，空间第三分量和垂直分量，并且可以验证垂直分量单位矢量与 0 分量 3 分量单位矢量都正交：

$$a_\mu = a_0 n_{0\mu} + a_3 n_{3\mu} + a_{\perp\mu} \quad (3.1)$$

矢量 a 拆分的时间分量记作 a_0 ，第三空间分量记作 a_3 ，垂直分量记作 a_{\perp} 。在这里，我们规定 $n_3 \cdot a = a_3$ ，然后给出关于准部分子分布函数定义如下：

$$\tilde{f}_{q/H}(x) = \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle P(p) | (\bar{q} W_c)(\xi) \left\{ \frac{\eta_3}{2}, \frac{\eta_0}{2} \right\} (W_c^\dagger q)(0) | P(p) \rangle \quad (3.2)$$

由上式可见，定义式中的 Γ 结构并不唯一，可以分别取 n_0 方向和 n_3 方向。对于要从准分布函数出发最终要得到光锥分布来说，中间的结构取零分量还是三分量并没有明显的优劣可言，都可以在算得匹配系数并在动量取无限大得情况下通过洛伦兹 boost 将准分布函数匹配到光锥分布。只是取不同的结构微扰计算时会得到不同的准分布函数结果且对应的匹配系数也不同，但这并不影响最终的光锥部分子分布函数。而从另一方面考虑，准部分子分布函数要在格点上数值模拟计算，在取 n_3 时会出现算符混合的情况而带来难以处理的不确定性^[54, 55, 56, 57]，在文献 [58]，[59] 中提到当取不同的 Γ 时面临的算符混合问题是不一样的，为了使问题得到简化，考虑格点上的计算成本，在这里我们选取 n_0 进行计算。

从定义式可以看到，准分布函数作为非局域算符同样需要引入 Wilson 线来保证规范不变性：

$$W_c(\xi) = \bar{P} \exp(-ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(\xi + s n_3) T^a) \quad (3.3)$$

对于准部分子分布函数在微扰计算时同样选取的为部分子外态，对相互作用项以及 Wilson 线中的相互作用常数展开到零阶，可以得到树图阶结果：

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\eta_0}{2} q(0) | q(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \bar{u}(p) e^{ip\cdot\xi} \frac{\eta_0}{2} u(p) \\ &= \frac{1}{4} \delta(xp^3 - p^3) \text{tr}[\not{p}\not{\eta}_0] = \frac{1}{4} \frac{4p_0\delta(x-1)}{p_3}\end{aligned}$$

在选取的三种正规红外发散的方法下 p_0 和 p_3 都满足一定的关系，外线离壳时， $p^2 \neq 0$ 我们取 $p^2 = -\rho p_3^2$ 其中 ρ 为一小量，那么 $p^2 = p_0^2 - p_3^2 = -\rho p_3^2$ 得到 $p_0 = \sqrt{1-\rho}p_3$ ，在维数正规化与胶子质量不为零方案下，外线在壳 $p^2 = 0$ 得到 $p_0 = p_3$ 。这里以外线离壳为例重新回到上式可以得到：

$$\tilde{f}_{q_0/q}(x) = \frac{p_0}{p_3} \delta(x-1) = \sqrt{1-\rho} \delta(x-1) \sim \delta(x-1) \quad (3.4)$$

对于另外两种 p_0 和 p_3 的关系，很容易验算结果同样为 δ 函数，接下来将在三种方案下给出单圈的计算。

3.2 不同红外方案下的单圈结果

准部分子分布函数包含以下几种有贡献的费曼图，最后同样要考虑自能修正与图 a 凑成 Plus 函数。依据前述讨论，可验证图 b, 图 c 结果相同，图 d, 图 e 结果相同，事实上，图 g 和 h 结果也是一致的。对于结果一致的两张图我们只演示前一张，最终将所有结果求和时只需乘二即可。准分布的计算思路与光锥分布类似，只是准分布不包含紫外发散，关于这一点可以直接从接下来计算过程中的积分测度上看出，紫外发散源于动量积分区域为无穷时带来的发散，在准分布函数中将会看到，虽然积分动量的区域仍是无穷但分母上关于动量的幂次比分子上动量积分测度的幂次要高，所以这个积分结果在趋于无穷时是收敛的并不会引起紫外发散。另一个角度，光锥分布函数坐落于光锥上所以时空间隔为零而引起动量的不确定度为无穷大所以带来紫外发散，而准分布函数是位于类空区域时空间隔并不会趋于零，那么动量的不确定度不会达到无穷所以并不引起紫外发散。除紫外

发散部分之外对于两者共通的部分在这里将直接给出。

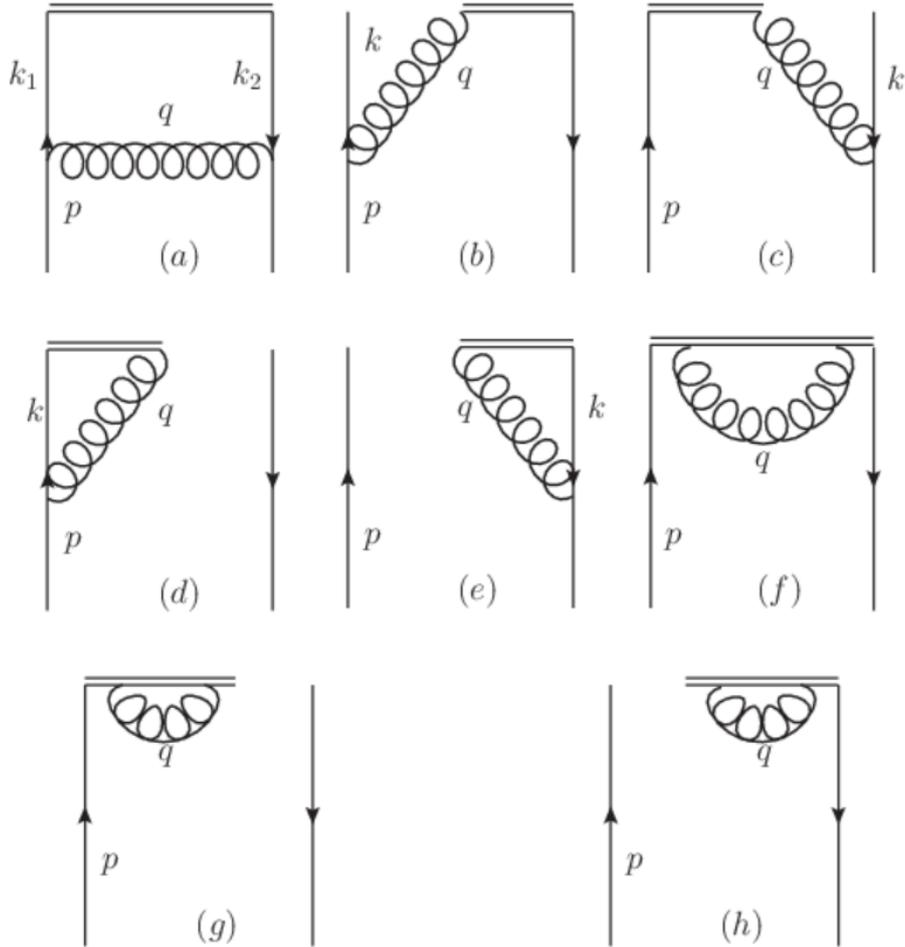


图 3-13 单圈 Quasi-PDF

3.2.1 维数正规化方案

在此正规化方案下有 $p^2 = 0$ 将 p^2 按 0 分量 3 分量以及垂直分量展开我们可以得到 $p_0 = p_3$, 对于图 a。将相互作用项展开到两阶:

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta_2 \bar{q}(\eta_2) A^a(\eta_2) T^a q(\eta_2)] \bar{q}(\xi) \rangle \frac{\not{p}_0}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \times q(0)[ig_s \int d^4 \eta_1 \bar{q}(\eta_1) A^b(\eta_1) T^b q(\eta_1)] |q(p)\rangle \\
& = -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q}) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2(p-q)^2 (p-q)^2 q^2} \\
& = \frac{(D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon}}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p) (\not{p} - \not{q}) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q}) u(p)}{2[(p-q)^2]^2 q^2} \\
& = (D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}[\not{p} (\not{p} - \not{q}) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q})]}{2[(p-q)^2]^2 q^2}
\end{aligned}$$

对分子 trace 结构处理细节如下:

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\not{p} (\not{p} - \not{q}) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q})] & = p_\mu (p-q)_\nu n_{0\rho} (p-q)_\sigma \cdot 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\
& = 4[p \cdot (p-q)(p_0 - q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q) + p \cdot (p-q)(p_0 - q_0)] \\
& = 4p_0[q_0^2 + q_\perp^2 + q_3^2 - 2q_0 q_3]
\end{aligned}$$

对于分母进行费曼参数化^[60]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q^2 [(p-q)^2]^2} & = \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[(1-\xi)q^2 + \xi(p-q)^2]^3} \\
& = \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[q_0^2 - 2\xi p_0 q_0 + 2\xi p_0 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2]^3}
\end{aligned}$$

代回原式可以得到:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) & = \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_0^1 d\xi \frac{[ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} (D-2)] 2\xi p_0 [q_0^2 + q_\perp^2 + q_3^2 - 2q_0 q_3]}{[q_0^2 - 2\xi p_0 q_0 + 2\xi p_0 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2]^3} \\
& = \int \frac{d^{D-2} q_\perp dq_0}{(2\pi)^D} \int_0^1 2\xi d\xi \frac{[ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} (D-2)] p_0 \{ [q_0 - p_3(1-x)]^2 + q_\perp^2 \}}{[q_0^2 - q_\perp^2 + 2\xi p_0 p_3(1-x) - 2\xi p_0 p_3 - (1-x^2)p_3^2 + i\varepsilon]^3}
\end{aligned}$$

q_0 存在两个极点分布在实轴两侧, 取下侧极点并求留数

$$\begin{aligned}
q_0 & = \xi p_0 \pm \sqrt{\xi^2 p_0^2 - 2\xi p_0 p_3 + 2\xi p_0 p_3 x + p_3^2 x^2 - 2p_3^2 x + p_3^2 + q_\perp^2 - i\varepsilon} \\
\text{Res}(q_{0+}) & = \frac{p_0}{8\{[\xi p_0 + p_3(x-1)]^2 + q_\perp^2\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

将留数带入原式, 对费曼参数及动量垂直分量分别积分, 并对 ε 展开。

在此处我们发现结果需要对 x 进行分段讨论, 需要将 x 分为 0 到 1 之间的物理区域的结果和此区间之外非物理区域的结果:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= (D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} (-2\pi i) \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^D} \int_0^1 2\xi d\xi \text{Res}(q_{0+}) \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{4\pi} (1-\varepsilon) \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 \xi d\xi p_0^{-2\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \frac{\Gamma(\frac{1+2\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} [(\xi+x-1)^2]^{-\frac{1-2\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} (x-1) \ln \frac{x-1}{x} + 1 & x > 1 \\ (x-1) [\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{4p_0^2 x(1-x)}] + x & 0 < x < 1 \\ (1-x) \ln \frac{x-1}{x} - 1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

b 图为展开初态相互作用项和末态 Wilson 线的结果:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(\xi + sn_3) T^a] \frac{\not{n}_0}{2} \\
&\quad \times q(0) [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= -ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3 + q^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{n}_3 u(p)}{2q_3(p-q)^2 q^2 + i\varepsilon} \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon}}{q_3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \frac{p_0 [2p_0 - q_0 - q_3] \delta[(x-1)p_3 + q_3]}{[q_0^2 - q_\perp^2 - q_3^2 - 2yp_0(q_0 - q_3) + i\varepsilon]^2}
\end{aligned}$$

