

申请上海交通大学博士学位论文

夸克物质与夸克星的唯象模型研究



上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

论文作者 初鹏程

学 号 0090729002

指导教师 陈列文 教授

专 业 理论物理

答辩日期 2014年9月

A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for the
Degree of Doctor

Phenomenological model studies on quark matter and quark stars



Candidate: PENG-CHENG CHU

Supervisor: Prof. LIE-WEN CHEN

Major: Theoretical physics

DEPARTMENT OF PHYSICS AND ASTRONOMY
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
SHANGHAI, P.R.CHINA

September, 2014

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明: 所提交的学位论文, 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者签名: _____

日期: _____年 ____月 ____日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留,使用学位论文的规定,同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅.本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索,可以采用影印,缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

保 密 , 在 _____ 年解密后适用本授权书.

本学位论文属于

不保密 .

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名: _____

指导教师签名: _____

日 期: _____年 ____月 ____日

日 期: _____年 ____月 ____日

夸克物质与夸克星的唯象模型研究

摘 要

在这篇论文里，我们利用几种夸克物质唯象模型研究了奇异夸克物质，夸克物质的对称能以及夸克星。本论文包括如下几个部分，分别是基于密度相关有效质量夸克模型有磁场和无磁场情况下的夸克物质对称能和夸克星的研究，基于理查德森禁闭势能的禁闭夸克模型的研究，以及考虑了矢量相互作用以及磁化胶子的强磁场下SU(3)NJL模型的研究。

有限密度以及有限化学势的奇异夸克物质的性质是无法用微扰QCD以及格点QCD进行研究的，于是人们提出唯象模型来处理相应的问题。首先我们把密度相关有效质量夸克模型（confined-density-dependent-mass(CDDM)）进行推广，把同位旋依赖性加入到了夸克的有效质量里面，提出了同位旋质量密度相关模型（confined-isospin-density-dependent-mass(CIDDM)）。利用这个模型，我们研究了夸克物质的对称能，并且基于弱相互作用 β 稳定条件 (β -equilibrium)，给出了夸克物质的稳定性条件和夸克星的性质，比如质量半径关系等等。我们发现，如果在夸克的有效质量里面考虑同位旋相关性这个因素，夸克物质的对称能，以及夸克星的性质会随之发生较大的改变。最近实验探测的大质量脉冲星PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432 的发现提供了两个接近两倍太阳质量的大质量致密星体。如此大质量的致密星体，以夸克星的观点来看，很难以普通的质量密度相关模型来给出，这是因为传统的质量密度相关模型所对应的夸克物质的物态方程比较“软”（这里“软”是指物态方程的斜率比较小），很难提供足够大的压强来抵消引力，所以不能描述两倍太阳质量的夸克星。而在同位旋质量密度相关模型下，



夸克星可以达到两倍太阳质量。在计算结果中给出两味的 $u-d$ 夸克物质的对称能在至少达到自由夸克费米气体或者传统的 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型的两倍时, 就可以描述出大质量脉冲星 PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432。

之后在基于理查德森禁闭势能的禁闭夸克模型的研究中, 我们扩展了加入理查德森势能的禁闭夸克模型, 组分夸克质量被假定为粒子数密度相关并考虑了同位旋相关性。在这个扩展的同位旋密度相关的禁闭夸克模型里, 我们研究了奇异夸克物质和夸克星的性质。我们发现在组分夸克质量里面考虑了同位旋相关性可以很大程度地影响夸克物质的对称能、奇异夸克物质的稳定性以及夸克星的质量半径关系。

关于致密星体有一个重要的论题就是致密星体里可能含有强磁场。为了简化计算磁星问题的复杂性, 我们利用之前讨论的同位旋质量密度相关模型 (CIDDM) 研究了强磁场下的奇异夸克物质和夸克星的一些性质。我们自洽地给出了常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程, 结果表明垂直于磁场方向上的压强高于平行于磁场方向的压强。我们引入了一个密度相关的磁场强度来模拟静态球对称的夸克星的性质, 其中假定了磁场方向取向的两种极端情况: 一种是星体内局域磁场的方向和星体半径方向同向, 另一种是磁场方向在与径向垂直的平面上随机分布。我们的结果指出, 考虑了沿径向 (垂直方向) 的磁场可以很大程度上地减小 (增加) 夸克星的最大质量, 于是我们得到结论: 磁化的夸克星的性质不仅仅依赖于分布于星体内部的磁场的强度而且还依赖于星体内磁场的方向。

最后在考虑了矢量相互作用以及磁化胶子的强磁场下 $SU(3)$ NJL 模型的研究中我们利用人们更加广泛使用的 NJL 模型讨论磁星的性质。我们研究了矢量-同位旋标量和矢量-同位旋矢量相互作用的效应对于奇异夸克物质的物态方程的影响。我们发现奇异夸克物质的物态方程对矢量-同位旋矢量道的效应不敏感, 而矢量-同位旋标量相互作用会使得冷密夸克物质的物态方程变硬。由于磁场的加入, 我们也考虑了压强的各向异性,



而且在工作中首次提出了磁化胶子对压强有贡献。最后通过密度相关磁场给出了夸克星内的磁场分布，并且在综合考虑磁场、矢量-同位旋标量效应以及磁化胶子的贡献之后，我们给出了能描述两倍太阳质量夸克星的参数取值空间。

关 键 词: 物态方程，唯象模型，夸克物质对称能，夸克星，磁星，压强各向异性，组分夸克质量，禁闭势能。

PHENOMENOLOGICAL MODEL STUDIES ON QUARK MATTER AND QUARK STARS

ABSTRACT

In this thesis, we have investigated the properties of strange quark matter (SQM), quark symmetry energy and quark star within several phenomenological models. The thesis is composed of four parts and includes the results of quark matter and quark stars from density-dependent-mass models with/without considering strong magnetic field, a confining quark model with Richardson potential and SU(3) Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model with vector interaction under strong magnetic field.

Since it is difficult to calculate the properties by using PQCD and Lattice QCD for strange quark matter with finite baryon density and zero temperature, phenomenological models are proposed to solve this problem. We extend the confined-density-dependent-mass (CDDM) model in Chapter 2 to include isospin dependence of the equivalent quark mass. Within the confined-isospin-density-dependent-mass (CIDDM) model, we study the quark matter symmetry energy, the stability of strange quark matter, and the properties of quark stars. We find that including isospin dependence of the equivalent quark mass can significantly influence the quark matter symmetry energy as well as the properties of strange quark matter and quark stars. While the recently discovered large mass pulsars PSR J1614.2230 and PSR J0348+0432 with masses around $2M_{\odot}$ cannot be quark stars within the CDDM model, they can be well described by quark



stars in the CIDDMM model. In particular, our results indicate that the two-flavor $u - d$ quark matter symmetry energy should be at least about twice that of a free quark gas or normal quark matter within the conventional Nambu - Jona-Lasinio model in order to describe PSR J1614.2230 and PSR J0348+0432 as quark stars.

In Chapter 3, we extend the confining quark matter (CQM) model, in which the confinement is modeled by means of the Richardson potential for quark-quark interaction and the constituent quark mass is assumed to be density-dependent, to include isospin dependence of the constituent quark mass. Within this extended isospin-dependent confining quark matter (ICQM) model, we study the properties of strange quark matter and quark stars. We find that including isospin dependence of the constituent quark mass can significantly influence the quark matter symmetry energy, the stability of strange quark matter and the mass-radius relation of quark stars.

An important aspect of the compact star physics is that compact stars could be endowed with strong magnetic fields. Within the confined isospin- and density-dependent mass model for simplicity, we study the properties of strange quark matter (SQM) and quark stars (Qs) under strong magnetic fields. The equation of state of SQM under a constant magnetic field is obtained self-consistently and the pressure perpendicular to the magnetic field is shown to be larger than that parallel to the magnetic field, implying that the properties of magnetized Qs generally depend on both the strength and the orientation of the magnetic fields distributed inside the stars. Using a density-dependent magnetic field profile which is introduced to mimic the magnetic field strength distribution in a star, we study the properties of static spherical Qs by assuming two extreme cases for the magnetic field orientation in the stars, i.e., the radial orien-



tation in which the local magnetic fields are along the radial direction and the transverse orientation in which the local magnetic fields are randomly oriented but perpendicular to the radial direction. Our results indicate that including the magnetic fields with radial (transverse) orientation can significantly decrease (increase) the maximum mass of Qs, demonstrating the importance of the magnetic field orientation inside the magnetized compact stars.

In Chapter 5, we construct quark magnetars in the framework of SU(3) Nambu–Jona-Lasinio(NJL) model, which is well accepted and more common to solve the properties of quark matter, with vector interaction under strong magnetic fields. The effects of vector-isoscalar and vector-isovector interaction on the equation of state(EoS) of strange quark matter(SQM) is investigated, and it is found that the equation of state is not sensitive to the vector-isovector interaction, however, a repulsive interaction in the vector-isoscalar channel gives a stiffer equation of state for cold dense quark matter. In the presence of magnetic field, gluons will be magnetized via quark loops, and the contribution from magnetized gluons to the EoS is also estimated. For SQM under strong magnetic fields we consider anisotropic pressures and study the properties of SQM under a density-dependent magnetic field profile which is introduced to mimic the magnetic field distribution in a quark star(QS). The dependence of magnetar mass on the pressure of magnetized gluons has been discussed, and we study the parameter choice for the anisotropic pressures which can support 2 solar mass Qs by considering vector-isoscalar interaction and the magnetized gluon effect.

KEY WORDS: quark equation of state, phenomenological model, quark symmetry energy, quark star, magnetar, pressure anisotropy, con-



ABSTRACT

stituent quark mass, confined potential.