其中, 对于分子的处理细节为:

$$\begin{aligned}
\not{n}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{n}_3 &= 2(p_0 - q_0) \not{n}_3 - (\not{p} - \not{q}) \not{n}_0 \not{n}_3 \\
\sum \bar{u}(p) \not{n}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{n}_3 u(p) &= 4p_0 [2p_0 - q_0 - q_3]
\end{aligned}$$

取 q_0 下侧极点计算留数:

$$\begin{aligned}
q_0 &= yp_0 \pm \sqrt{(yp_0 - q_3)^2 + q_\perp^2 - i\varepsilon} \\
\text{Res}(q_{0+}) &= \frac{(y-2)p_0^2 + q_3 p_0}{4[(yp_0 - q_3)^2 + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

将留数结果代回原式得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= -2\pi g_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{D-2} q_\perp dq_3}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \frac{p_0[(y-2)p_0 + q_3]}{4[(yp_0 - q_3)^2 + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\delta[(x-1)p_3 + q_3]}{q_3} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F p_0}{2\pi} \frac{1}{4} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dy \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{(y-x-1)p_0}{[q_\perp^2 + (x+y-1)^2 p_0^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1-x)p_0} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F p_0}{2\pi} \frac{1}{4} \mu^{2\varepsilon} \int_0^1 dy \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-2}{2}}} \frac{\Gamma[\frac{3-D+2}{2}]}{\Gamma[\frac{3}{2}]} \frac{y-x-1}{1-x} [(x+y-1)^2 p_0^2]^{-\frac{1+2\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{x-1} [2x \ln \frac{x-1}{x} + 1] & x > 1 \\ \frac{2x}{x-1} [\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{4p_0^2 x(1-x)}] + \frac{2x-1}{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{1-x} [2x \ln \frac{x-1}{x} + 1] & x < 0 \end{cases} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

对于 c 图的结果是展开末态相互作用和初态 Wilson 线，其振幅可以写出并化简为：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^a(\eta) T^a q(\eta)] \bar{q}(\xi) \frac{\not{h}_0}{2} \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^b(0 + sn_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= -g_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - k^3) \xi^3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int d^4 \eta e^{i(p-k-q)\eta} \int_0^\infty ds e^{iq \cdot n_3 s} \\
&\quad \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \not{h}_3 \frac{\not{k}}{k^2} \frac{\not{h}_0}{2} \frac{1}{q^2} u(p)
\end{aligned}$$

其中对于 s 的积分对于 e 指数上仍要引入一个小的 $i\varepsilon$ 来保证积分的收敛，对 k 和 η 的积分保证顶点的动量守恒。

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = -ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3 + q^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{h}_3 u(p)}{2q_3(p-q)^2 q^2 + i\varepsilon} \quad (3.7)$$

将此结果与上述 b 图的振幅相比较发现二者振幅相等，类似可证明图 d 和图 e 结果及图 f 和图 g 结果分别相同，此后不再做过多论述。

d 图展开初态相互作用项和初态 Wilson 线得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\not{h}_0}{2} [ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(s n_3) T^a] q(0) \\
&\quad \times [ig_s \int d^4\eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{h}_3 u(p)}{2q_3(p-q)^2 q^2 + i\epsilon} \\
&= ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \frac{1}{q_3} \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \int_0^1 dt \frac{p_0 [2p_0 - q_0 - q_3]}{[q_0^2 - q_\perp^2 - q_3^2 - 2tp_0(q_0 - q_3) + i\epsilon]^2} \\
&= (-2\pi i) ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \frac{1}{q_3} \int \frac{dq_3}{(2\pi)^D} \int_0^1 dt \int d^{D-2}q_\perp \frac{p_0 [(t-2)p_0 + q_3]}{4[(tp_0 - q_3)^2 + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

令 $q_3 = (1-y)p_3$ 代入原式得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \mu^{2\epsilon} \frac{\delta(x-1)}{1-y} \frac{p_0}{4} \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^1 dt \int \frac{d^{D-2}q_\perp}{(2\pi)^{D-2}} \frac{(t-y-1)}{[q_\perp^2 + (t+y-1)^2 p_0^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^\infty dy \frac{\delta(x-1)}{1-y} [2y \ln \frac{y-1}{y} + 1] & y > 1 \\ \int_0^1 dy \frac{\delta(x-1)}{1-y} \{2y [\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{4p_0^2(1-y)}] + 2y - 1\} & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 dy \frac{\delta(x-1)}{y-1} [2y \ln \frac{y-1}{y} + 1] & y < 0 \end{cases} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

图 f 结果是将初态和末态 Wilson 线分别展开到一阶：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) \tilde{f}_{q_0/q}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^a] \frac{\not{h}_0}{2} \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 + q^3 - p^3)\xi^3} \int_0^\infty ds_1 e^{-is_1 n_3 q} \int_0^\infty ds_2 e^{is_2 n_3 q} \\
&\quad \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\bar{u}(p) n_3^\mu \frac{\not{h}_0}{2} n_{3\mu} \frac{1}{q^2} u(p)] \\
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\bar{u}(p) \frac{\not{h}_0}{2} \frac{1}{q^2} u(p)] \\
&= i \frac{g_s^2 C_F}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\not{p} \not{h}_0]}{q_3^2 q^2} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ig_s^2 C_F \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{p_0}{q_3^2 (q_0^2 - q_3^2 - q_\perp^2)} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{4\pi} \mu^{2\varepsilon} \frac{p_0^{1-2\varepsilon}}{p_0} \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \frac{\Gamma[\frac{2\varepsilon-1}{2}]}{\Gamma[\frac{1}{2}]} [(1-x)^2]^{\frac{1-2\varepsilon}{2}} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \frac{\sqrt{(1-x)^2}}{(1-x)^2} \frac{p_0}{p_0} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x > 1 \\ \frac{1}{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

g 图结果，将初态 Wilson 线展开到两阶可以得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \not{h}_0 \frac{1}{2} [ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^a] \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F}{8} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{4p_0}{q^2} \\
&= \frac{-2\pi g_s^2 C_F}{2} \frac{\delta(x-1) p_0}{p_3} \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^{D-2} q_\perp}{(2\pi)^D} \int dq_3 \frac{1}{2q_3^2 (q_\perp^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-g_s^2 C_F}{8\pi} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \frac{p_0}{p_3} \int_{-\infty}^\infty dq_3 \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \frac{\Gamma[-\frac{1}{2} + \varepsilon]}{\Gamma[\frac{1}{2}]} \frac{(q_3^2)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{q_3^2}
\end{aligned}$$

令 $q_3 = (1-y)p_3$ 代入原式并对 ε 展开：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \delta(x-1) \int_{-\infty}^\infty dy \frac{\sqrt{(1-y)^2}}{(1-y)^2} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^\infty \frac{\delta(x-1)}{1-y} dy & y > 1 \\ \int_0^1 \frac{\delta(x-1)}{y-1} dy & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-1} dy & y < 0 \end{cases} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

图 h 与图 g 的结果式一致的，这两个图的结果与图 f 凑成 Plus 函数，图 a 与自能图凑成 Plus 函数，图 b,c 与图 d,e 凑成 Plus 函数。我们之前提到，在维数正规化方案下外线在壳此时 $p^2 = 0$ 得到 p_0 等于 p_3 ，将以上

所有结果求和，并将得到的结果中 p_0 改为 p_3 最终得到维数正规化下的单圈准部分子分布函数结果：

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{x-1}{x} + 1 \right]_+ & x > 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{x-1} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{1}{4p_3^2 x(1-x)} \right] + \frac{x(x+1)}{x-1} \right]_+ & 0 < x < 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{1-x} \ln \frac{x-1}{x} - 1 \right]_+ & x < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.2 外线离壳方案

外线离壳方案下 $p^2 \neq 0$ ，令 $p^2 = -\rho p_3^2$ ，其中 ρ 为一充分小量而作为红外正规子。依据此关系我们将 p 展开为 0 分量 p_0 、3 分量 p_3 和垂直分量 p_\perp 可以得到 $p_0 = (\sqrt{1-\rho})p_3$ ，以此为出发点我们进行下面的计算。

对于图 a 还是相互作用项展开到两阶：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta_2 \bar{q}(\eta_2) A^a(\eta_2) T^a q(\eta_2)] \bar{q}(\xi) \frac{\not{h}_0}{2} \\ &\quad \times q(0) [ig_s \int d^4\eta_1 \bar{q}(\eta_1) A^b(\eta_1) T^b q(\eta_1)] | q(p) \rangle \\ &= \frac{-g_s^2 C_F}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \int d^4\eta_1 \int d^4\eta_2 \bar{u}(p) e^{ip\eta_2} \gamma^\mu \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{ik_2}{k_2^2} e^{-i(\eta_2-\xi)k_2} \\ &\quad \frac{\not{h}_0}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{ik_1}{k_1^2} e^{-i(0-\eta_1)k_1} \gamma^\nu \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} e^{-i(\eta_2-\eta_1)q} u(p) e^{-ip\eta_1} \\ &= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3-p^3+q^3)\xi^3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p}-\not{q}) \not{h}_0 (\not{p}-\not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2(p-q)^2 (p-q)^2 q^2} \\ &= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3-p^3+q^3)\xi^3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) (\not{p}-\not{q}) \not{h}_0 (\not{p}-\not{q}) u(p)}{[(p-q)^2]^2 q^2} \\ &= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3-p^3+q^3)\xi^3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{h}_0(\not{p}-\not{q})]}{[(p-q)^2]^2 q^2} \end{aligned}$$

对于被积函数分子的 trace 结构可化简为：

$$\begin{aligned} \text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{h}_0(\not{p}-\not{q})] &= p_\mu(p-q)_\nu n_{0\rho}(p-q)_\sigma \cdot 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ &= 4[p \cdot (p-q)(p_0 - q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q) + p \cdot (p-q)(p_0 - q_0)] \\ &= 4p_0[p_3^2(-\rho) - q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2] + 8p_3q_0[p_3\rho + \sqrt{1-\rho}q_0 - q_3] \end{aligned}$$

分母采用费曼参数化后化简为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2[(p-q)^2]^2} &= \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[(1-\xi)q^2 + \xi(p-q)^2]^3} \\ &= \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[q_0^2 - 2\xi p_3 \sqrt{1-\rho} q_0 + 2\xi p_3 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2 - \xi \rho p_3^2]^3} \end{aligned}$$