目 录

摘要	i
ABSTRACT	v
目录	ix
第一章 绪论	1
1.1 夸克模型与夸克物质	1
1.1.1 前言	1
1.1.2 夸克模型	2
1.1.3 奇异夸克物质	3
1.1.4 夸克物质的唯象模型：MIT袋模型	4
1.1.5 夸克物质的唯象模型：NJL (Nambu-Jona-Lasinio) 模型	5
1.1.6 夸克物质的唯象模型：准粒子袋模型	6
1.1.7 夸克物质的唯象模型：质量密度相关模型	6
1.1.8 夸克物质的对称能介绍	8
1.2 各章节工作简略介绍	14
参考文献	15
第二章 同位旋质量密度相关模型 (CIDDM) 与夸克物质对称能和夸克星	19
2.1 同位旋质量密度相关模型的定义	19
2.1.1 背景介绍	19
2.1.2 模型的提出	22
2.2 夸克物质的对称能	24



2.2.1	奇异夸克物质的性质	27
2.3	结果和讨论	29
2.3.1	夸克物质的对称能的计算	29
2.3.2	奇异夸克物质的稳定性	31
2.3.3	夸克星	34
2.3.4	夸克物质标度参数的效应	37
2.3.5	夸克星的最大质量	39
2.4	零温情况下CIDDm模型的总结与展望	43
2.4.1	CIDDm 模型的参数讨论	44
2.5	有限温度情况下CIDDm模型的拓展研究	45
2.5.1	有限温度情况下奇异夸克物质的热力学性质	46
2.5.2	结果与讨论	48
2.5.3	有限温度情况下CIDDm模型的总结	50
	参考文献	54
第三章 基于禁闭势的夸克物质模型与介质中的组分夸克质量和夸克星		63
3.1	研究背景	63
3.2	理论模型和处理方法	64
3.2.1	理论推导	64
3.2.2	结果与讨论	69
3.3	本章小结	77
	参考文献	77



第四章 基于CIDDM模型强磁场下的夸克物质与夸克星	83
4.1 引言	83
4.2 理论公式推导	84
4.2.1 磁场下的CIDDM模型的研究	84
4.2.2 常数磁场下夸克物质的理论推导	86
4.2.3 密度相关磁场下夸克物质的理论推导	89
4.3 结果与讨论	91
4.3.1 常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程	91
4.3.2 重子数密度相关磁场下的夸克星	94
4.4 本章总结	96
参考文献	97
第五章 基于NJL模型的强磁场下夸克物质与夸克星	103
5.1 引言	103
5.2 SU(3)NJL模型的理论推导	104
5.2.1 夸克部分压强的贡献	106
5.2.2 轻子的压强贡献	108
5.2.3 磁化胶子产生的压强	109
5.3 数值计算和结果讨论	111
5.3.1 磁场下矢量-同位旋矢量以及矢量-同位旋标量相互作用的效应	112
5.3.2 物态方程、声速和夸克星的讨论	113
5.4 本章小结	123
参考文献	123
第六章 结论与展望	127
6.1 结论	127
6.2 展望	129



附录 A 零温NJL模型的推导讨论	131
A.0.1 强磁场下SU(2)对称性NJL模型的推导	131
A.0.2 强磁场下SU(2)对称性NJL模型加入同位旋矢量道的推导	142
A.0.3 强磁场下SU(3)对称性NJL模型标量道赝标量道的推导	144
A.0.4 强磁场下SU(3)对称性NJL模型同位旋矢量道的推导	149
A.0.5 SU(3)NJL模型的物态方程	150
插图索引	158
致谢	159
攻读学位期间发表的学术论文目录	161

第一章 绪论

1.1 夸克模型与夸克物质

1.1.1 前言

现代物理学家是非常幸运的，因为如今的物理学进展令人振奋：核物理、粒子物理、天体物理的研究已经进入了交叉融合的时刻，齐头并进。在天体探测方面，新的轨道观测器已经投入使用，比如哈勃空间望远镜（Hubble Space Telescope）、Rossi X射线计时探测器（Rossi X-ray Timing Explorer: RXTE）、Chandra X射线卫星和X射线多重镜面探测器（X-ray Multi Mirror Mission）。相应的，在地球上的实验室里，高能重离子碰撞（Heavy ion collisions(HIC's））为我们提供了一种能够探索核物质，也就是强相互作用物质性质的途径。在BNL的 Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)和CERN 的 Large Hadron Collider (LHC) 已经揭示了许多有趣的在零重子数密度和高温的情况下的强相互作用的特征，这里面就有非常多的核物理和粒子物理的学科交叉。在自然环境里，致密星体的研究可以给予我们一个探索高重子数密度和低温条件下的强相互作用物质的另一个途径^[1,2]。中子星在丰中子核物质的物态方程（EoS）方面为人们提出的理论给出了自然界的回答，扩充了我们的知识。在中子星的内部或核心里面，可能会存在超子、介子的凝聚，甚至是夸克物质。理论上讲，中子星可能会转变成由绝对稳定退禁闭的u, d, s夸克和轻子（比如电子）构成的奇异夸克物质（strange quark matter (SQM)）所组成的奇异夸克星^[3-5]。虽然大多数的和致密星体有关的探测可以通过传统的中子星模型来解释，但是夸克星的假设也不能被排除掉。夸克星的一个重要的特征就是，对于一个固定的质量的星体，特别是对于一些小质量的星体，夸克星的半径一般都比中子星的半径要小很多^[6]。这个也被非常多的作者讨论过，他们通过观测一些致密星体，比如SAX J1808.4C3658, 4U 1728C34, 4U 1820C30, RX J1856.5C3754 和 Her X-1，能得出这些星体是夸克星而不是中子星^[7]。这些夸克星可能存在的证据是我们现代天文学的非常有意思的方面，而且对于天体物理和强相互作用物理有很大的推动揭示作用，特别是关于奇异夸克物质的性质，这个可以作为决定夸克星结构的至关重要的研究方向——所以说探寻致密星体的性质对于我们探索强相互作用物质就有了非



常重要的作用，这就体现了核物理、粒子物理和天体物理的学科交叉，也就是为什么现在物理学界百花齐放的原因^[7-13]。

在致密星体的研究中，还有一个很重要的论题就是致密星体可以被磁场包围。在致密星体表面处能够估算得到很大的磁场 $B \sim 10^{14}$ G^[14-16]。而在致密星体的内部核心区域，估算得到的磁场甚至能够达到 $B \sim 10^{18}$ G。研究强磁场下的夸克星的性质对于我们理解致密星体与自然界的性质有着十分重要的意义。最近，实验上探测到了一个新的脉冲星体PSR J0348+0432，质量为 $2.01 \pm 0.04M_{\odot}$ ^[17]，给出了新的最大质量的脉冲星的纪录。对于诸多只能给出比较软的物态方程的夸克唯象模型，如何描述这么重的致密星体就成为了一个新的课题，这也是本文的动机之一。

在我们之前的叙述中提到了夸克这个概念，研究夸克构成的夸克物质对于我们研究致密星体，研究高密物质具有至关重要的作用，下面的分章节里，我们会简略介绍一下夸克模型的引入和相关的唯像夸克模型的性质。

1.1.2 夸克模型

参与强相互作用的粒子称之为强子，实验上发现的强子有数百种，介子有两百多种，重子有五百多种。强子的量子数能从实验中定出来。这些量子数包括自旋、宇称、同位旋量子数和奇异量子数。众所周知，中子与质子构成原子核，它们都是非奇异的粒子，也就是说，奇异量子数 S 等于零，中子与质子都是重子，它们的重子数 $B = 1$ ，对于反重子， $B = -1$ 。重子数 B 与奇异数 S 的和我们称之为超荷 Y ：

$$Y = B + S \quad (1.1)$$

如果考虑电荷 Q ，可以写出来盖尔曼-西岛(Gell-Mann-Nishijima)关系：

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (I_3 = I, I - 1, \dots, -I) \quad (1.2)$$

其中 I_3 就是同位旋第三分量，夸克模型数学上的提出在一般的教科书里面都有写，在这里无庸赘述。在六种夸克当中，u,d,s夸克的质量最轻，在核物理中最为重要。下面我们只考虑uds三味夸克，首先给出夸克和反夸克的量子数的数表：

可以通过表1-1看出，盖尔曼-西岛关系对夸克物质也同样适用。所以研究夸克物质和研究核子物质具有一些类似的处理方法。u,d夸克由于具有同位旋对称性，所以可以构成一个二维的基础表示，具有SU(2)对称性。如果加上s夸克，就改为三维基



表 1-1: 正反夸克的量子数比较

夸克名称	u	d	s	\bar{u}	\bar{d}	\bar{s}
电荷数Q	2/3	-1/3	-1/3	-2/3	1/3	1/3
自旋量子数J	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
同位旋量子数I	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0
同位旋第三分量 I_3	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0
奇异数S	0	0	-1	0	0	1
重子数B	1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3
超荷Y	1/3	1/3	-2/3	-1/3	-1/3	2/3

础表示，这时候在三维味空间的转动变换就用SU(3)群来描述，生成元就不再是泡利算符，而是盖尔曼矩阵（Gell-Mann矩阵），这里不再赘述。

1.1.3 奇异夸克物质

核子是由u,d两味夸克组成的，所以高能的核核碰撞里面本来没有奇异性。在QGP形成初期，真空中激发出大量的正反夸克对，由于ud夸克的流质量很小，所以先激发出来并且大量存在，但是大量的u,d夸克的激发会因为泡利不相容原理使得ud夸克的继续激发被抑制，所以s夸克的激发就会比较容易出现，从而形成奇异夸克物质。在热密QGP里面可以产生大量的s和 \bar{s} ，由于后者更容易找到一个u夸克或者d夸克形成K介子，所以s夸克得以大量保留，进而有可能在冷却后形成大量u,d,s夸克构成的集团束缚态，也就是蒸馏模型，人们称之为奇异液滴^[18-21]。

前面提到过，我们对于高密低温的夸克物质比较感兴趣，这是因为实验上可以观测到高密低温的致密星体，而致密星体的内部有可能是夸克物质，这是一个很好的研究高能物理的切入点，而研究奇异物质，对于研究致密星体就有着十分重要的作用。根据 Bodmer-Witten-Terazawa的假设，奇异夸克物质有可能构成QCD物质（强相互作用物质）的最稳定的基态。之后，Farhi 和 Jaffe 发现了奇异夸克物质在接近核物质饱和密度的时候会很稳定。奇异夸克物质的性质一般不能从微扰QCD和格



点QCD的直接计算中得到，我们已经提到了是因为奇异夸克物质密度有限而且能量并不高。为了更好的理解奇异夸克物质的性质，人们已经构造了很多QCD有效唯象模型，比如MIT袋模型^[22,23]，Nambu-Jona-Lasinio (NJL)模型^[24]，微扰QCD相关的模型，Dyson-Schwinger相关的方法，质量密度相关（CDDM）模型^[25]还有准粒子袋模型^[26,27]。在极高密奇异夸克物质的状态下，有可能会出现色味锁color-flavor-locked (CFL) 的现象，这时候u,d,s 三味夸克的流夸克质量起得作用很小，无法和化学势相比，所以三味夸克的比相等，而且由于电中性条件，轻子数为零。下面为了更好地说明，我们简单介绍一些夸克物质的唯象模型的性质。

1.1.4 夸克物质的唯象模型：MIT袋模型

二十世纪七十年代，MIT的Chodos和Jaffe提出了著名的MIT袋模型。这个模型给出了强子把夸克束缚在有限空间的一个图像，人们把这个空间称之为“袋”。这是一个加上边界条件的非动力学模型。

MIT袋模型是通过加入了一个袋常数B来起到夸克物质的禁闭作用^[28,29]。这里面人们用 P_i 表示不同味的夸克（u,d,s）和轻子(e, μ)产生的压强，从而给出奇异夸克物质产生的总的压强和袋产生的反向压强给出来的压强的平衡关系：

$$P + B = \sum_i P_i \quad (1.3)$$

同时，总能量密度的表达式也可以写出来：

$$\epsilon = \sum_i \epsilon_i + B \quad (1.4)$$

其中的夸克物质的压强和能量密度的表达式都可以通过统计力学的方法来给出，零温情况结果如下：

$$P_f = \frac{g_f}{6\pi^2} \int_0^{k_{Ff}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_f^2}} \quad (1.5)$$

$$\epsilon_f = \frac{g_f}{2\pi^2} \int_0^{k_{Ff}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_f^2} \quad (1.6)$$