回到原式可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= ig_s^2 C_F 2 \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi \\ &\quad \frac{2\xi \{p_0[p_3^2(-\rho) - q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2] + 2p_3 q_0[p_3 \rho + \sqrt{1-\rho} q_0 - q_3]\}}{[q_0^2 - 2\xi p_3 \sqrt{1-\rho} q_0 + 2\xi p_3 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2 - \xi \rho p_3^2]^3} \\ &= ig_s^2 C_F 4\xi \int \frac{d^2 q_\perp dq_0}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi \\ &\quad \frac{p_0 \{p_3^2[(x-1)^2 - \rho] - q_0^2 + q_\perp^2\}}{[q_0^2 - 2\xi p_3 q_0 \sqrt{1-\rho} - p_3[p_3(x-1)(x-1+2\xi) + \xi \rho p_3] - q_\perp^2 + i\epsilon]^3} \\ &\quad + \frac{2p_3 q_0[p_3(\rho + x - 1) + \sqrt{1-\rho} q_0]}{[q_0^2 - 2\xi p_3 q_0 \sqrt{1-\rho} - p_3[p_3(x-1)(x-1+2\xi) + \xi \rho p_3] - q_\perp^2 + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

可见, 对于 q_0 有极点为:

$$q_0 = \xi p_3 \sqrt{1-\rho} \pm \sqrt{\xi^2(1-\rho)p_3^2 + p_3[p_3(x-1)(x-1+2\xi) + p_3 \xi \rho] + q_\perp^2 - i\epsilon}$$

取下侧极点并求留数:

$$\begin{aligned} Res[q_{0+}] &= \frac{p_0[(2\xi^2 + \xi - 3)p_3^2 \rho + 2p_3^2(-\xi + 2x - 2)(\xi + x - 1) + 4q_\perp^2]}{16[q_\perp^2 + p_3^2[(x-1+\xi)^2 - (\xi-1)\xi\rho]]^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad - \frac{2p_3 \sqrt{1-\rho} \{p_3^2[(\xi-1)(2\xi(2\rho-1)-1) + x^2 - (\xi-2)x] + q_\perp^2\}}{16[q_\perp^2 + p_3^2[(x-1+\xi)^2 - (\xi-1)\xi\rho]]^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

代入上述结果后, 分别对费曼参数和动量垂直分量积分。

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{q/q_0}(x)(x) &= 4ig_s^2 C_F(-2\pi i) \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \int_0^1 \xi d\xi \text{Res}(q_{0+}) \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} (x-1) \ln \frac{x-1}{x} + 1 & x > 1 \\ (x-1) [\ln \frac{\rho}{4} + 2] & 0 < x < 1 \\ (1-x) \ln \frac{x-1}{x} - 1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.13)\end{aligned}$$

b 图结果为:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(\xi + sn_3) T^a] \not{n}_0 q(0) \\ &\quad \times [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\ &= -ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3 + q^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{n}_3 u(p)}{2q_3(p-q)^2 q^2 + i\epsilon} \\ &= -ig_s^2 C_F \frac{\delta[(x-1)p_3 + q_3]}{q_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dy \\ &\quad \frac{2p_3^2 \sqrt{1-\rho} - p_3 q_0 - p_3 q_3 \sqrt{1-\rho}}{[y\rho p_3^2 + 2yp_3 q_0 \sqrt{1-\rho} - 2yp_3 q_3 - q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2 - i\epsilon]^2}\end{aligned}$$

q_0 极点如下, 并取下侧极点

$$\begin{aligned}q_0 &= yp_3 \sqrt{1-\rho} \pm \sqrt{(yp_3 - q_3)^2 + (1-y)y\rho p_3^2 + q_\perp^2 - i\epsilon} \\ \text{Res}(q_{0+}) &= \frac{-2p_3^2 \sqrt{1-\rho} + yp_3^2 \sqrt{1-\rho} + p_3 q_3 \sqrt{1-\rho}}{4[p_3^2 \rho(1-y)y + (yp_3 - q_3)^2 + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

将留数结果代入原式得到:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= -ig_s^2 C_F \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \int_0^1 dy - \frac{p_3^2 \sqrt{1-\rho} (x-y+1)}{4[p_3^2 (x+y-1)^2 - p_3^2 \rho (y-1)y + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{(-2\pi i)}{(1-x)p_3} \\ &= -\frac{2\pi g_s^2 C_F}{(2\pi)^4} \frac{1}{x-1} \int d^2 q_\perp \int_0^1 dy \frac{p_3 \sqrt{1-\rho} (x-y+1)}{4[p_3^2 (x+y-1)^2 - p_3^2 \rho (y-1)y + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{x-1} [2x \ln \frac{x-1}{x} + 1] & x > 1 \\ \frac{1}{x-1} [2x \ln \frac{\rho}{4} + 2x - 1] & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{1-x} [2x \ln \frac{x-1}{x} + 1] & x < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

d 图结果为:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\not{h}_0}{2} [ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(sn_3) T^a] \\ &\quad \times q(0) [ig_s \int d^4\eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\ &= ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{h}_0 (\not{p} - \not{q}) \not{h}_3 u(p)}{2q_3(p-q)^2 q^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{ig_s^2 C_F}{q_3 p_3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dt \frac{[(2p_3^2 - p_3 q_3) \sqrt{1-\rho} - p_3 q_0] \delta(x-1)}{[q_0^2 - 2t\sqrt{1-\rho} p_3 q_0 + 2tp_3 q_3 - \rho t p_3^2 - q_\perp^2 - q_3^2 + i\epsilon]^2} \\ &= \frac{ig_s^2 C_F}{q_3} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \int \frac{dq_3}{(2\pi)^4} \int_0^1 dt \int d^2q_\perp \frac{(-2\pi i)(-2p_3^2 + p_3^2 t + p_3^2) \sqrt{1-\rho}}{4[p_3^2 \rho(1-t)t + (p_3 t - q_3)^2 + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{2\pi g_s^2 C_F}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^\infty dy \frac{\delta(x-1)}{1-y} \int_0^1 dt \int d^2q_\perp \frac{p_3 \sqrt{1-\rho} (y-t+1)}{4[p_3^2 (y+t-1)^2 - p_3^2 \rho (t-1)t + q_\perp^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^\infty dy \frac{\delta(x-1)}{1-y} [2y \ln \frac{y-1}{y} + 1] & y > 1 \\ \int_0^1 dy \frac{\delta(x-1)}{1-y} [2y \ln \frac{\rho}{4} + 2y - 1] & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 dy \frac{\delta(x-1)}{y-1} [2y \ln \frac{y-1}{y} + 1] & y < 0 \end{cases} \quad (3.15) \end{aligned}$$

上式倒数第二步取 $q_3 = (1-y)p_3$ 。

f 图结果是将初态末态 Wilson 线分别展开到一阶:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^a] \frac{\not{h}_0}{2} \\ &\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\ &= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 + q^3 - p^3)\xi^3} \int_0^\infty ds_1 e^{-is_1 n_3 q} \int_0^\infty ds_2 e^{is_2 n_3 q} \\ &\quad \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\bar{u}(p) n_3^\mu \frac{\not{h}_0}{2} n_{3\mu} \frac{1}{q^2} u(p)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\bar{u}(p) \not{n}_0 \frac{1}{q^2} u(p)] \\
&= i \frac{g_s^2 C_F}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[p \not{n}_0]}{q_3^2 q^2} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= ig_s^2 C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{q_3^2 (q_0^2 - q_3^2 - q_\perp^2)} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= -(2\pi i) ig_s^2 C_F \int \frac{dq_3}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \frac{p_0}{2q_3^2 (q_\perp^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}}} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= \frac{2\pi g_s^2 C_F}{(1-x)^2 p_3^2} \int \frac{dq_\perp^2}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{2[q_\perp^2 + (1-x)^2 p_3^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2\pi g_s^2 C_F}{(1-x)^2} \frac{p_0}{2p_3^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma[-\frac{1}{2}]}{\Gamma[\frac{1}{2}]} [(1-x)^2 p_3^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \frac{\sqrt{(1-x)^2} p_0}{(1-x)^2 p_3} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x > 1 \\ \frac{1}{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

g 图结果，将初态 Wilson 线展开到两阶：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \not{n}_0 \frac{1}{2} [ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^a] \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F}{2} \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3)\xi^3} \int_0^\infty ds_1 e^{-is_1 n_3 q} \int_0^\infty ds_2 e^{is_2 n_3 q} \\
&\quad \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{n}_0 u(p)}{2q^2} \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F}{8} \frac{\delta(x-1)}{p_3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4p_0}{q^2} \\
&= \frac{-2\pi g_s^2 C_F}{2} \frac{\delta(x-1) p_0}{p_3} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \int dq_3 \frac{1}{2q_3^2 (q_\perp^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \frac{\delta(x-1) p_0}{p_3} \int_{-\infty}^\infty dq_3 \frac{\sqrt{q_3^2}}{q_3^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \delta(x-1) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\sqrt{(1-y)^2}}{(1-y)^2} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{\delta(x-1)}{1-y} dy & y > 1 \\ \int_0^1 \frac{\delta(x-1)}{y-1} dy & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-1} dy & y < 0 \end{cases} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

上式倒数第二步令 $q_3 = (1-y)p_3$ ，同样考虑自能修正将所有结果加和凑成 Plus 函数形式，最终得到外线离壳方案下准部分子分布函数：

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{x-1}{x} + 1 \right]_+ & x > 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{p}{4} + \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} \right]_+ & 0 < x < 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{1-x} \ln \frac{x-1}{x} - 1 \right]_+ & x < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

3.2.3 胶子质量不为零方案

此种方案下为胶子传播子赋予一个小的质量来正规红外发散，此时外线在壳，四动量平方为零， $p^2 = 0 \rightarrow p_0 = p_3$ 。

图 a 将相互作用项展开到两阶：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | [ig_s \int d^4\eta_2 \bar{q}(\eta_2) A^a(\eta_2) T^a q(\eta_2)] \bar{q}(\xi) \not{h}_0 \\
&\quad \times q(0) [ig_s \int d^4\eta_1 \bar{q}(\eta_1) A^b(\eta_1) T^b q(\eta_1)] | q(p) \rangle \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3-p^3+q^3)\xi^3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \gamma^\mu (\not{p}-\not{q}) \not{h}_0 (\not{p}-\not{q}) \gamma_\mu u(p)}{2(p-q)^2 (p-q)^2 (q^2 - m_g^2)} \\
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3-p^3+q^3)\xi^3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q}) \not{h}_0 (\not{p}-\not{q})]}{[(p-q)^2]^2 (q^2 - m_g^2)}
\end{aligned}$$

分子化简及分母费曼参数化

$$\begin{aligned}
&\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q}) \not{h}_0 (\not{p}-\not{q})] \\
&= 4[p \cdot (p-q)(p_0 - q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q) + p \cdot (p-q)(p_0 - q_0)] \\
&= 4p_0[q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2 - 2q_0q_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q^2 - m_g^2)[(p-q)^2]^2} &= \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[(1-\xi)(q^2 - m_g^2) + \xi(p-q)^2]^3} \\ &= \int_0^1 d\xi \frac{2\xi}{[q_0^2 - 2\xi p_0 q_0 + 2\xi p_0 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2 + (\xi-1)m_g^2]^3} \end{aligned}$$