这里的 $g_f = 2(\text{spin}) \times 3(\text{color}) = 6$ 是夸克物质的自由度， k_{Ff} 是夸克物质的费米动量。我们可以通过粒子数密度的表达式 $\rho_f = \frac{g_f}{6\pi^2} k_{Ff}^3$ 来求得。

MIT袋模型可以给出夸克物质的物态方程，还能反映夸克物质的禁闭和渐近自由的性质，所以被人们广泛使用。无论是求解致密星体还是核子夸克相变，作为夸克相，袋模型给出了比较好的夸克物质的图像。但是如果考虑了其他的情况，比如有限温度下的手征恢复相变，MIT袋模型由于没有办法给出夸克凝聚，夸克质量一直存在，破坏了手征对称性，就不再适用。

1.1.5 夸克物质的唯象模型：NJL (Nambu-Jona-Lasinio) 模型

下面我们讨论NJL (Nambu-Jona-Lasinio) 模型。这个模型能够很容易地给出QCD的全局对称性，因为它直接从QCD的拉氏密度出发，通过介子耦合道的加入构造拉氏密度。NJL模型也能很清晰地描述手征对称性的自发破缺。人们已经做了很多关于强磁场下的NJL模型的夸克物质的性质，并且能够通过SU(3)NJL模型^[30,31]给出奇异夸克物质的性质。采用的NJL模型一般包括标量-赝标量同位旋标量道和t'Hooft项。此模型在研究高密度退禁闭相变，夸克凝聚的方面具有非常重要的作用。下面我们给出SU(2)NJL模型两味夸克物质 (u,d) 的拉氏密度^[32,33]：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2]] \quad (1.7)$$

这个拉氏密度中加入了标量、赝标量-同位旋标量道。对于三味奇异夸克物质，要考虑SU(3)对称性，故重新构建拉氏密度的表达式，同时我们加入了矢量-同位旋矢量和矢量-同位旋标量道，所得的拉氏密度如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NJL} = & \bar{\psi}(i\partial - m)\psi + G_s \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\psi i\gamma_5 \bar{\lambda}^a\psi)^2] - K[\det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi] \\ & - G_{I,v}[(\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5 \gamma^\mu \vec{\tau}\psi)^2] - G_v \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma^\mu \lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \gamma^\mu \lambda^a\psi)^2] \end{aligned} \quad (1.8)$$

这里面 G_s 、 G_v 、 $G_{I,v}$ 分别代表了标量-同位旋标量道、矢量-同位旋标量道、矢量-同位旋矢量道的耦合常数，我们还加入了t'Hooft项，之后就可以直接通过场论的方法



给出能量密度和压强来给出基于NJL模型的奇异夸克物质的性质，在第五章和附录里面会有详细的关于NJL模型的讨论。

1.1.6 夸克物质的唯象模型：准粒子袋模型

准粒子袋模型是基于核物质里面的介质效应并不清楚（也就是核力具体形式未知）这个情况，把夸克近似等效地看作准粒子，将介质与夸克，夸克与夸克之间的相互作用的平均效果利用夸克的有效质量来进行处理，也就是做了夸克的自能单圈近似，可以给出准粒子袋模型夸克的有效质量的表达式为：

$$m_q = \frac{m_{q0}}{2} + \sqrt{\frac{m_{q0}^2}{4} + \frac{g^2 \mu_q^2}{6\pi^2}} \quad (1.9)$$

其中， g 是量子色动力学的耦合常数， m_q 是夸克物质的有效质量， μ_q 是夸克的化学势，这里面把 g 作为一个可调参数。由于仅仅给出有效质量并不能说明夸克物质的禁闭，所以仍然像袋模型那样给出一个袋常数来，不过这个袋常数是化学势相关的^[34,35]：

$$B^*(T, \mu) = - \int_{T_0, \mu_0}^{T, \mu} \left(\sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} dT + \sum_{ij} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial \mu_j} d\mu_j \right) \quad (1.10)$$

此时 Ω_0 是热力学势，由此就可以通过统计力学的方法给出基于准粒子袋模型的物态方程和其他热力学性质。

1.1.7 夸克物质的唯象模型：质量密度相关模型

下面讨论的是质量密度相关模型，质量密度相关模型模型和MIT袋模型的禁闭机制有所不同。首先对于MIT袋模型，夸克的质量在袋外是无穷大，而在袋内则是夸克的流质量，是一个常量。质量密度相关模型把介质与粒子、粒子与粒子之间的相互作用化成准粒子的形式，其给出的夸克质量是重子数密度的一个连续的函数：随着密度的增加，夸克物质的有效质量会变为流夸克质量；当密度减小时，夸克物质的质量趋近无穷大，这样满足了渐近自由和色禁闭。满足这些条件的最简单的参



数化形式如下：

$$m_q = m_{q0} + \frac{D}{n_B^z} \quad (1.11)$$

其中 q 是指 u, d, s 三味夸克, m_{q0} 是相应的流夸克质量, n_B 是夸克物质的重子数密度, z 是一个标度常数, D 是决定奇异夸克物质的稳定性条件的参数。如果根据线性禁闭的近似, z 的取值可以定为 $1/3$ [36], 下面我们就借用质量密度相关模型利用统计力学和热力学的方法求解一般研究夸克物质所需要的物理量, 其中包括粒子数密度, 能量密度, 压强, 化学势等等。

通过统计力学的方法来给出夸克的粒子数密度：

$$n_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fi}} p^2 dp = \frac{g_i k_{Fi}^3}{6\pi^2} \quad (1.12)$$

其中 g_i 是粒子 i 的简并度, 色散关系是 $\epsilon_i^2 = p^2 + m_i^2$, 所以可以得出系统总的能量密度为 [37]：

$$\epsilon = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fi}} \sqrt{p^2 + m_i^2} p^2 dp \quad (1.13)$$

同样还可以求得化学势的表达式, 通过 $\mu_i = \frac{d\epsilon}{dn_i}$ 来给出：

$$\mu_i = \sqrt{k_{Fi}^2 + m_i^2} + \sum_j n_j \frac{\partial m_j}{\partial n_i} f\left(\frac{k_{Fj}}{m_j}\right) \quad (1.14)$$

其中：

$$f(x) = \frac{3}{2x^3} [x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})] \quad (1.15)$$

在化学势的表达式中, 第一项实际上就是质量密度无关的情况下的化学势的表达式, 后面添加的一项是由于质量密度相关引起的, 如果不加入这一项, 会出现热力学不自洽 [38]。而所谓的热力学不自洽, 实际上是从热力学第一定律出发得到的结论: 每核子能量的最低点要和零压点 (压强为零的点) 对应的重子数一致。这里面我们给出一张图来展示质量密度相关模型的热力学自洽性。

对于奇异夸克物质, 由于考虑了化学平衡, 重子数守恒和电中性条件, 我们可

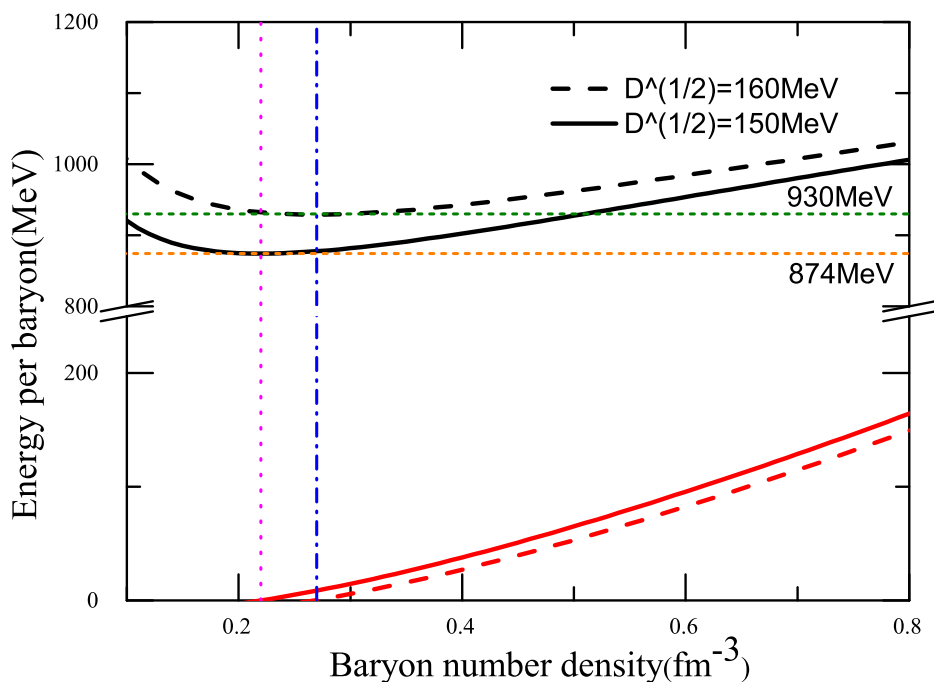


图 1-1: 质量密度相关模型的自洽性分析
Figure 1-1: Thermal self-consistency in CDDM

以自洽地给出夸克物质所对应的物态方程，这里我们借用质量密度相关模型来简略介绍一下。图1-1里我们给出了两组质量密度相关模型里面的不同的D参数对应的每核子能量和压强对重子数密度的变化。对于 $D^{\frac{1}{2}} = 160 \text{ MeV}$ 的这种情况，每核子能量的最低点正好是 ^{56}Fe 的每核子能量930 MeV，而且每核子能量所对应的重子数密度恰好是零压点所对应的重子数密度，满足热力学自洽。第二种情况可以看出也是同样的热力学自洽，所以这个模型是满足热力学自洽关系的。为了深层次地理解夸克物质的物态方程的性质，人们借用核物理对核子相互作用的描述和处理方法，引入了夸克物质对称能的概念。下面，我们简单地介绍一下夸克物质的对称能。

1.1.8 夸克物质的对称能介绍

在夸克星物质以及相对论重离子碰撞中，ud夸克的组分一般不相等，我们称之为非对称夸克物质。研究非对称夸克物质的性质可以类比于非对称核物质的情况（质子中子粒子数密度不相等），同样地我们可以利用对称能的效应来对非对称夸克物质的性质（比如夸克物质的组分夸克质量、物态方程以及相图的性质）进行分析，一般来说夸克物质的对称能越大，物态方程越硬。定义夸克物质的对称能的方法和



核物质的情况类似，我们把由u,d 和s夸克组成的夸克物质的每核子能量按照同位旋不对称度 δ 来进行展开：

$$E(n_B, \delta, n_s) = E_0(n_B, n_s) + E_{\text{sym}}(n_B, n_s)\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4), \quad (1.16)$$

在这里， $E_0(n_B, n_s) = E(n_B, \delta = 0, n_s)$ 是u-d-s三味夸克物质的每核子能量，其中u夸克的粒子数密度和d夸克的相等。我们可以给出夸克物质中的同位旋不对称度的定义来：

$$\delta = 3 \frac{n_d - n_u}{n_d + n_u}, \quad (1.17)$$

此不对称度等于 $-n_3/n_B$ ， $n_3 = n_u - n_d$ 是同位旋密度， $n_B = (n_u + n_d)/3$ 是两味u-d夸克物质的总的重子数密度。以上的关于 δ 的夸克物质里面的定义在很多文献里面都有广泛的应用。我们注意到，在夸克物质里面， $\delta = 1(-1)$ 可以把夸克物质从纯中子物质转变成纯质子物质，这个和一般我们在核物质里面的不对称度的定义是自洽的，也就是 $\frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p} = -n_3/n_B$ 。

于是夸克物质的对称能的表达式 $E_{\text{sym}}(n_B, n_s)$ 可以写成：

$$E_{\text{sym}}(n_B, n_s) = \left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 E(n_B, \delta, n_s)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0}. \quad (1.18)$$

在每核子能量的展开式里面，同位旋不对称度 δ 所对应的奇数项是没有的，原因是在夸克物质里面，忽略了库仑相互作用，使得u,d夸克具有交换对称性。同位旋不对称度 δ 的高阶项的系数非常小，这个会在下面的工作里面指出来。忽略了其中的高阶项的效应，我们可以给出一个经验公式，对于同位旋非对称的夸克物质的物态方程可以采用抛物线近似： $E(n_B, \delta, n_s) \simeq E_0(n_B, n_s) + E_{\text{sym}}(n_B, n_s)\delta^2$ ，并且，夸克物质的对称能也可以近似地通过以下的表达式来求解：

$$E_{\text{sym}}(n_B, n_s) \simeq \frac{1}{9} [E(n_B, \delta = 3, n_s) - E(n_B, \delta = 0, n_s)]. \quad (1.19)$$

下面我们讨论一下刚才提过的不同夸克模型所给出的对称能。首先是MIT袋模型，根据对称能的定义，我们可以看出来MIT袋常数是粒子数密度无关的，所以按照夸克物质对称能的定义进行求解的时候，袋常数不起作用，而且MIT袋模型的夸克物

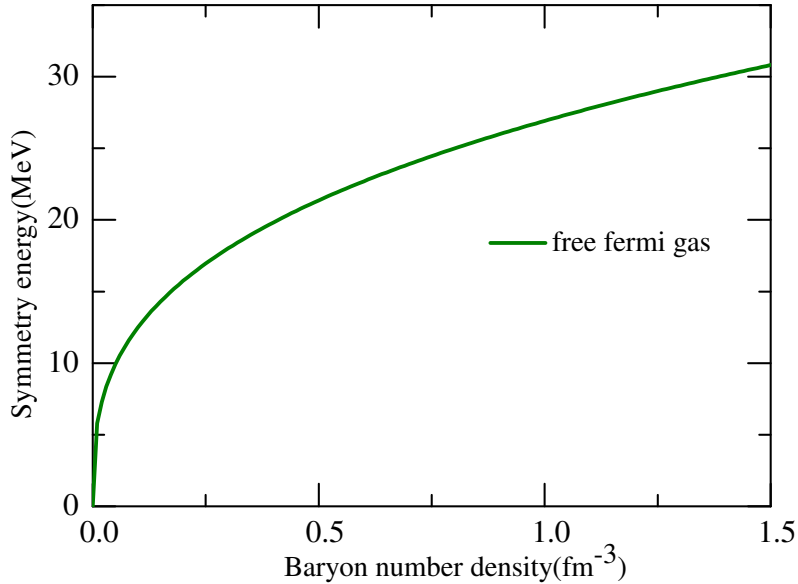


图 1-2: 无相互作用ud夸克物质的对称能, 其中夸克质量为流夸克质量

Figure 1-2: Symmetry energy as a function of baryon number density for free fermi gas

质的质量仅仅是裸质量, 所以, 求解MIT袋模型的对称能, 实际上就是在求解自由费米气体模型的对称能。

我们可以先写出自由费米气体的能量密度来:

$$\epsilon = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fi}} \sqrt{p^2 + m_i^2} p^2 dp \quad (1.20)$$

其中 m_i 是夸克物质的流质量, k_{Fi} 是夸克物质的费米动量。然后我们带入夸克物质的对称能的定义, 给出费米气体和MIT袋模型的对称能来:

$$E_{\text{sym}}(n_B) = \frac{1}{18} \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2 + m^2}} \quad (1.21)$$

此时 $m = m_u = m_d$, 这里面 ν 是对称u-d夸克物质的费米动量。由此, 我们可以给出自由费米气体夸克物质的对称能随着重子数密度的变化关系, 可以看出, 在重子数密度等于 1.5 fm^{-3} 的时候, 对称能等于31MeV, 这个和核子物质的对称能可以

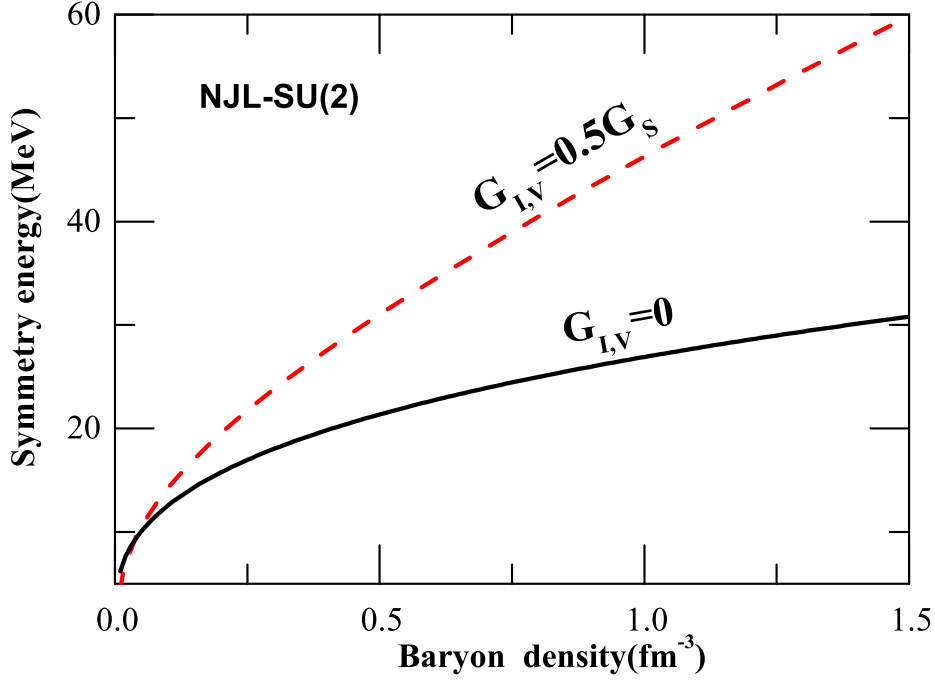


图 1-3: NJL模型SU(2)对称性下的两味夸克物质的对称能
Figure 1-3: Symmetry energy for 2 flavor of quark in SU(2) NJL model

比较，后面的章节我们会详细地讨论。

下面讨论的是夸克物质基于NJL模型的对称能。对于NJL模型，基于的SU(2)的拉氏密度如下：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2]] \quad (1.22)$$

在这个拉氏密度里面，我们加入了矢量-同位旋矢量道，这相当于加强了夸克物质之间的同位旋相互作用，于是可以得到新的拉氏密度：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f(i\partial - m_c)\psi_f + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2] - G_{I,V}(\bar{\psi}\gamma_\mu \vec{\tau}\psi)^2 - G_{I,V}(\bar{\psi}\gamma_\mu i\gamma_5 \vec{\tau}\psi)^2 \quad (1.23)$$

这里面 $G_{I,V}$ 是矢量-同位旋矢量道的耦合常数。之后通过路径积分，我们可以求解SU(2)NJL模型的物态方程来，可以得到零温时的SU(2)NJL模型对应的能量密



度：

$$\epsilon_{NJL} = \sum_{i=u,d} \left[-\frac{3}{\pi^2} \int_{k_{F,i}}^{\Lambda} \sqrt{M_i^2 + k^2} k^2 dk \right] + G(\phi_u + \phi_d)^2 - G_{I,V}(\rho_u - \rho_d)^2 - \epsilon_0 \quad (1.24)$$

这里面 ϵ_0 是真空能量密度，取作使得总能量密度粒子数为零的时候为零的能量，在计算对称能的时候没有作用，于是我们可以得出NJL模型SU(2)对称性下的两味夸克物质的对称能：

在图1-3中，我们在标量-同位旋标量的SU(2)NJL模型里面加入了矢量-同位旋矢量道，对比了同位旋矢量道对称能的影响，由于同位旋矢量道的耦合常数不是跑动耦合常数，而是手摆固定的，所以给出的对称能在高密处和费米气体的对称能会有很大的区别，而我们知道，对于夸克物质，密度高时会趋近于渐近自由，所以唯象模型所给出的物理量应该和费米气体给出的在高能高密处的值一样。这里我们发现，在重子数密度等于 $1.5 fm^{-3}$ 时， $G_{I,V}$ 等于0.5时的对称能的取值为59MeV，比自由费米气体和未加入同位旋矢量道的NJL模型的对称能要大了一倍。

下面我们简略讨论一下准粒子袋模型的对称能。准粒子袋模型是把介质与粒子、粒子与粒子之间的相互作用并入夸克的有效质量里面，形成准粒子，加入袋常数构成禁闭。我们研究对称能只是研究零温时的情况，此时袋常数和粒子数密度无关，所以对于对称能没有贡献，而在准粒子袋模型的表达式中：

$$m_q = \frac{m_{q0}}{2} + \sqrt{\frac{m_{q0}^2}{4} + \frac{g^2 \mu_q^2}{6\pi^2}} \quad (1.25)$$

g 作为QCD的耦合常数，这里面变成了一个手摆的参数值，这是这个模型的特点。所以我们可以通过准粒子袋模型的构造入手，直接计算出它的对称能随着重子数密度变化的曲线。从图1-4中我们可以看出随着 g 的增大，准粒子袋模型给出的对称能逐渐增强，但效果很有限——一般来说，准粒子袋模型的物态方程的软硬程度和所加袋常数有着很大的关系。

现在讨论一下质量密度相关模型的对称能随着重子数密度的变化关系。质量密度相关模型采用了粒子数密度相关来实现禁闭和渐近自由，我们可以给出质量密度相关模型的对称能的表达式：

$$E_{\text{sym}}(n_B) = \frac{1}{18} \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2 + m^2}} \quad (1.26)$$