分子分母化简结果代回原式：

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 \xi d\xi \frac{4ig_s^2 C_F \delta[(x-1)p_3 + q_3] p_0 [q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2 - 2q_0 q_3]}{[q_0^2 - 2\xi p_0 q_0 + 2\xi p_0 q_3 - q_3^2 - q_\perp^2 + (\xi-1)m_g^2 + i\epsilon]^3}$$

给出 q_0 的两个极点并取下侧极点作留数定理

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 \xi \pm \sqrt{(q_3 - p_0 \xi)^2 + q_\perp^2 - (\xi-1)m_g^2 - i\epsilon} \\ Res(q_{0+}) &= \frac{p_0 \{m_g^2(\xi-1) + 2[q_\perp^2 + (q_3 - \xi p_0)^2]\}}{16[q_\perp^2 - m_g^2(\xi-1) + (q_3 - \xi p_0)^2]^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

将留数代入，于是结果为：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \frac{g_s^2 C_F}{4} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \xi d\xi \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \frac{p_0 [2p_0^2(1-x-\xi)^2 + m_g^2(\xi-1)] + 2p_0 q_\perp^2}{[q_\perp^2 + p_0^2(1-x-\xi)^2 - m_g^2(\xi-1)]^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi} \int_0^1 \xi d\xi \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} [p_0^2(1-x-\xi)^2 - m_g^2(\xi-1)]^{-\frac{3}{2}} p_0 [2p_0^2(1-x-\xi)^2 \right. \\ &\quad \left. + m_g^2(\xi-1)] + \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} [p_0^2(1-x-\xi)^2 - m_g^2(\xi-1)]^{-\frac{1}{2}} 2p_0 \right\} \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} (x-1) \ln \frac{x-1}{x} + 1 & x > 1 \\ (x-1) \ln \frac{m_g^2}{4(1-x)p_0^2} + 3x - 2 & 0 < x < 1 \\ (1-x) \ln \frac{x-1}{x} - 1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.19) \end{aligned}$$

b 图结果为展开初态相互作用项及末态 Wilson 线：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(\xi + sn_3) T^a] \frac{\not{n}_0}{2} \\ &\quad \times q(0) [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3 + q^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{p} (\not{p} - \not{q}) \not{q}_3 u(p)}{2q_3 (p-q)^2 (q^2 - m_g^2) + i\epsilon} \\
&= -ig_s^2 C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\xi \frac{\delta[(x-1)p_3 + q_3] p_0 (2p_0 - q_0 - q_3)}{q_3 [q_0^2 - q_3^2 - q_\perp^2 - 2\xi p_0 (q_0 - q_3) + (\xi - 1)m_g^2 + i\epsilon]^2}
\end{aligned}$$

求出 q_0 的两个极点并取下极点求留数：

$$\begin{aligned}
q_0 &= \xi p_0 \pm \sqrt{p_0^2 (\xi + x - 1)^2 + q_\perp^2 - (\xi - 1)m_g^2 - i\epsilon} \\
Res(q_{0+}) &= \frac{p_0 (x - \xi + 1)}{4(x-1)[q_\perp^2 + p_0^2 (\xi + x - 1)^2 - (\xi - 1)m_g^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

将留数结果代回原式得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= (-2i\pi)(-ig_s^2 C_F) \int_0^1 d\xi \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \frac{p_0 (x - \xi + 1)}{4(x-1)[q_\perp^2 + p_0^2 (\xi + x - 1)^2 - (\xi - 1)m_g^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \frac{1}{4(x-1)} \int_0^1 d\xi \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} [p_0^2 (\xi + x - 1)^2 - (\xi - 1)m_g^2]^{-\frac{1}{2}} p_0 [x - \xi + 1] \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \frac{1}{(x-1)} \int_0^1 d\xi [p_0^2 (\xi + x - 1)^2 - (\xi - 1)m_g^2]^{-\frac{1}{2}} p_0 [x - \xi + 1] \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \frac{1}{1-x} \begin{cases} [2x \ln \frac{x}{x-1} - 1] & x > 1 \\ [2x \ln \frac{4(1-x)p_0^2}{m_g^2} - 2x + 1] & 0 < x < 1 \\ [-2x \ln \frac{x}{x-1} + 1] & x < 0 \end{cases} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

图 d 结果为展开初态的 Wilson 和相互作用项：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\not{q}_0}{2} [ig_s \int_0^\infty ds n_3 \cdot A^a(s n_3) T^a] \\
&\quad \times q(0) [ig_s \int d^4 \eta \bar{q}(\eta) A^b(\eta) T^b q(\eta)] | q(p) \rangle \\
&= ig_s^2 C_F \delta(xp^3 - p^3) \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{p} (\not{p} - \not{q}) \not{q}_3 u(p)}{2q_3 (p-q)^2 (q^2 - m_g^2) + i\epsilon} \\
&= ig_s^2 C_F \frac{\delta(x-1)}{p_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_0 [2p_0 - q_0 - q_3]}{q_3 (p-q)^2 (q^2 - m_g^2) + i\epsilon} \\
&= ig_s^2 C_F \frac{\delta(x-1)}{p_3} \int dq_3 \int \frac{dq_0 d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \frac{p_0 [2p_0 - q_0 - q_3]}{q_3 (P-q)^2 (q^2 - m_g^2) + i\epsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ig_s^2 C_F \frac{\delta(x-1)}{1-y} \int_0^1 dy \int \frac{dq_0 d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \frac{[2p_0 - q_0 - q_3]}{(p-q)^2 (q^2 - m_g^2) + i\epsilon} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^\infty dy \frac{\delta(x-1)}{y-1} [2y \ln \frac{y}{y-1} - 1] & y > 1 \\ \int_0^1 dy \frac{\delta(x-1)}{y-1} [2y \ln \frac{4(1-y)p_0^2}{m_g^2} - 2y + 1] & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 dy \frac{\delta(x-1)}{y-1} [-2y \ln \frac{y}{y-1} + 1] & y < 0 \end{cases} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

图 f 将 Wilson 线展开到两阶：

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3 \xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) [-ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^{a1}] \frac{\not{h}_0}{2} \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= -ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 + q^3 - p^3)\xi^3} \int_0^\infty ds_1 e^{-is_1 n_3 q} \int_0^\infty ds_2 e^{is_2 n_3 q} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\
&\quad [\bar{u}(p) n_3^\mu \frac{\not{h}_0}{2} n_{3\mu} \frac{1}{q^2 - m_g^2} u(p)] \\
&= ig_s^2 C_F \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \frac{1}{iq_3 - iq_3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\bar{u}(p) \frac{\not{h}_0}{2} \frac{1}{q^2 - m_g^2} u(p)] \\
&= i \frac{g_s^2 C_F}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[\not{p} \not{h}_0]}{q_3^2 (q^2 - m_g^2)} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= \frac{ig_s^2 C_F}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2} \int dq_3 \frac{p_0}{q_3^2} (-2i\pi) \frac{1}{2\sqrt{q_\perp^2 + q_3^2 + m_g^2}} \delta[q_3 - (p_3 - xp_3)] \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{2\pi} \int \frac{dq_\perp^2}{(2\pi)^2} \frac{p_0}{(1-x)^2 p_0^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(q_\perp^2 + q_3^2 + m_g^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{4\pi} \frac{1}{(1-x)^2 p_0} \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma[-\frac{1}{2}]}{\Gamma[\frac{1}{2}]} [(1-x)^2 p_0^2 + m_g^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \frac{1}{(1-x)^2 p_0} [(1-x)^2 p_0^2 + m_g^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x > 1 \\ \frac{1}{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

图 g 结果为将初态 Wilson 线展开到两阶:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{q/q_0}(x) &= \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{ixp^3\xi^3} \langle q(p) | \bar{q}(\xi) \frac{\not{p}_0}{2} \frac{1}{2} [ig_s \int_0^\infty ds_1 n_3 \cdot A^a(\xi + s_1 n_3) T^a] \\
&\quad \times [ig_s \int_0^\infty ds_2 n_3 \cdot A^b(s_2 n_3) T^b] q(0) | q(p) \rangle \\
&= \frac{-ig_s^2 C_F}{2} \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3)\xi^3} \int_0^\infty ds_1 e^{-is_1 n_3 q} \int_0^\infty ds_2 e^{is_2 n_3 q} \\
&\quad \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p) \not{p}_0 u(p)}{2(q^2 - m_g^2)} \\
&= \frac{-2\pi g_s^2 C_F}{2} \frac{\delta(x-1) p_0}{p_3} \int \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^4} \int dq_3 \frac{1}{2q_3^2 (q_\perp^2 + q_3^2 + m_g^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \frac{\delta(x-1) p_0}{p_3} \int_{-\infty}^\infty dq_3 \frac{\sqrt{q_3^2 + m_g^2}}{q_3^2}
\end{aligned}$$

令 $q_3 = (1-y)p_3$ 代回原式得到:

$$= -\frac{g_s^2 C_F}{16\pi^2} \begin{cases} \int_1^\infty \frac{\delta(x-1)}{1-y} dy & y > 1 \\ \int_0^1 \frac{\delta(x-1)}{y-1} dy & 0 < y < 1 \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y-1} dy & y < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

将所有结果加上自能修正求和, 凑成 Plus 函数形式, 同样在这种正规化下外线在壳, p_0 等于 p_3 , 将结果中的 p_0 改为 p_3 :

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \begin{cases} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{x-1}{x} + 1 \right]_+ & x > 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{m_g^2}{4(1-x)p_3^2} + \frac{3x^2-3x+2}{x-1} \right]_+ & 0 < x < 1 \\ \left[\frac{x^2+1}{1-x} \ln \frac{x-1}{x} - 1 \right]_+ & x < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

3.3 本章小结

本章主要计算了等时关联的准部分子分布函数的结果。首先引入了定义准分布函数涉及的单位矢量, 然后从准分布函数定义式出发, 通过微扰计算得到树图阶及单圈阶的结果, 其中对于单圈层次我们依然选择三种方

案来正规红外发散。

我们可以看到，准分布函数存在着 x 处在 $(0,1)$ 之外的非物理区域而光锥分布却不存在。这是因为，对于光锥分布来说外态粒子在以光速贴着光锥运动，部分子动量分数大于 1 意味着部分子动量大于外态粒子动量，比外态粒子运动的还要快而脱离了外态，那么这就意味着部分子超光速，这是不科学的。对于 x 小于零，说明部分子比外态慢太多而脱离了外态，要使部分子与外态的整体质心运动依然保持贴在光锥上，那么外态的速度就要超过光速，这也是不科学的，所以光锥分布是不存在动量分数处于 $(0,1)$ 之外的非物理区域。对于准分布函数，外态并不是贴在光锥上的类光关联，而是与时间类空的等时关联。对于一个量子系统来说，部分子是有可能短时脱离依附的粒子，超越它或落后于它。不过对于我们下边要计算的匹配系数，我们只考虑准分布函数的在 $(0,1)$ 之间的物理区域。

第四章 微扰散射核

在完成了关于光锥分布及准分布的计算细节后我们将在这最后一章给出主要的结论。依据光锥分布和准分布的结果以及二者之间的匹配关系可以给出最终的匹配系数并对匹配系数作相应讨论，接着，通过对准分布函数作动量积分区域展开，可以看出它与光锥分布更为深层的关系。

4.1 匹配系数

光锥部分子分布函数与准部分子分布函数之间的匹配关系表达式如下：

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x, \mu^2, p_z) = \int_0^1 C\left(\frac{x}{y}, \frac{\mu}{p_z}\right) f_{q/q_0}(y, \mu^2) \frac{dy}{y} + O\left(\frac{M^2}{p_z^2}, \frac{\Lambda^2}{p_z^2}\right) \quad (4.1)$$

上式中的微扰散射核 C 代表准分布与光锥分布之间的微扰匹配系数，在动量 p_z 充分大的情况下略去高阶项，我们将准分布函数、光锥分布函数及匹配系数一一展开到零阶，代入便可得到树图阶的匹配系数：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}^{(0)}(x) &= \int_0^1 C^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) f_{q/q_0}^{(0)}(y) \frac{dy}{y} \\ C^{(0)}(x) &= \delta(x-1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

可见树图阶的匹配系数为一简单的德尔塔函数，紧接着依然从式 4.1 出发，将上述各个量展开到一阶，并代入我们已经得到的相关量，便可得到单圈的匹配系数

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(0)}(x) + \tilde{f}^{(1)}(x) &= \int_0^1 [C^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) + C^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right)] [f^{(0)}(y) + f^{(1)}(y)] \frac{dy}{y} \\ \delta(x-1) + \tilde{f}^{(1)}(x) &= \delta(x-1) + \int_0^1 \delta(x-y) f^{(1)}(y) dy + C^{(1)}(x) \end{aligned}$$

于是可以得到：

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(1)}(x) &= f^{(1)}(x) + C^{(1)}(x) \\ C^{(1)}(x) &= \tilde{f}^{(1)}(x) - f^{(1)}(x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

通过以上计算可以看到，单圈的匹配系数等于准分布函数减去光锥分布函数，在前两章我们通过大量的篇幅计算得到的三种正规化方案下所有的单圈结果，代入即可得单圈的匹配系数。对于维数正规化方案下光锥分布的结果为零，那么准分布函数的单圈结果就是单圈的匹配系数：

$$\begin{aligned} C^{(1)}(x) &= \tilde{f}^{(1)} - f^{(1)} = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{1}{4p_3^2 x(1-x)} \right] + \frac{x(x+1)}{x-1} \right]_+ - 0 \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{1}{4p_3^2 x(1-x)} \right] + \frac{x(x+1)}{x-1} \right]_+ \end{aligned} \quad (4.4)$$

另外两种正规化方案下的匹配系数也呼之欲出，我们分别给出外线离壳方案下的匹配系数：

$$\begin{aligned} C^{(1)}(x) &= \tilde{f}^{(1)} - f^{(1)} = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{\rho}{4} + \frac{2(x^2-x+1)}{x-1} \right]_+ - \\ &\quad \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} - \ln(p^2 x(x-1)) \right] + (x-2) \right]_+ \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{1}{4p_3^2 x(1-x)} \right] + \frac{x(x+1)}{x-1} \right]_+ \end{aligned} \quad (4.5)$$

胶子质量不为零方案下的匹配系数：

$$\begin{aligned} C^{(1)}(x) &= \tilde{f}^{(1)} - f^{(1)} = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \ln \frac{m_g^2}{4(1-x)p_3^2} + \frac{3x^2-3x+2}{x-1} \right]_+ - \\ &\quad \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{1-x} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} - \ln(xm_g^2) \right] - 2(1-x) \right]_+ \\ &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi^2} \left[\frac{x^2+1}{x-1} \left[\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{1}{4p_3^2 x(1-x)} \right] + \frac{x(x+1)}{x-1} \right]_+ \end{aligned} \quad (4.6)$$

通过以上三式可以清楚的看到，单圈匹配系数作为准分布函数减去光锥分布函数后不管什么方案下的红外正规子都被消去，表明单圈的匹配系数是与红外部分无关的，不管选取什么方案来正规红外发散，最终所得的匹配系数都是一致的。而前面提到，以上所有在部分子态下微扰计算最后得到的匹配系数，同样适用于实际上我们想要得到的强子态下的部分子分布函数的匹配。接下来的事情就变得明朗起来，对于强子态下的光锥分布函

数虽然有非微扰的红外结构不可微扰计算且不能放在格点上模拟，但与之相关的强子态下的准分布函数却是可以放在格点中去处理的，我们认为光锥分布函数和准分布函数红外部分相同且二者的匹配系数与红外无关，那么在格点得出强子态下的准分布函数后就可以直接通过匹配关系利用匹配系数得到最终的光锥部分子分布函数，完美解决了之前遇到的所有问题。目前，从物理区域内的格点数据出发确定的核子内部夸克部分子分布函数的结果^[61, 62, 63]，与从实验数据中提取的唯象结果在可接受的误差范围内显示出合理的一致性^[64, 65]，图 4-14^[66] 对比了格点合作组的结果与其他唯象数值拟合合作组的结果。

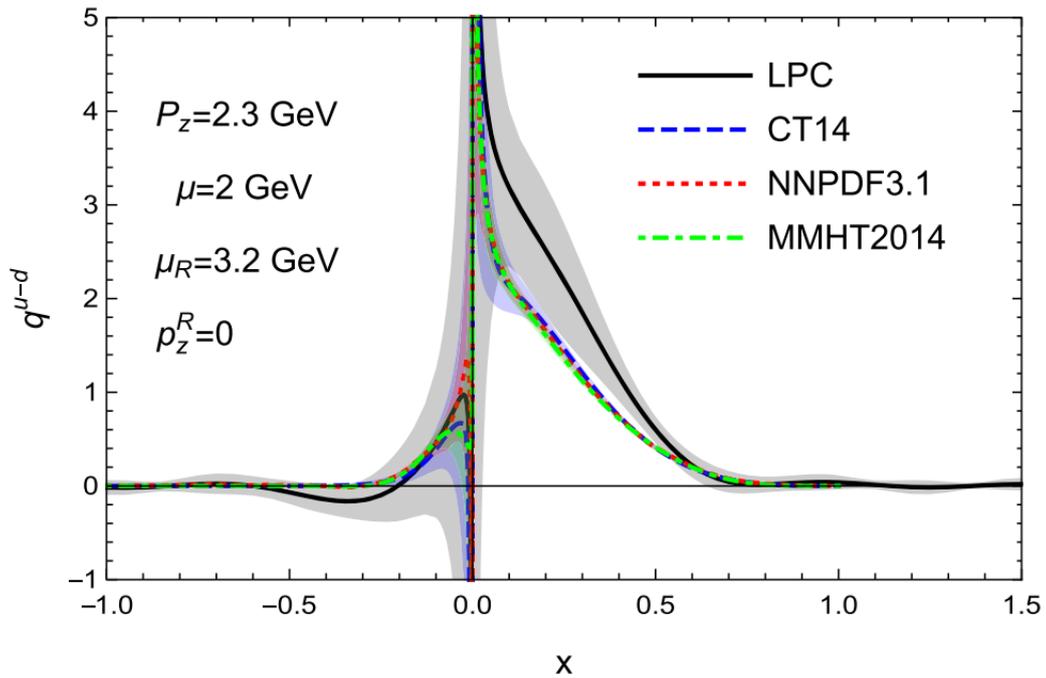


图 4-14 LaMET 理论下 PDF 结果与全局拟合结果比较
PRD 101,034020(2020)

4.2 动量积分区域展开

本节我们将以光锥分布及准部分分布的 Box 图 (图 2-8-a, 图 3-10-a) 为例, 演示对于准分布函数的动量积分区域展开^[67, 68] 并对展开结果讨论。动量积分区域展开是一种将积分动量划分为不同能量区域, 并在每个分割的区域进行幂次展开的积分技巧, 可方便研究积分动量在不同能标下的渐近行为。一般来说, 此技巧需要在维数正规化下进行重整化, 在划分的动量区域内对幂次展开后的被积函数积分, 通过变换, 积分区域仍是原来整个圈动量区域。在各个区域积分完成后将各部分结果相加, 将会得到和区域展开前直接积分同样的结果。这里将第一次看到动量积分区域展开用到准分布函数上的结果, 并将其与光锥的结果进行比较。

在第二章的光锥部分子分布函数中我们介绍过任意四矢量的光锥分量 a^+, a^- 见式 (2.4), 那么时间分量 a^0 和空间第三分量 a^3 可写作:

$$a^0 = \frac{a^+ + a^-}{\sqrt{2}} \quad a^3 = \frac{a^+ - a^-}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

引入幂次展开系数 λ :

$$\lambda^2 \sim \frac{p^2}{Q^2}, \quad p^2 \sim \lambda^2 Q^2 \quad (4.8)$$

此时外线是不在壳的, 离壳程度由 λ 来体现, Q^2 表征 DIS 中的转移动量大小, λ 则为一无量纲的小量。为方便接下来的讨论, 我们将四矢量写作 $a_\mu = (a^+, a^-, a_\perp)$, 对于外线我们在之前讨论中选取的动量方向为 n_- 方向, 那么对于 p 可以写作:

$$p_\mu = (p^+, p^-, p_\perp) \sim (1, \lambda^2, \lambda)Q \quad (4.9)$$

回顾上一章中式 (3.5) 的推导过程中给出了 box 图对圈动量积分前的结果

$$\tilde{f}_{q/q_0}(x) = (D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \frac{1}{2} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{q}_0(\not{p}-\not{q})]}{2[(p-q)^2]^2 q^2} \quad (4.10)$$

对分子 trace 结构化简后得到：

$$\begin{aligned} & \text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{p}_0(\not{p}-\not{q})] \\ &= 4[p \cdot (p-q)(p_0-q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q) + p \cdot (p-q)(p_0-q_0)] \\ &= 4p_0[q_0^2 + q_\perp^2 + q_3^2 - 2q_0q_3] \end{aligned}$$

此时对胶子圈动量的积分区域划分为硬的区域和共线区域，其他区域的贡献较小被压低不予考虑。

$$\text{硬区域： } q_\mu = (q^+, q^-, q_\perp) \sim (1, 1, 1)Q$$

$$\text{共线区域： } q_\mu = (q^+, q^-, q_\perp) \sim (1, \lambda^2, \lambda)Q$$

首先分析硬区域，对于分母

$$\begin{aligned} (p-q)^2 &= p^2 - 2pq + q^2 = \underbrace{p^2}_{\lambda^2} - 2(\underbrace{p^+q^-}_{\lambda^0} + \underbrace{p^-q^+}_{\lambda^2} - \underbrace{p_\perp q_\perp}_{\lambda}) + \underbrace{q^2}_{\lambda^0} \\ (p-q)^2 &\sim p^2 - 2p^+q^- + q^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

如此以来分母化为： $[p^2 - 2p^+q^- + q^2]^2 q^2$ ，我们代入 p^+, q^- 的表达式

$$p^2 + q^2 - 2p^+q^- = p^2 + q^2 - 2 \frac{(p_0 + p_3)}{\sqrt{2}} \frac{(q_0 - q_3)}{\sqrt{2}}$$