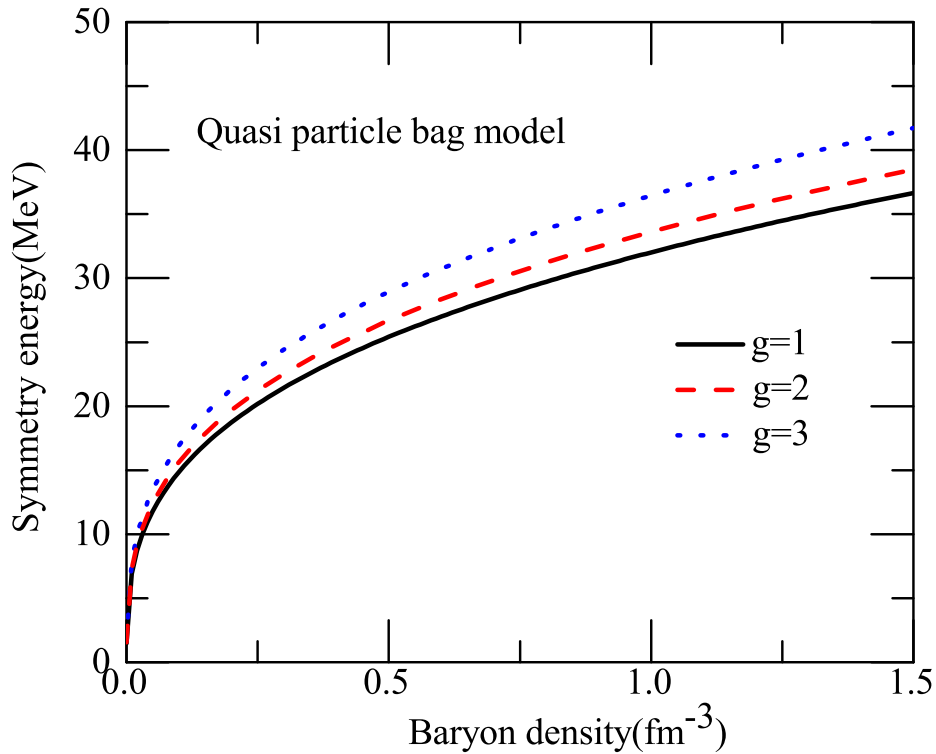


图 1-4: 基于准粒子袋模型的两味夸克物质的对称能

Figure 1-4: Symmetry energy for 2 flavor of quark in quasi-particle bag model

其中 $m = \frac{D}{n_B^{\nu}}$, 这里面 ν 是对称 u-d 夸克物质的费米动量。于是我们可以画出对称能随着粒子数密度变化的关系:

此时从图1-5中我们可以看出, 质量密度相关模型的对称能在重子数密度等于 1.5 fm^{-3} 时, $G_{I,\nu}$ 等于 0.5 时的对称能的取值为 30 MeV, 和费米气体模型给出的数值基本一致。

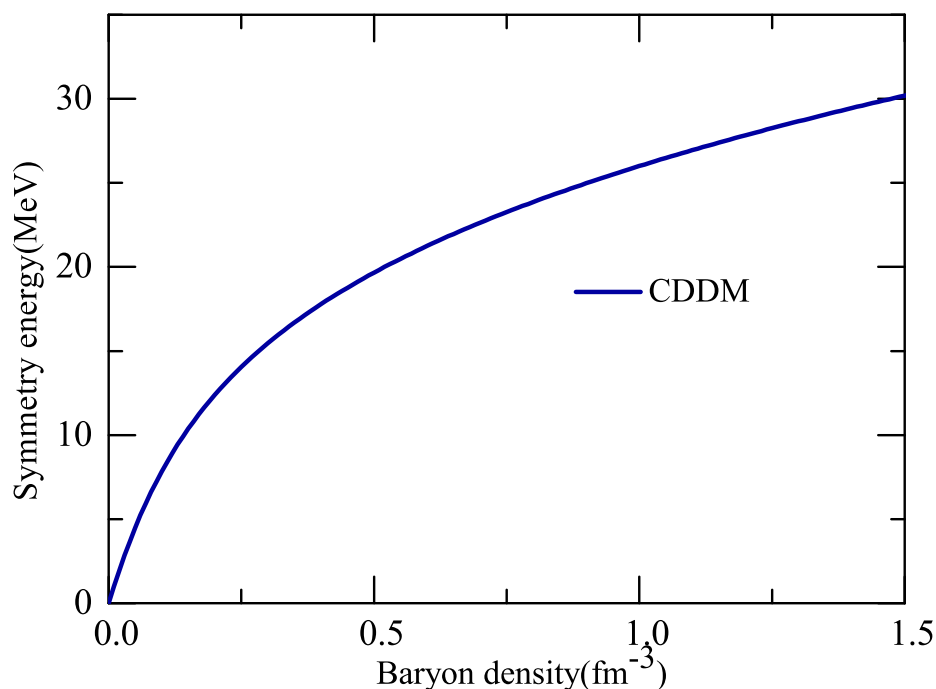


图 1-5: 基于质量密度相关模型的两味夸克物质的对称能
Figure 1-5: Symmetry energy for 2 flavor of quark in CDDM

1.2 各章节工作简略介绍

之前我们介绍了夸克模型的提出以及唯象夸克模型，然后利用唯象夸克模型简略描述了夸克物质物态方程以及重要的热力学量的求解方法，并提及了夸克物质的对称能的概念和几种唯象模型的计算结果。这篇博士论文的动机就是围绕着有限密度的夸克物质通过几种不同的唯象模型研究奇异夸克物质和非对称夸克物质的性质来给出夸克物质的物态方程、夸克物质对称能，进而应用在求解夸克星以及强磁场下的夸克星（磁星）的性质。

这里我们列出本论文各章涉及的相关工作。在第二章里我们使用加入了同位旋效应的质量密度相关夸克模型，从夸克的有效质量出发，发现同位旋的效应确实能够使得夸克物质的对称能增强，进而令奇异夸克物质的物态方程变硬，于是可以给出两倍太阳质量的夸克星。如果我们不考虑同位旋效应，那么所描述的夸克星的最大质量不能达到两倍太阳质量。

在第二章的工作里，我们是从夸克物质的有效质量入手来求解夸克物质的性质，而在第三章的工作里，我们选用了禁闭的夸克模型，得到的夸克质量是组分夸克质



量。通过在组分夸克质量里面加入同位旋相关性以及改变uds夸克的组分夸克质量的密度相关性，我们得到了同位旋密度相关的禁闭夸克模型，进而研究了奇异夸克物质和夸克星的性质，我们发现同位旋相关的组分夸克质量可以很大程度地影响夸克物质的对称能、奇异夸克物质的稳定性以及夸克星的质量半径关系。

在之前的两章的工作里没有涉及致密星体的磁场性质，为了能够简化计算磁星的复杂性，在第四章我们使用了第二章讨论的同位旋质量密度相关模型来研究磁场问题。由于磁场的加入会引起夸克物质产生压强的各向异性，我们对强磁场下夸克物质压强的各向异性进行了讨论，并利用密度相关磁场描述了夸克星内的磁场分布。对于夸克星内的磁场方向，我们假定了两种极端情况：沿着夸克星半径方向的磁场以及在垂直于夸克星半径方向的平面上随机分布的磁场。我们发现致密星体内部磁场方向对于致密星体的性质具有很大的影响。

第五章的工作里我们使用了人们广泛接受的NJL模型对强磁场下的夸克物质进行了讨论，其中加入了矢量相互作用以及磁化胶子的贡献。在同时考虑压强的各向异性以后，综合考虑了磁场、矢量-同位旋矢量效应以及磁化胶子的贡献，我们可以描述两倍太阳质量的磁星并给出完备的参数空间。

参考文献

- [1] Lattimer J. M. & Prakash M., “The physics of neutron stars”, *Science*, 2004, **304**(536).
- [2] Steiner A. W. et al, “Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars”, *Physics Report*, 2005, **410**(325).
- [3] Bombaci I. et al, “Quark deconfinement and implications for the radius and the limiting mass of compact stars”, *APJ*, 2004, **614**(314).
- [4] Staff J. et al, “A three stage model for the inner engine of gamma ray burst: Prompt emission and early afterglow”, *APJ*, 2007, **667**(340).
- [5] Herzog M. & Ropke F.K., “Three-dimensional hydrodynamic simulations of the combustion of a neutron star into a quark star”, *PRD*, 2011, **84**(083002).
- [6] Kapoor R. C. & Shukre C.S., “Are radio pulsars strange stars?”, *A & A*, 2001, **375**(405).



- [7] Weber F., “Strange quark matter and compact stars”, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2005, **54**(193).
- [8] Ivanenko D. & Kurdgelaidze D.F., “Remarks on quark stars”, *NCL*, 1969, **2**(13).
- [9] Itoh N., “Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars”, *PTP*, 1970, **44**(291).
- [10] Bodmer A.R., “Collapsed nuclei”, *PRD*, 1971, **4**(1601).
- [11] Witten E., “Cosmic separation of phases”, *PRD*, 1984, **30**(272).
- [12] Farhi E. & Jaffe R.L., “Strange matter”, *PRD*, 1984, **30**(2379).
- [13] Alcock C., Farhi E., & Olinto A., “Strange stars”, *APJ*, 1986, **310**(261).
- [14] Woltjer L., “X rays and type i supernova remnants.”, *APJ*, 1964, **140**(1309).
- [15] Mihara T.A., “New observations of the cyclotron absorption feature in hercules x1”, *Nature*, 1990, **346**(2).
- [16] Chanmugam G., “Magnetic fields of degenerate stars”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 1992, **30**(143).
- [17] Antoniadis J. et al, “A massive pulsar in a compact relativistic binary”, *Science*, 2013, **340**(3-4).
- [18] Greiner C. & Stoecker H., “Distillation and survival of strange-quark-matter droplets in ultrarelativistic heavy-ion collisions”, *PRD*, 1991, **44**(3517).
- [19] Spieles C. et al., “Creation of strange matter at low initial temperature”, *PRL*, 1996, **76**(1776).
- [20] Armstrong T.A. et al., “Search for strange quark matter produced in relativistic heavy ion collisions”, *PRC*, 2001, **63**(054903).
- [21] Berger M.S. et al., “Radioactivity in strange quark matter”, *PRC*, 1987, **35**(213).
- [22] Chodos A. et al., “New extended model of hadrons”, *PRD*, 1974, **4**(3471).



-
- [23] Thomas A.W., “Chiral symmetry and the bag model: A new starting point for nuclear physics”, *Adv Nucl. Phys.*, 1984, **13**(1).
- [24] Nambu Y. et al., “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i”, *Phys. Rev.*, 1961, **122**(345).
- [25] Fowler G.N. et al., “Confinement and phase transitions”, *PRC*, 1981, **9**(271).
- [26] Schertler V. et al., “The influence of medium effects on the gross structure of hybrid stars”, *NPA*, 1997, **637**(451).
- [27] Schertler V. et al., “Influence of medium effects on the gross structure of hybrid stars”, *NPA*, 1998, **637**(451).
- [28] Madsen J., “Curvature contribution to the mass of strangelets”, *PRL*, 1993, **70**(391).
- [29] Madsen J., “Shell model versus liquid drop model for strangelets”, *PRD*, 1994, **50**(3328).
- [30] Rehberg P. et al., “Hadronization in the su (3) nambu jona lasinio model”, *PRC*, 1996, **53**(410).
- [31] Schertler K., “Neutron stars and quark phases in the nambu jona lasinio model”, *PRC*, 1999, **60**(025801).
- [32] Shovkovy I. et al., “Nonstrange hybrid compact stars with color superconducting matter”, *PRD*, 2003, **67**(103004).
- [33] Huang M. et al., “Gapless color superconductivity at zero and at finite temperature”, *NPA*, 2003, **729**(835).
- [34] Gorenstein M. I. et al., “Equation of state of deconfined matter in a quasiparticle description”, *PRC*, 2000, **61**(045203).
- [35] Peshier A. et al., “Equation of state of deconfined matter at finite chemical potential in a quasiparticle description”, *PRC*, 2000, **61**(045203).
- [36] Peng G.X. et al., “Mass formulas and thermodynamic treatment in the mass-density-dependent model of strange quark matter”, *PRC*, **61**(015201).



- [37] Peng G.X. et al., “Thermodynamics, strange quark matter, and strange stars”, PRC, 2000, **62**(025801).
- [38] Benvenuto O.G. et al., “Strange matter equation of state in the quark mass density dependent model”, PRD, 1995, **51**(1989).

第二章 同位旋质量密度相关模型 (CDDM) 与夸克物质对称能和夸克星

这一章，我们提出了同位旋质量密度相关模型。首先是从密度相关模型 (confined-density-dependent-mass(CDDM)) 进行推广，我们把同位旋依赖性加入到了夸克物质的有效质量里面，提出了同位旋质量密度相关模型 (confined-isospin-density-dependent-mass(CIDDM))。利用这个模型，我们研究了夸克物质的对称能，并且基于 β -equilibrium (弱相互作用 β 稳定条件)，给出了夸克物质的稳定性条件和夸克星的性质，比如质量半径关系等等。我们发现，如果在夸克物质的有效质量里面考虑同位旋相关性这个因素，夸克物质的对称能，还有夸克星的性质会随之发生较大的改变。最近实验探测的大质量脉冲星 PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432 的发现给了我们两个前所未有的非常重的致密星体，都接近两倍的太阳质量。这么重的致密星体，如果我们从夸克星的角度去看它的话，是很难从普通的质量密度相关模型里面给出这么重的一个夸克星的，这是因为传统的质量密度相关模型所对应的夸克物质的物态方程比较“软”（在这里，“软”是指物态方程的斜率比较小），很难给出足够大的压强来抵消引力，所以不能描述两倍太阳质量的夸克星。在之后的部分里面，我会给出在同位旋质量密度相关模型下，夸克星可以达到两倍太阳质量。并且我们的计算结果给出了两味的 u-d 夸克物质的对称能应该至少达到自由夸克费米气体或者传统的 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型的两倍，才能描述出大质量脉冲星 PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432。

2.1 同位旋质量密度相关模型的定义

2.1.1 背景介绍

迄今为止，在现代核物理、天体物理和宇宙学领域里的最基本的问题之一，就是如何探究强相互作用的物质的属性，特别是强相互作用物质的物态方程。物态方程在理解核结构和核反应的相关问题以及天体物理中的重要方向和早期宇宙的物质形态这些方面起到了至关重要的作用。量子色动力学 Quantum chromodynamics(QCD) 如今已经作为强相互作用里面的基本理论被广泛地接受。虽然微扰 QCD



(perturbative QCD (PQCD)) 已经在描述高能反应过程取得了十分巨大的成就, 但是 PQCD 在低能唯像的物理里面的直接应用仍然是十分困难, 这是因为这种情况下, 会有非微扰的 QCD 特征^[1] 介入, 无法微扰计算。Lattice QCD (LQCD) 数值蒙特卡罗 (Monte Carlo) 模拟计算为我们关于零重子数密度有限温度的核物理知识 (零化学势) 提供了非常坚固的知识基底。然而, 关于夸克物质中有限化学势的情况, 还是没有办法用 LQCD 来解决, 这样会产生一个著名的符号问题 (化学势会出现在虚部上)^[2]。

在现在的地球上的实验室里, 高能重离子碰撞 (heavy ion collisions(HIC's)) 给我们提供了一个唯一的能够探索强相互作用物质性质的途径。BNL 的 Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) 和 CERN 的 Large Hadron Collider (LHC) 已经揭示了许多有趣的在零重子数密度和高温的情况下的强相互作用的特征。实验上的数据给我们提供了一个新的绘景, 在这个绘景下, 强相互作用体系里面的夸克和胶子就像是一个理想液体^[3], 液体里面微扰 QCD 的特性也起了很大的作用———这个绘景给出了零重子数高温度的无相互作用的退禁闭的夸克和胶子能够构成热密理想气体这样一个最初的构想。

强相互作用物质的性质, 在更高的重子数密度的情况下, 可以由 RHIC 的能量搜寻计划来探测, 这个计划工程的目标是为了给出一个基于 QCD 相图的比较细致的图像来, 特别是在寻找定位所谓的 QCD 临界点^[4] 这个方面。在高重子数密度的区域里面的强相互作用物质的性质的知识的理解可以通过未来的实验里的 GSI 的 Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) 和 JINR 的 Nuclotron-based Ion Collider Facility(NICA) 来进行更进一步的补充。

在自然环境里, 致密星体的研究可以给予我们一个探索高重子数密度和低温条件下的强相互作用物质的另一个途径。中子星已经在丰中子核物质的物态方程 (Equation of state (EoS)) 方面为我们提出的理论给出了自然界的回答, 扩充了我们的知识^[5,6]。在中子星的内部或核心里面, 可能会存在超子、介子的凝聚, 甚至是夸克物质。理论上讲, 中子星可能会转变成奇异夸克星, 这个可能会是由绝对稳定退禁闭的 u, d, s 夸克和轻子 (比如电子) 构成的奇异夸克物质 (strange quark matter (SQM)) 所组成的^[7-9]。虽然大多数的和致密星体有关的探测可以通过传统的中子星模型来解释, 但是夸克星的假设不能被排除。一个重要的夸克星的特征就是, 对于一个固定的质量的星体, 特别是对于一些小质量的星体, 夸克星一般都比中子星的半径要小很多^[10]。这个也被非常多的作者讨论过^[11], 他们通过观测一些致密星体, 比如 SAX J1808.4C3658, 4U 1728C34, 4U 1820C30, RX J1856.5C3754 和



Her X-1，能得出这些星体是夸克星而不是中子星。这些夸克星可能存在的证据是我们现代天文学的一个非常有意思的方向，而且对于天体物理和强相互作用物理有很大的推动揭示作用，特别是关于奇异夸克物质的性质，这个可以作为决定夸克星结构的至关重要的研究方向^[11-17]。

致密夸克物质的物态方程一般都很“软”，这是因为在极高密度下的夸克-夸克间相互作用会反映出QCD的渐近自由的性质。另外，奇异夸克物质的物态方程会更进一步地软化物态方程，这是因为加入了s夸克使得夸克物质的自由度增加，进而使得物态方程得到了软化。因此，大部分的夸克物质模型只能预言质量比较小的夸克星。最近，人们通过利用相对论Shapiro-delay的方法，PSR J1614-2230的致密星体的测量质量达到了 $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ ^[18]。如此大质量的夸克星可能会把以前的很多模型给推翻，因为那些模型的物态方程很软^[19-29]。当然，其中有很多模型还是可以达到两倍甚至更多的太阳质量的夸克星的，但是一般都是通过袋常数的调节和加入一些不甚合理的相互作用来实现。所有的这些模型揭示出来这样一个道理：对于含有夸克物质的类脉冲星星体，夸克之间的相互作用必须得非常强，才能得到大质量的致密星体。这个和HIC里面的高能实验的关于夸克和胶子构成的强相互作用系统的发现十分一致。

在夸克星里面，u-d夸克的同位旋非对称度（isospin asymmetry）可能会很大，因此在奇异夸克物质里面，同位旋矢量道的性质起到了十分重要的作用。在RHIC/LHC（并且在未来的FAIR/NICA实验组）的高能物理实验中，会形成夸克物质，一般来说，这里的夸克物质的u，d夸克与其反粒子的粒子数密度是不同的，也就是说，此时是同位旋非对称的。最近，一些有趣的QCD相图里面的有限同位旋的性质已经被LQCD和一些唯象模型所揭示^[30-36]。这些研究都和夸克物质的同位旋矢量性质有关，但是大家都不知道同位旋矢量性质的确切的处理方法，特别是在有限密度的时候。因此，探索夸克物质的同位旋矢量的性质是十分有意义并且十分重要的。而且，这对我们研究夸克星的性质，研究强子夸克相变的同位旋依赖性，还有HIC高能物理里面的部分子动力学的同位旋效应，有着十分重要的作用。

这一章我们首先列出了最近的大质量夸克星的天文观测数据，进而通过这些数据研究了高重子数密度的夸克物质里面的同位旋矢量的性质。通过扩展质量密度相关模型（CDDM），在有效质量里面加入了同位旋依赖性，我们研究了夸克物质的对称能以及奇异夸克物质和夸克星的性质。我们发现，尽管通过质量密度相关模型给出的夸克星的最大质量远小于两倍的太阳质量，但是我们一旦把同位旋效应加入了等效质量里面，得到了同位旋质量密度相关模型以后（confined-isospindensity-



dependent-mass (CIDDM)), 通过适当地在有效质量里面加入同位旋依赖性, 奇异夸克物质的性质会改变很大, 而且最大的两倍太阳质量的脉冲星也可以用夸克星来很好地描述。

2.1.2 模型的提出

根据 Bodmer-Witten-Terazawa 的假设^[11,15], 奇异夸克物质有可能构成 QCD 物质 (强相互作用物质) 的最稳定的基态。之后, Farhi 和 Jaffe 发现了奇异夸克物质在接近核物质饱和密度的时候会很稳定^[16]。奇异夸克物质的性质一般不能从 PQCD 和 LQCD 的直接计算中得到, 我们已经提到过, 这是因为奇异夸克物质密度有限而且能量并不高。为了更好的理解奇异夸克物质的性质, 人们已经构造了很多基于 QCD 的有效唯象模型, 比如 MIT 袋模型^[11,16,17,22,37], Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型^[21,38-40], PQCD 相关的模型^[41-47], Dyson-Schwinger 相关的方法^[48-50], CDDM 模型^[51-62] 还有准粒子袋模型^[23,63-66]。在极高密奇异夸克物质的状态下, 有可能会出颜色味锁 color-flavor-locked (CFL)^[67] 的现象, 其中 u,d,s 三味夸克的流夸克质量起得作用很小, 无法和化学势相比, 所以三味夸克的比相等, 而且由于电中性条件, 轻子数为零。

在夸克物质的模型里面, 如何处理夸克的禁闭是最重要的事情之一。MIT 袋模型和它的袋常数密度相关的衍伸形式给我们提供了一些很好的处理夸克物质禁闭的手段。此外, 还有一些处理夸克禁闭的方法, 它们是利用了夸克物质的有效质量, 把夸克-夸克之间的相互作用并到了有效质量里面去, 比如 CDDM 模型和准粒子袋模型。这一章, 我们主要集中力量来处理 CDDM 模型, 在这个模型里面可以通过考虑在有效质量里面加入重子数密度相关性来给出夸克物质的禁闭。