上式中我们出现了 p_0 和 p_3 ，若是取二者相等会使其化简很多，二者相等的话则表明外线回到在壳状态，得到

$$p^2 + q^2 - 2p_0(q_0 - q_3) = (p-q)^2$$

对于分子处理方法类似

$$\begin{aligned} \text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{p}_0(\not{p}-\not{q})] &= 4[2p \cdot (p-q)(p_0-q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q)] \\ &= 4[2(p^2 - p^+q^-)(p^0 - q^0) - p^0(p^2 + q^2 - 2p^+q^-)] \end{aligned}$$

同样代入 p^+, q^- ，并取 $p^2 = 0$ 在壳，同时 $p^0 = p^3$ 得到

$$\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{p}_0(\not{p}-\not{q})] = p^0[q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2 - 2q_0q_3]$$

将化简完的分子分母再代回到 (4.10) 式

$$\tilde{f}_{q/q_0}^{hard}(x) = (D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp^3 - p^3 + q^3)\xi^3} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{p^0 [q_0^2 + q_3^2 + q_\perp^2 - 2q_0 q_3]}{[(p-q)^2]^2 q^2} \quad (4.12)$$

通过比较我们发现, 此结果与式 (3.5) 的结果一致, 也就是说在维数正规化方案下对 box 图的准分布在硬区域进行幂次展开将回到外线在壳的结果。在之前微扰计算匹配系数时我们知道, 在维数正规化方案下光锥的结果为零, 单圈的匹配系数就是准分布函数的结果, 也就是说对准分布函数硬区域的展开得到的就是匹配系数, 接下来我们再看另一个区域。

在共线区域中类比硬区域的处理分母为

$$(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 = \underbrace{p^2}_{\lambda^2} - 2(\underbrace{p^+ q^-}_{\lambda^2} + \underbrace{p^- q^+}_{\lambda^2} - \underbrace{p_\perp q_\perp}_{\lambda^2}) + \underbrace{q^2}_{\lambda^2}$$

$$(p-q)^2 \sim (p-q)^2 \quad (4.13)$$

分母所有的展开项都是 λ 的平方项, 将所有项都保留。分子的处理为

$$\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{n}_0(\not{p}-\not{q})] = 4[2p \cdot (p-q)(p_0 - q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q)]$$

其中 $p(p-q) = \underbrace{p^2}_{\lambda^2} - (\underbrace{p^+ q^-}_{\lambda^2} + \underbrace{p^- q^+}_{\lambda^2} - \underbrace{p_\perp q_\perp}_{\lambda^2}) \sim p(p-q)$, 分子化为

$$\text{tr}[\not{p}(\not{p}-\not{q})\not{n}_0(\not{p}-\not{q})] \sim 4[2p \cdot (p-q)(p_0 - q_0) - p_0(p-q) \cdot (p-q)]$$

在分子中代入 p_0 和 q_0 得到

$$4[2p \cdot (p-q) \frac{p^+ + p^- - q^+ - q^-}{\sqrt{2}} - \frac{p^+ + p^-}{\sqrt{2}} (p-q)^2]$$

在这种情况下, p 主要沿着 n_- 方向, p^+ 则远远大于 p^- , 同样的, 对于共线胶子的动量与 p 的动量分布形式保持一致, q^+ 远远大于 q^- , 可化简为

$$4[2p \cdot (p-q) \frac{p^+ + p^- - q^+ - q^-}{\sqrt{2}} - \frac{p^+ + p^-}{\sqrt{2}} (p-q)^2]$$

$$\sim 4[\sqrt{2}p \cdot (p-q)(p^+ - q^+) - \frac{p^+}{\sqrt{2}}(p-q)^2] \quad (4.14)$$

对 (3.5) 式中 e 指数项积分作如下变换

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi^3}{2\pi} e^{i(xp_3 - p_3 + q_3)\xi^3} &= \delta(xp_3 - p_3 + q_3) = \delta(x \frac{p^+ - p^-}{\sqrt{2}} - \frac{p^+ - p^-}{\sqrt{2}} + \frac{q^+ - q^-}{\sqrt{2}}) \\ &\sim \sqrt{2}\delta(xp^+ - p^+ + q^+) \end{aligned} \quad (4.15)$$

将上述所有的化简结果代入我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{q/q_0}^{collinear}(x) &= (D-2)ig_s^2 C_F \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \\ &\frac{[2p \cdot (p-q)(p^+ - q^+) - p^+(p-q)^2]}{[(p-q)^2]^2 q^2} \delta(xp^+ - p^+ + q^+) \end{aligned} \quad (4.16)$$

当我们回首将 (2.10) 式与 (4.16) 式进行比较后发现，对准分布函数的 box 图在共线区域幂次展开得到的结果与光锥分布的结果是一致的。通过上述定量计算的结果比较，我们可以将其定性的写出

$$\tilde{f}_{q/q_0}^{box}(x) = \underbrace{\tilde{f}_{q/q_0}^{hard}(x)}_{\text{匹配系数}} + \underbrace{\tilde{f}_{q/q_0}^{collinear}(x)}_{\text{光锥结果}} + \dots \quad (4.17)$$

这并不是巧合而是包含了更深层的物理内涵。

在大动量有效理论框架下，光锥分布函数可以由准分布函数匹配来的立足点是它们具有相同的红外结构，这意味着非微扰的长程部分是相同的。将准分布按动量积分区域展开，理论上应该出现硬区域，共线区域，软区域，硬区域对应短程可微扰部分，剩下的则为长程的非微扰部分。对于光锥分布，由于在某一方向上动量无限大，这说明辐射的胶子是贴着外线的所以只有共线部分，所以对于它的动量积分区域展开未包含硬的部分，在上述结果中我们才看到对准分布函数的共线区域展开会得到和光锥分布同样的结果。关于上述提到的软的部分事实上对应着有横向动量依赖的部分子分布函数，由于在这里所有的计算都没有考虑横向动量依赖，所以这部分在此不做过多的讨论。至此，二者的差异就体现在了短程的硬区域部分，

对于这个差异的处理就是之前讨论过的匹配，所以我们才在上边看到对准部分子分布函数硬区域的展开刚好对应匹配系数。

上述的这些讨论并没有明确限制是在强子态下还是部分子态下，对于强子态和部分子态的差别在于长程部分，而决定匹配系数的区域在于短程，那么我们则认为匹配系数是通用的。

4.3 本章小结

本章，我们以第一章的讨论为理论基础结合第二章第三章的计算结果，通过匹配公式得到了不同正规化方案下的单圈匹配系数，并看出匹配系数不依赖于红外结构，这也是我们想要看到的结果。同时，通过动量积分区域展开我们看到了光锥分布函数与准分布函数更深一层的联系，看出二者之间的匹配实际上是消除对应于在硬的动量区域短程结构的差异，而在共线区域对应着两者相同的长程结构。

参考目前的结果来看，关于从准部分子分布函数匹配到光锥部分子分布函数的理论得到了巨大的成功。事实上，将夸克准部分子分布函数的理念推广到更大的范围研究更多的准物理量也已得到较大的发展，例如：夸克的准分布振幅 (quasi-DA)^[69, 70, 71, 72]，夸克的准广义部分子分布 (quasi-GPD)^[73, 74, 75] 以及准横向动量分布 (quasi-TMD)^[76, 77, 78]，重夸克偶素准分布振幅^[79] 和胶子的准部分子分布^[80, 81, 82] 等。除了在这些准物理量上的研究进展外，目前在大动量有效理论框架下也已经得到了许多从格点计算出发抽取的最终物理量，比如强子的部分子分布函数^[83, 84, 85]，介子的光锥分布振幅 (LCDA)^[69, 86] 以及广义部分子分布^[87] 和胶子的部分子分布函数^[88]。大动量有效理论自提出以来经过多年的发展与完善，目前已是一个较为成熟的理论，解决了众多过去难以解决的问题。在本文中涉及的只是冰山一角，关于这套理论仍存在着大量的领域等待着我们去学习，开发与探索。

第五章 总结展望

行文至此，我们首先介绍了标准模型的主要发展和内容，随后较为详细的进入量子色动力学的讨论，由于量子色动力学的特殊性质而引入了描述核子内部动力学结构的部分子分布函数以及在大动量有效理论下对部分子分布函数的研究。大动量有效理论表明可以从定义在有限动量坐标系中，仅包含对欧氏时空的空间分量依赖的准部分子分布函数入手而得到实际的光锥部分子分布函数。由于准部分子分布函数不包含时间依赖是等时关联的，所以可以在格点上模拟计算，得到准分布函数后在大动量情况下就能匹配到光锥分布，所以关键点就在于匹配系数的获得。我们在第二章第三章通过微扰论计算了在部分子态下的光锥分布函数及准分布函数，选取部分子态的原因是强子外态无法进行微扰计算，部分子态下可微扰的红外结构由三种不同的正规化方案来正规。随后，通过匹配公式及微扰计算的结果，我们得到了树图阶及单圈层次下的匹配系数，发现匹配系数与红外部分无关，验证了不用考虑红外部分从准分布函数直接匹配到光锥分布函数的可行性。最后，我们通过动量积分区域展开，看到了准分布函数与光锥分布函数更深一步的关系，进一步体会到大动量有效理论深刻的物理内涵。

部分子概念提出以来，得益于世界各地实验的合作发展以及更多的描述核子多维结构物理量的提出与理论研究，使得我们对核子的内部结构有了更多且更精细的认识。不拘泥于传统的全局拟合的方法得到部分子分布函数，人们希望直接从理论出发计算得到部分子分布函数。在格点 QCD 中由于受限于模拟闵氏时空的时间依赖动力学以及高阶矩的计算困难，使得从格点出发直接计算部分子分布函数发展缓慢。然而，这种情况在大动量有效理论提出以来发生变化，它提供了一套系统化的改进方法使得可以从第一性原理出发计算部分子分布函数。部分子分布函数作为描述核子内部动力学结构的重要物理量现如今已是大型强子对撞机上唯象学不可分割的一个部分，同时，作为一座连接精确实验测量和精确理论计算的重要桥梁，部分子分布函数在标准模型精确检验与新物理探索中的角色同样不可替代^[89, 90, 91]。

标准模型作为粒子物理较为完整的理论，自提出很长时间以来，接受了众多的检验和发展，可以说是上世纪后半叶最重要的物理成果，也是众

多物理学家智慧的结晶。标准模型作为当下最成功的粒子物理理论可以描述目前人类发现的所有六十一一种基本粒子，但这并不代表它是完善的终极理论，后来看到的种种不合理的现象似乎在暗示着标准模型背后还有更基本的新物理没有找到，其中面临的问题包括中微子质量问题以及无法解释的可能存在的暗物质，暗能量现象等，另一方面，苏联物理学家伽莫夫将粒子物理和宇宙学弗里德曼模型相结合提出了宇宙的大爆炸模型，关于此模型中正反物质数量不对称，宇宙奇点等疑难同样也为粒子物理留下了待探索的方向。此外，我们知道自然界包含四种基本的相互作用而标准模型只包含了三个，引力则是由广义相对论来描述的，将引力纳入其中或是与广义相对论结合为一个更基本的理论都是粒子标准模型继续发展的动力。总之，虽然目前已经取得了阶段性的较大成功但是对于粒子物理世界我们才刚刚迈过大门，几十万年前人类的祖先依靠刻在基因中的好奇心和探索的勇气走出了非洲遍布了世界发展出璀璨的文明，现在更多的未知和挑战摆在面前，我们依然会迈出充满一切可能的一步，路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

参 考 文 献

- [1] M. Gell-Mann, A schematic model of baryons and mesons[J/OL]. Physics Letters. 1964,8(3):214 –215
- [2] G. Zweig, An SU3 model for strong interaction symmetry and its breaking[R]. Version 1. Technical Report CERN-TH-401, CERN, Geneva, Jan 1964.
- [3] G. Zweig, An SU3 model for strong interaction symmetry and its breaking[R]. Version 2. Technical Report CERN-TH-412, Feb 1964.
- [4] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry[J/OL]. Phys.Rev.D, 1970, 2:1285–1292.
- [5] J. J. Aubert, et al. Experimental Observation of a Heavy Particle J[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1974, 33:1404-1406.
- [6] J. E. Augustin, et al. Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1974, 33:1406-1408.
- [7] S. W. Herb et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5-GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1977, 39:252-255.
- [8] F. Abe et al. Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1995, 74:2626-2631.
- [9] S. Abachi et al. Search for high mass top quark production in $\bar{p}p$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8TeV$ [J/OL] . Phys. Rev. Lett. 1995, 74:2422-2426.
- [10] D. J. Gross and F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1973, 30, 1343-1346.
- [11] H. D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1973, 30, 1346-1349.