在 CDDM 模型里面, 夸克物质里面的有效夸克质量, 考虑了重子数密度相关, 给出了如下的参数化形式:

$$m_q = m_{q0} + m_I = m_{q0} + \frac{D}{n_B^z}, \quad (2.1)$$

在这里, m_{q0} 是夸克的流夸克质量, $m_I = \frac{D}{n_B^z}$ 是夸克物质的相互作用质量, 体现了夸克物质的相互作用, 这里假定为粒子数密度相关。 z 是夸克质量的一个标度常数, D 是决定奇异夸克物质的稳定性条件的参数。之前的 CDDM 模型一般都采用线性禁闭, 也就是假定 $z = 1$, 并且 D 采用了著名的 MIT 袋常数的三倍。加入了 s 夸克之后, CDDM 模型就用来研究奇异夸克物质的一些性质。很明显, CDDM 模型可以通



过有效质量里面加入重子数密度相关，复合了QCD 的两个基本的性质：夸克禁闭和渐近自由，也就是： $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_I = 0$ 和 $\lim_{n_B \rightarrow 0} m_I = \infty$. 对于两位夸克物质 u - d 夸克物质，手征对称性会在高密度处恢复，如果我们把 u , d 夸克流夸克质量设为零，这时候就有 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = 0$ 。

在CDDM里面，夸克物质的相互作用质量采取了粒子数密度相关，可以唯像地写成 $m_I = \frac{D}{n_B^z}$ ，原则上，这个应该是由非微扰QCD 来进行计算的。如果我们把 m_I 的基于MIT袋模型的袋常数写成线性粒子数密度相关的形式，把标度常数改成改成 $z = 1/3$ [56]。这个修改方法是通过粗糙地近似推导介质手征凝聚和线性禁闭来得到的，并且这个方法已经很早就用来研究奇异夸克物质和夸克星的性质了 [50, 57, 68–71]。在最近的关于夸克星的工作里，人们研究了在很大的夸克质量的标度参数空间的奇异夸克物质的稳定性和对应的夸克星的性质 [72]。他们的结果指出了基于CDDM 的夸克星的最大质量始终在 $1.5M_\odot$ 到 $1.8M_\odot$ 太阳质量之间，这里他们已经用了所有的标度参数了。这也暗示了，PSR J1614-2230 给出的 $1.97 \pm 0.04M_\odot$ 的致密星体，是不能够用CDDM模型以夸克星来解释的。特别是在 $z = 1/3$ 的时候，只有 $1.65M_\odot$ 太阳质量，远小于两倍太阳质量。

物理上来说，在夸克物质里面，夸克-夸克有效相互作用应该要考虑同位旋相关性。基于手征微扰理论，最近的研究表明 [73]，介质里面的粒子数相关的手征凝聚也可以从QCD求和规则里面得到验证 [74, 75]。另外，夸克物质里面的夸克-夸克相互作用可以通过夸克对的产生和红外发散来屏蔽掉，并且这个屏蔽长度也是同位旋相关的 [76]。这些特征暗示了夸克物质的有效质量应该是同位旋相关的——但是CDDM模型里面并没有考虑这一点。然而，夸克物质的有效质量里面的同位旋相关的细节我们并不知道，并且原则上，这些是非微扰QCD的计算来决定的。在我们现在的工作里，我们推广了CDDM 模型，并且于夸克-夸克有效相互作用里面加入了同位旋相关性，在加入的过程中，我们考虑了一种唯像的参数化形式，这个形式服从了基本的QCD的精神：渐近自由和夸克禁闭还有同位旋对称性等等，对于同位旋非对称的夸克物质的有效夸克质量，我们加入了同位旋非对称度 δ ，也就是：

$$\begin{aligned} m_q &= m_{q_0} + m_I + m_{iso} \\ &= m_{q_0} + \frac{D}{n_B^z} - \tau_q \delta D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

在这里， D_I, α, β 是用来决定夸克物质里面夸克-夸克有效相互作用的同位旋依赖性， τ_q 是同位旋量子数，在这里我们定义：当 $q = u$ (u 夸克) 时， $\tau_q = 1$ ；当 $q = d$ (d 夸克) 时， $\tau_q = -1$ 。



克)时, $\tau_q = -1$, 最后对于 $q = s$ (s 夸克), $\tau_q = 0$ 。我们还可以给出夸克物质中的同位旋非对称度的定义来:

$$\delta = 3 \frac{n_d - n_u}{n_d + n_u}, \quad (2.3)$$

此不对称度等于 $-n_3/n_B$, $n_3 = n_u - n_d$ 是同位旋密度, $n_B = (n_u + n_d)/3$ 是两味 u-d 夸克物质的总的重子数密度。以上的关于 δ 的夸克物质里面的定义在很多文献里面都有广泛的应用^[34-36,77]。我们注意到, 在夸克物质里面, $\delta = 1(-1)$ 可以把夸克物质从纯中子物质转变成纯质子物质, 这个和一般我们在核物质里面的不对称度的定义是自洽的, 也就是 $\frac{\rho_n - \rho_p}{\rho_n + \rho_p} = -n_3/n_B$ 。

在方程(2.2), 最后一项 m_{iso} 提供了一个简单和快捷的唯像参数化形式来处理有效夸克质量, 并且还考虑了渐近自由和夸克禁闭。实际上, 人们可以看出当 $\alpha > 0$ 或者 $\alpha = 0$ 时, 夸克物质的禁闭条件 $\lim_{n_B \rightarrow 0} m_I = \infty$ 就可以达到。特别对于 $\alpha = 0$ 的情况, 有效夸克质量甚至在重子数密度等于零的时候, 就会产生一定的同位旋劈裂。另外, 如果 $\beta > 0$, 我们可以得到 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_{iso} = 0$, 并且近似的渐近自由 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = 0$ 也可以得到。因此, 一般来说, 参数 α 和 β 应该都大于零。对于不同的 α 和 β , 可以灵活地给出不同的同位旋相关质量的密度依赖性, 还可以给出夸克物质的不同的密度依赖性。在我们的工作里面, 我们通过假定夸克物质对称能有一些经典上的对应来约束 α 和 β 这两个参数。 D_I 这个参数可以用来调节同位旋相关的有效夸克质量的强度。另外, 对于夸克质量标度参数 z , 在这个工作里, 我们主要把注意力集中在 $z = 1/3$, 这个可以通过介质里面的手征凝聚和线性禁闭来近似地给出来^[56]。然而, 我们还可以研究一下自由的改变夸克质量标度参数 z 来看看我们之前给出的结果有什么变化。很显然, 在推广的 CIDDM 模型, 方程(2.2)的有效夸克质量可以满足 u, d 夸克的交换对称性, 这个是满足强相互作用下的同位旋对称性的。因此, 方程(2.2)的同位旋相关有效质量的唯像参数化形式是个一般情况的表达式, 并且遵循 QCD 的基本特征。虽然其他的函数形式也可以用来描述有效夸克质量的同位旋, 但是 m_{iso} 的具体表达形式并不十分重要, 只要它的参数选取和渐近自由, 夸克禁闭, 同位旋不对称度和一些对称能的经验形式自洽就行。

2.2 夸克物质的对称能

和核物质的情况类似^[78], 由 u, d 和 s 夸克组成的夸克物质的物态方程, 在这里我们用每核子能量来进行表示, 然后把它按照同位旋不对称度 δ 来进行展开:

$$E(n_B, \delta, n_s) = E_0(n_B, n_s) + E_{\text{sym}}(n_B, n_s)\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^4), \quad (2.4)$$



在这里， $E_0(n_B, n_s) = E(n_B, \delta = 0, n_s)$ 是 u - d - s 三味夸克物质的每核子能量，其中 u 夸克的粒子数密度和 d 夸克的相等。夸克物质的对称能的表达式 $E_{\text{sym}}(n_B, n_s)$ 可以写成：

$$E_{\text{sym}}(n_B, n_s) = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 E(n_B, \delta, n_s)}{\partial \delta^2} \right|_{\delta=0}. \quad (2.5)$$

在方程(2.4)里面，同位旋不对称度 δ 所对应的奇数项是没有的，原因是在夸克物质里面，忽略了库仑相互作用，使得 u, d 夸克具有交换对称性。同位旋不对称度 δ 的高阶项的系数非常小，这个会在下面的工作里面指出来。忽略了 (2.4) 里面的高阶项的效应，我们可以给出一个经验公式，对于同位旋非对称的夸克物质的物态方程可以采用抛物线近似： $E(n_B, \delta, n_s) \simeq E_0(n_B, n_s) + E_{\text{sym}}(n_B, n_s)\delta^2$ ，并且，夸克物质的对称能也可以近似地通过一下的表达式来求解：

$$E_{\text{sym}}(n_B, n_s) \simeq \frac{1}{9} [E(n_B, \delta = 3, n_s) - E(n_B, \delta = 0, n_s)]. \quad (2.6)$$

基于这一章的工作使用的模型参数，我们已经验证抛物线近似是一个非常好的近似，但在之后的文章里还是使用精确的夸克物质对称能的解析表达式处理我们的有关对称能的所有的计算。

在含有 u, d, s 三味夸克的夸克物质里面，重子数密度为 $n_B = (n_u + n_d + n_s)/3$ ，我们可以给出夸克物质的粒子数密度的表达式：

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^{\nu_i} k^2 dk = \frac{\nu_i^3}{\pi^2}, \quad (2.7)$$

这里， $g_i = 6$ 表示的是夸克物质的简并因子， $\nu_i (i = u, d, s)$ 是不同味夸克的费米动量。进而，我们可以给出 u, d 夸克的费米动量来：

$$\begin{aligned} \nu_u &= (1 - \delta/3)^{\frac{1}{3}} \nu, \\ \nu_d &= (1 + \delta/3)^{\frac{1}{3}} \nu, \end{aligned} \quad (2.8)$$

这里面 ν 是对称 u - d 夸克物质的费米动量，此时的夸克的粒子数密度是： $n = 2n_u =$



$2n_d$ 。总的u-d-s夸克物质的能量密度的表达式，我们也可以一下子给出来：

$$\begin{aligned}\epsilon_{uds} &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{(1-\delta/3)^{\frac{1}{3}}\nu} \sqrt{k^2 + m_u^2} k^2 dk \\ &+ \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{(1+\delta/3)^{\frac{1}{3}}\nu} \sqrt{k^2 + m_d^2} k^2 dk \\ &+ \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{\nu_s} \sqrt{k^2 + m_s^2} k^2 dk.\end{aligned}\quad (2.9)$$

利用(2.4)的同位旋密度相关的有效质量的表达式，我们可以获得夸克物质对称能的表达式：

$$\begin{aligned}E_{\text{sym}}(n_B, n_s) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_{uds}/n_B}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0} \\ &= \left[\frac{\nu^2 + 18m D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B}}{18\sqrt{\nu^2 + m^2}} \right. \\ &\quad \left. + A + B \right] \frac{3n_B - n_s}{3n_B},\end{aligned}\quad (2.10)$$