- [12] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics[J/OL]. Phys. Rev.D, 2018, 98(3):030001.
- [13] E. D. Bloom, D. H. Coward, H. DeStaebler, J. Drees, G. Miller, L. W. Mo, R. E. Taylor, M. Breidenbach, J. I. Friedman, G. C. Hartmann, and H. W. Kendall, High-energy inelastic $e-P$ scattering at 6° and 10° [J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1969, 23, 930 - 934 .
- [14] M. Breidenbach et al. Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering[J/OL]. Phys. Rev. Lett. 1969, 23, 935 - 939.
- [15] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Inelastic Electron-Proton and $\bar{\nu}$ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon[J/OL]. Phys. Rev., 1969, 185, 1975.
- [16] R. P. Feynman, Conf. Proc. C 690905, 237 (1969)
- [17] A. Bodek et al. Experimental studies of the neutron and proton electromagnetic structure functions[J/OL]. Phys. Rev., 1979, D20, 1471–1552.
- [18] J.C. Collins, D.E. Soper, The theorems of perturbative QCD[J/OL]. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1987, 37,383–409.
- [19] J.C. Collins, D.E. Soper, G.F. Sterman, Factorization of hard processes in QCD. arxiv:hep-ph/0409313
- [20] Yu. L. Dokshitser, Calculation of structure functions of deep-inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics[J/OL]. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1977, 46(4):641.
- [21] V. N. Gribov and L.N. Lipatov, Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory. Sov[J/OL]. J. Nucl. Phys., 1972, 15:438-450.
- [22] G. Altarelli and G. Parisi, Asymptotic freedom in parton language[J/OL]. Nuclear Physics B, 1977, 126(2):298-318.

- [23] J. Pumplin, et al. new generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis[J/OL]. *J. High Energy Phys.*,2002, 07, 012.
- [24] Tie-Jiun Hou, Jun Gao, T. J. Hobbs et al. New CTEQ global analysis of quantum chromodynamics with high-precision data from the LHC[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2021, 103,014013.
- [25] E. R. Nocera et al. A first unbiased global determination of polarized PDFs and their uncertainties[J/OL]. *Nucl. Phys. B*, 2014, 887, 276-308.
- [26] D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann and W. Vogelsang, Evidence for Polarization of Gluons in the Proton[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, 113, 012001.
- [27] R.D. Ball, et al. NNPDF Collaboration, Parton distributions for the LHC Run II[J/OL]. *J. High Energy Phys.*,2015, 04, 040.
- [28] S. Dulat, T.-J. Hou, J. Gao, M. Guzzi, J. Huston, P. Nadolsky, J. Pumplin, C. Schmidt, D. Stump, C.P. Yuan, New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2016, 93(3) 033006.
- [29] L.A. Harland-Lang, A.D. Martin, P. Motylinski, R.S. Thorne, Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs[J/OL]. *Eur. Phys. J.*, 2015, C75(5) 204.
- [30] Kenneth G. Wilson, Confinement of Quarks[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 1974, 10, 2445-2459.
- [31] J. W. Negele, Understanding parton distributions from lattice QCD: present limitations and future promise[J/OL]. *Nucl. Phys. A*, 2002, 711, 281-290.
- [32] P. Hagler, et al. [LHPC Collaboration]. Nucleon generalized parton distributions from full lattice QCD[J/OL]. *Phys. Rev.* 2008, D 77, 094502.

- [33] Z. Davoudi and M. J. Savage, Restoration of rotational symmetry in the continuum limit of lattice field theories[J/OL]. Phys. Rev. D, 2012, 86, 054505.
- [34] Xiangdong Ji, Parton Physics on a Euclidean Lattice[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2013, 110, 262002.
- [35] Huey-Wen Lin, Jiunn-Wei Chen, Saul D. Cohen, and Xiangdong Ji, Flavor Structure of the Nucleon Sea from Lattice QCD[J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 91, 054510.
- [36] Constantia Alexandrou, Krzysztof Cichy, Vincent Drach, Elena Garcia-Ramos, Kyriakos Hadjiyiannakou, Karl Jansen, Fernanda Steffens, and Christian Wiese, Lattice calculation of parton distributions[J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 92, 014502.
- [37] Jiunn-Wei Chen, Saul D. Cohen, Xiangdong Ji, Huey-Wen Lin, Jian-Hui Zhang, Nucleon Helicity and Transversity Parton Distributions from Lattice QCD[J/OL]. Nucl.Phys.B, 2016, 911, 246-273.
- [38] Constantia Alexandrou, Krzysztof Cichy, Martha Constantinou, Kyriakos Hadjiyiannakou, Karl Jansen, Fernanda Steffens, and Christian Wiese, Updated Lattice Results for Parton Distributions[J/OL]. Phys. Rev.D, 2017, 96, 014513.
- [39] Jian-Hui Zhang, Jiunn-Wei Chen, Xiangdong Ji, Luchang Jin, and Huey-Wen Lin, Pion Distribution Amplitude from Lattice QCD[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95, 094514.
- [40] Y. Q. Ma and J. W. Qiu, Extracting parton distribution functions from lattice QCD calculations[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 98, 074021.
- [41] T. Izubuchi, X. Ji, L. Jin, I. W. Stewart and Y. Zhao, Factorization theorem relating Euclidean and light-cone parton distributions[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 98, 056004.

- [42] H.-W. Lin et al. Parton distributions and lattice QCD calculations: A community white paper[J/OL]. Prog. Part. Nucl. Phys.,2018, 100, 107-160.
- [43] X. Ji, A. Schäfer, X. Xiong, and J.-H. Zhang, One-loop matching for generalized parton distributions[J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 92, 014039.
- [44] F. Lenz, M. Thies, K. Yazaki, and S. Levit, Hamiltonian formulation of two-dimensional gauge theories on the light cone[J/OL]. Annals Phys.,1991, 208, 1-89.
- [45] John Collins, Foundations of perturbative QCD[M]. UK,Cambridge:Cambridge University Press. 2011: 1-624.
- [46] Jian-Hua Gao, Derivation of the Gauge Link in Light Cone Gauge[J/OL]. Phys. Rev.D, 2010, 82,014018.
- [47] Wei Wang, Jian-Hui Zhang, Shuai Zhao, and Ruilin Zhu, Complete matching for quasidistribution functions in large momentum effective theory[J/OL]. Phys. Rev. D,2019, 100, 074509.
- [48] J. H. Zhang, X. Ji, A. Schfer, W. Wang, and S.Zhao, Accessing Gluon Parton Distributions in Large Momentum Effective Theory[J/OL]. Phys. Rev. Lett.,2019, 122, 142001.
- [49] G.'tHooft, Renormalization of massless Yang-Mills fields[J/OL]. Nucl. Phys. B,1971,33,173-199.
- [50] G.'t Hooft and M. Veltman, Combinatorics of Gauge Fields[J/OL]. Nucl. Phys. B,1972,50,318-353.
- [51] 肖振军, 吕才典, 粒子物理学导论 [M]. 北京: 科学出版社. 2016: 397-398.
- [52] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An introduction to quantum field theory[M]. 上海: 世界图书出版社. 2020: 133-135.

- [53] 黄涛, 王伟等, 量子色动力学专题 [M]. 北京: 科学出版社. 2018: 30-33.
- [54] Constantia Alexandrou, Krzysztof Cichy, Martha Constantinou, Kyriakos Hadjiyiannakou, Karl Jansen, Haralambos Panagopoulos and Fernanda Steffens, A complete non-perturbative renormalization prescription for quasi-PDFs[J/OL]. Nucl. Phys.B, 2017, 923, 394-415.
- [55] Jiunn-Wei Chen, Tomomi Ishikawa, Luchang Jin, Huey-Wen Lin, Yi-Bo Yang, Jian-Hui Zhang, and Yong Zhao (Lattice Parton Physics Project (LP3)), Parton distribution function with nonperturbative renormalization from lattice QCD[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 97,014505.
- [56] Jeremy Green, Karl Jansen, and Fernanda Steffens, Nonperturbative Renormalization of Nonlocal Quark Bilinears for Parton Quasidistribution Functions on the Lattice Using an Auxiliary Field[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121,022004.
- [57] Huey-Wen Lin, Jiunn-Wei Chen, Tomomi Ishikawa, and Jian-Hui Zhang (LP3 Collaboration), Improved parton distribution functions at the physical pion mass[J/OL]. Phys. Rev. D, 2018, 98,054504.
- [58] Martha Constantinou and Haralambos Panagopoulos, Perturbative renormalization of quasi parton distribution functions[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 96,054506.
- [59] J.-W. Chen, Tomomi Ishikawa, L. Jin, H.-W. Lin, Y.- B. Yang, J.-H. Zhang and Y. Zhao. Symmetry properties of nonlocal quark bilinear operators on a lattice[J/OL]. Chinese Physics C.2019,43,103101.
- [60] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An introduction to quantum field theory[M]. 上海: 世界图书出版社. 2020: 189-191.
- [61] C. Alexandrou, K. Cichy, M. Constantinou, K. Jansen, A. Scapellato, and F. Steffens, Light-Cone Parton Distribution Functions from Lattice QCD[J/OL]. Phys. Rev. Lett.,2018 121, 112001.

- [62] J.-W. Chen, L. Jin, H.-W. Lin, Y.-S. Liu, Y.-B. Yang, J.-H. Zhang, and Y. Zhao, Lattice Calculation of Parton Distribution Function from LaMET at Physical Pion Mass with Large Nucleon Momentum[J/OL]. arXiv:1803.04393.
- [63] H.-W. Lin, J.-W. Chen, X. Ji, L. Jin, R. Li, Y.-S. Liu, Y.-B. Yang, J.-H. Zhang, and Y. Zhao, Proton Isovector Helicity Distribution on the Lattice at Physical Pion Mass[J/OL]. Phys. Rev. Lett.,2018, 121, 242003.
- [64] R. D. Ball et al. (NNPDF Collaboration), Parton distributions from high-precision collider data[J/OL]. Eur. Phys. J. C,2017, 77,663.
- [65] J. J. Ethier, N. Sato, and W. Melnitchouk, First Simultaneous Extraction of Spin-Dependent Parton Distributions and Fragmentation Functions from a Global QCD Analysis[J/OL]. Phys. Rev. Lett.,2017,119, 132001.
- [66] Yu-Sheng Liu, Jiunn-Wei Chen, Yi-Kai Huo, Luchang Jin, Maximilian Schlemmer, Andreas Schäfer, Peng Sun, Wei Wang, Yi-Bo Yang, Jian-Hui Zhang, Qi-An Zhang, Kuan Zhang, and Yong Zhao (Lattice Parton Collaboration), Unpolarized isovector quark distribution function from lattice QCD: A systematic analysis of renormalization and matching[J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 102, 034020.
- [67] M. Beneke, V. A. Smirnov, Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold[J/OL]. Nucl.Phys.B,1998, 552,321-344.
- [68] Smirnov V A. Expansion by Regions: An Overview. Springer Tracts Mod. Phys., 2002,177,1
- [69] J.-H. Zhang, J.-W. Chen, X. Ji, L. Jin and H.-W. Lin, Pion distribution amplitude from lattice QCD[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95, 094514.
- [70] G. S. Bali, V. M. Braun, B. Gläßle, M. Göckeler, M. Gruber, F. Hutzler, P. Korcyl, B. Lang, A. Schäfer, P. Wein and J. Zhang, Pion distribution

- amplitude from Euclidean correlation functions[J/OL]. *Eur. Phys. J. C*, 2018, 78, 217.
- [71] Ji Xu, Qi-An Zhang, and Shuai Zhao, Light-cone distribution amplitudes of vector meson in a large momentum effective theory[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2018, 97, 114026.
- [72] Yu-Sheng Liu, Wei Wang, Ji Xu, Qi-An Zhang, Shuai Zhao, and Yong Zhao, Matching the meson quasidistribution amplitude in the RI/MOM scheme[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 99, 094036.
- [73] X. Ji, A. Schäfer, X. Xiong and J.-H. Zhang, One-loop matching for generalized parton distributions[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2015, 92, 014039.
- [74] X. Xiong and J. H. Zhang, One-loop matching for transversity generalized parton distribution[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2015, 92, 054037.
- [75] Yu-Sheng Liu, Wei Wang, Ji Xu, Qi-An Zhang, Jian-Hui Zhang, Shuai Zhao, and Yong Zhao, Matching generalized parton quasidistributions in the RI/MOM scheme[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 100, 034006.
- [76] X. Ji, P. Sun, X. Xiong and F. Yuan, Soft factor subtraction and transverse momentum dependent parton distributions on the lattice[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2015, 91, 074009.
- [77] X. Ji, L. C. Jin, F. Yuan, J. H. Zhang and Y. Zhao, Transverse momentum dependent parton quasidistributions. *Phys[J/OL]. Rev. D*, 2019, 99, 114006.
- [78] M. A. Ebert, I. W. Stewart and Y. Zhao, Determining the nonperturbative Collins-Soper kernel from lattice QCD[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 99, 034505.
- [79] Y. Jia and X. Xiong, Quasidistribution amplitude of heavy quarkonia[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2016, 94, 094005.

- [80] W. Wang, S. Zhao and R. Zhu, Gluon quasidistribution function at one loop[J/OL]. *Eur. Phys. J. C*,2018, 78, 147.
- [81] W. Wang and S. Zhao, On the power divergence in quasi gluon distribution function[J/OL]. *JHEP*,2018, 1805, 142.
- [82] J.-H. Zhang, X. Ji, A. Schäfer, W. Wang and S. Zhao, Accessing Gluon Parton Distributions in Large Momentum Effective Theory[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*,2019, 122, 142001.
- [83] Y. Chai, et al. Parton distribution functions of Δ^+ on the lattice[J/OL]. arXiv:2002.12044.
- [84] J.-H. Zhang, J.-W. Chen, L. Jin, H.-W. Lin, A. Schäfer and Y. Zhao, First direct lattice-QCD calculation of the x-dependence of the pion parton distribution function[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 100, 034505.
- [85] T. Izubuchi, L. Jin, C. Kallidonis, N. Karthik, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Shugert and S. Syritsyn, Valence parton distribution function of pion from fine lattice[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 100, 034516.
- [86] J.-H. Zhang et al. [LP3 Collaboration]. Kaon Distribution Amplitude from Lattice QCD and the Flavor SU(3) Symmetry[J/OL]. *Nucl. Phys. B*, 2019, 939, 429.
- [87] J.-W. Chen, H.-W. Lin and J.-H. Zhang, Pion generalized parton distribution from lattice QCD[J/OL]. arXiv:1904.12376
- [88] Z.-Y. Fan, Y.-B. Yang, A. Anthony, H.-W. Lin and K.-F. Liu, Gluon Quasi-Parton-Distribution Functions from Lattice QCD[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*,2018, 121, 242001.
- [89] W. Beenakker, C. Borschensky, M. Krmer, A. Kulesza, E. Laenen, S. Marzani, J. Rojo, NLO+NLL squark and gluino production cross-sections with threshold-improved parton distributions[J/OL]. *Eur. Phys. J. C*, 2016, 76 (2), 53.

-
- [90] D. Becciolini, M. Gillioz, M. Nardecchia, F. Sannino, M. Spannowsky, Constraining new colored matter from the ratio of 3 to 2 jets cross sections at the LHC[J/OL]. Phys. Rev. D, 2015, 91 (1) 015010.
- [91] S. Dimopoulos, S. Raby, F. Wilczek, Supersymmetry and the scale of unification[J/OL]. Phys. Rev. D, 1981, 24,1681–1683.

符号与标记 (附录 1)

攻读学位期间学术论文和科研成果目录

致 谢

光阴似箭，岁月如梭，转眼间，三年的研究生生涯即将画上句号。这个句号虽不满，但还算圆，回首往昔，奋斗与辛劳都已尘埃落定，欢笑与泪水都已成为深刻的回忆。上海交通大学以优良的学风，严谨的科研氛围带我求学，以充满人文主义的博大胸怀，浪漫充实的校园生活育我成人。在此，我谨向三年间所有关心，爱护，帮助我的人致以最真挚的感谢。

虽不知最后生命的长短，但基本也快要走过三分之一，在这段成长的人生道路上离不开父母和家人的支持帮助与陪伴，感谢他们的付出与操劳，这份恩情将永记在心。三年前，当我带着懵懂与憧憬进入校园，是高俊老师接纳了我并成为我的硕士生导师，高俊老师平易近人，渊博的知识，严谨的治学态度对我产生深深的影响，在此诚挚的感谢高俊老师在我的求学阶段对我的关心，指导与照顾。感谢同组师兄高梅森，孙传乐，刘殿宇，师姐胡雅璐在我的研究生生涯中的陪伴照顾和帮助，向我传授的经验和讨论对我产生了深远的积极影响。感谢曾在 601 研究生办公室的同学伙伴们在生活和工作上给予我的帮助和支持，他们分别是曹政，孙进，师姐胡雅璐，于伯梁，寿嵘，林沫琼，马畅，师兄刘殿宇，李帆，王斯沛，宗瑶瑶，黄旭润，邢志鹏，同门龙鸿建，尹鑫，李尧，祝你们学业有成，一帆风顺，仕途光明。

2021 年，出于学业工作的变动，我结识了王伟老师组里一群可爱的人，他们于我而言亦师亦友又似家人般亲近。在他们之中我经常称呼为曾老师的曾军博士后对我的帮助与提携尤为重要，当我刚来到王老师组时对一切都不熟悉是曾老师不厌其烦的带领我一步一步推导，打牢基础知识，夯实理论框架，把我一步一步带上路，在后来的科研工作中每每遇到问题曾老师都会带领我一同探索，解决问题，不放过任何一个细节，并保证让我理解与消化。他的专业功底与科研上严谨努力的态度对我产生了不可言说的影响。王老师组里的另外两位博士后黄飞和刘航，她们积极乐观，温柔和气，我虽在工作上与她们交集不多但经常看到她们伏案钻研，勤奋认真。在生活与学习上，黄老师和刘老师像两个大姐姐会给其他人提供力所能及的帮助和建议。在此，我还要感谢曾经在王老师组的华俊和张其安博士后给予我的帮助，尤其是张其安在我遇到不可解决的问题时，他总会毫无保留的

与我讨论将我的问题解答明白，工作之余与我闹笑添加生活乐趣，虽与他相处时间较短，但在生活和学业上却依然给了我较大的帮助和支持。感谢与我同级的邓志福和楚旻寰，他们平等客观的与我交流讨论，而且在我请教他们时和气的向我讲解传授经验让我学到了不少重要的内容。在此期间，苏雨山同学对我产生了较为深远的影响和激励，他专业知识渊博扎实，思维敏捷深刻，对待科研工作目标明确，态度端正，积极热情，对身边的人友好礼貌，平易近人，我十分感谢他对我的帮助给我带来的启发，只可惜与他的相处时间只有短短两个月，但也是一段深刻的回忆。何晋琛同学作为与我相处较久的伙伴对我的学业和生活带来的积极影响不可磨灭，他敏捷大胆的思维方式和较为扎实的专业基础值得我认真学习，学业上在我碰到问题时与我共同讨论，在计算机方面不厌其烦的给我提供帮助，教我学习 Python。生活中经常和我一起聊天娱乐，使我的研究生生涯更加丰富完整。最后，还有已经毕业的徐吉师兄，虽未面对面与师兄讨论过但每次我的问题师兄总是会在网络上给我耐心解答，而且师兄为人和善，平易近人让我感受到了师兄带来的温暖和支持感。

在这里我以最真挚最热烈的情感感谢王伟老师，谢谢您对我的无私奉献，对我的帮助，指导和教诲，带我走出了泥潭，走上了一条不同的路。我钦佩您知识面的深度和广度，科研面的高度和硬度，教学面的细度和气度。在日常科研生活中王老师在保持威严的同时又不会带来距离感，营造了组内和谐，平等又充满活力的科研氛围。在我最为迷茫挣扎失落的时期，是王老师接纳了我，让我一步步重拾信心，在我的人生的路口打下了一块重要的指路牌，是我人生中难得一遇的贵人。

最后，感谢我的女朋友王佳琦在我研究生生涯生活学业中对我无微不至的照顾，帮助与理解，你的支持是我坚持走下去的巨大动力。三年，疫情几乎重叠了所有的时间线，但疫情并没有阻断身边的人向我投来的光和热，风风雨雨一路一路走来，或许我曾让你们感到失望与无奈但你们从未将我放弃，感恩现在还在身边的人，天高路远，我会继续带着你们的期待和祝福再出发。