这里面

$$A = \frac{9m^2}{2\nu^2\sqrt{\nu^2 + m^2}} (D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B})^2, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{9}{4\nu^3} \left[\nu\sqrt{\nu^2 + m^2} - 3m^2 \ln \left(\frac{\nu\sqrt{\nu^2 + m^2}}{m} \right) \right] \\ &\quad \times (D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B})^2,\end{aligned}\quad (2.12)$$

其中 $m = m_{u0}$ (or m_{d0}) $+ \frac{D}{n_B}$ ，我们规定 $m_{u0} = m_{d0} = 5.5$ MeV, $m_{s0} = 80$ MeV。在CDDM模型里面，夸克物质的对称能可以简化为：

$$E_{\text{sym}}(n_B, n_s) = \frac{1}{18} \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2 + m^2}} \frac{3n_B - n_s}{3n_B}. \quad (2.13)$$

还应该注意，夸克物质的对称能一般还依赖到夸克物质中s夸克的组分，因为s夸克对重子数 n_B 有贡献。对于两味的u-d夸克物质，夸克物质的对称能就会简化到大家熟知的形式： $E_{\text{sym}}(n_B) = \frac{1}{18} \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu^2 + m^2}}$ 。



2.2.1 奇异夸克物质的性质

对于奇异夸克物质，我们假定里面的中微子是自由的，并且里面的组分，u,d,s夸克和电子构成了beta-稳定的电中性条件。弱相互作用下的beta-稳定条件可以写成如下的形式：

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s, \quad (2.14)$$

在这里， μ_i ($i = u, d, s, e^-$) 是奇异夸克物质里的粒子的化学势。进而，我们可以写出电中性条件：

$$\frac{2}{3}n_u = \frac{1}{3}n_d + \frac{1}{3}n_s + n_e. \quad (2.15)$$

奇异夸克物质里面粒子的化学势也可以写出表达式：

$$\begin{aligned} \mu_i = \frac{d\epsilon}{dn_i} &= \sqrt{\nu_i^2 + m_i^2} + \sum_j n_j \frac{\partial m_j}{\partial n_B} \frac{\partial n_B}{\partial n_i} f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \\ &+ \sum_j n_j \frac{\partial m_j}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial n_i} f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

这里面

$$f(x) = \frac{3}{2x^3} \left[x\sqrt{(x^2 + 1)} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right], \quad (2.17)$$

ϵ 是奇异夸克物质的总的能量密度。我们可以清楚地看出，在(2.16)里面，奇异夸克物质里夸克物质的化学势的表达式，对比费米气体的化学势，会多出两个附加项，这个就是由夸克物质的同位旋和粒子数密度相关的有效质量引起的。于是我们可以给出来u夸克的解析的化学势的表达式：



$$\begin{aligned}
\mu_u = & \sqrt{\nu^2 + m_u^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} n_j f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \\
& \times \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right] \\
& + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left[n_u f\left(\frac{\nu_u}{m_u}\right) - n_d f\left(\frac{\nu_d}{m_d}\right) \right] \\
& \times \frac{6n_d}{(n_u + n_d)^2}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

对于 d 夸克和 s 夸克, 我们分别有:

$$\begin{aligned}
\mu_d = & \sqrt{\nu^2 + m_d^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} n_j f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \\
& \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right] \\
& + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left[n_d f\left(\frac{\nu_d}{m_d}\right) - n_u f\left(\frac{\nu_u}{m_u}\right) \right] \\
& \times \frac{6n_u}{(n_u + n_d)^2}, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\mu_s = & \sqrt{\nu_s^2 + m_s^2} + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} n_j f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \\
& \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

对于电子, 我们也可以给出化学势表达式

$$\mu_e = \sqrt{3\pi^2 \nu_e^2 + m_e^2}. \tag{2.21}$$



奇异夸克物质的压强也可以给出

$$\begin{aligned}
P &= -\epsilon + \sum_{j=u,d,s,e} n_j \mu_j \\
&= -\Omega_0 + \sum_{i,j=u,d,s,e} n_i n_j \frac{\partial m_j}{\partial n_B} \frac{\partial n_B}{\partial n_i} f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \\
&\quad + \sum_{i,j=u,d,s,e} n_i n_j \frac{\partial m_j}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial n_i} f\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right), \tag{2.22}
\end{aligned}$$

这里 $-\Omega_0$ 是自由粒子的贡献，并且 Ω_0 也可以解析地给出表达式

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= - \sum_{j=u,d,s,e} \frac{g_j}{48\pi^2} \left[\nu_j \sqrt{\nu_j^2 + m_j^2} (2\nu_j^2 - 3m_j^2) \right. \\
&\quad \left. + 3m_j^4 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\nu_j}{m_j}\right) \right]. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

因为在夸克化学势里面附加的那几项是关于有效质量里面粒子数和同位旋相关的量，所以压强里面也会有些相关的附加项出来。包括了这些项，才能够给出热力学的模型的自洽性，这也就是著名的Hugenholtz-Van Hove定理（HVH定理）。

2.3 结果和讨论

2.3.1 夸克物质的对称能的计算

首先，我们先考虑 $z = 1/3$ 的情况。在图2-1里面，我们给出了CIDDM模型里面的夸克物质对称能的重子数密度相关性，我们给出了三套不同的参数：DI-0, DI-300, DI-2500。我们还考虑了两种典型的情况，第一种是两味u-d夸克物质，其中s夸克的粒子数密度等于零；第二种是u-d-s奇异夸克物质，我们把s夸克的粒子数密度设为重子的粒子数密度。后者可以粗略地和夸克星里面的情况相关，因为在夸克星内部，粒子数密度非常大，所以s夸克的粒子数密度和u-d夸克的基本一样。为了比较，我们在图2-1里面也考虑了核物质的对称能，我们是从相对论评剧场里面提取出来的（Relativistic mean field theory (RMF)）。我们考虑了NL $\rho\delta$ 相互作用^[80]，这个相互作用里面包含了同位旋矢量-标量介子 δ 介子场，同时这个相互作用还是从拟合非对称核物质的经验性质里面给出来的，这套相互作用还可以合理地很好地描述大数原

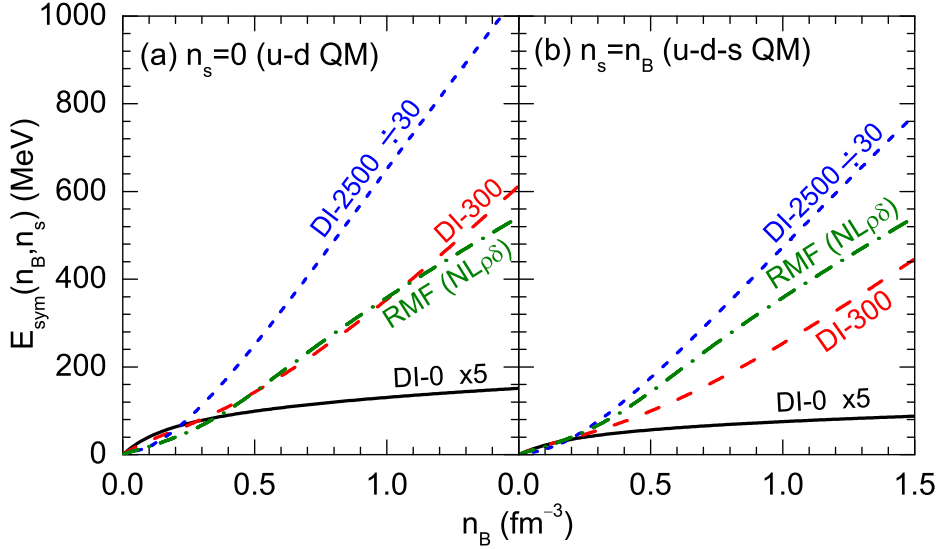


图 2-1: CIDDM模型里面给出, 基于三套不同的参数: DI-0, DI-300, DI-2500, 夸克物质的对称能随重子数密度变化的情况。两味 ud 夸克物质 ($n_s = 0$) 的情况见左图; 右图是 $u-d-s$ 夸克物质的情况, 这里面 $n_s = n_B$ 。我们还选取了相对论平均场 (Relativistic mean field theory (RMF)) 里面的 $NL\rho\delta$ 相互作用来进行比较。我们发现, 对于DI-2500这套参数, 对称能的取值大约是核物质对称能的三十倍, 而DI-0的情况大约是核物质对称能的五分之一^[79]。

Figure 2-1: The quark matter symmetry energy as a function of baryon number density in the CIDDM model with three parameter sets, i.e., DI-0, DI-300, and DI-2500. The two-flavor $u-d$ quark matter with $n_s = 0$ (left window) and the $u-d-s$ quark matter with $n_s = n_B$ (right window) are considered. The nuclear matter symmetry energy from the RMF model with interaction $NL\rho\delta$ is also included for comparison. The symmetry energy values from DI-2500 have been divided by a factor of 30 while those of DI-0 have been multiplied by a factor of 5.

子核的结合能和电子半径^[81]。虽然核物质的对称能的粒子数密度依赖程度我们并不知道, 特别是在超过饱和密度的情况^[82], 但是 $NL\rho\delta$ 的结果还是给出了一个典型的核物质对称能的预测。

对于所有的三套参数 DI-0, DI-300, DI-2500, 我们固定了 $z = 1/3$ 。特别是, 对于DI-0的情况, 我们设置 $D_I = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, 这里 $D = 123.328 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-3z}$, 这套参数实际上就是CDDM的参数, 这里面我们用它来做一下比较, 看看同位旋效应加到CDDM模型里面会有什么样的变化。对于参数组DI-300, 我们设置了 $D_I = 300 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.1 \text{ fm}^3$, 和 $D = 115.549 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-3z}$, 这里面的 D_I , α , β 可以使我们得到夸克物质的对称能的重子数相关性基本上和 $NL\rho\delta$ 预测的核物质的对称能基本上一致, 这里面的D参数的选取是依据奇异夸克物质的稳定性的。对比了从DI-300到DI-0的结果, 我们可以看出来如果夸克物质的对称能和核物质的对称能基本上一样的话, 奇异夸克物质和夸克星的性质会受到什么样的影响。对于参数



组DI-2500,我们设置了 $D_I = 2500 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.1 \text{ fm}^3$, 其中 $D = 105.084 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{-3z}$, 并且我们在之后会看到, 这一套参数下给出了能达到1.93 倍太阳质量的夸克星的最小的DI, 这个质量是和最近的大质量夸克星PSR J1614-2230 的实验探测结果自洽的, 测得范围是 $1.97 \pm 0.04 M_\odot$ 。

我们还能从图2-1里看出来, 三套参数 DI-0, DI-300, DI-2500给出了非常不同的粒子数密度相关的对称能的预测, 并且这三套参数可以让我们得到夸克物质对称能的效应。特别是, 我们可以看到DI-300下两味u-d夸克物质的对称能可以完全的和NL $\rho\delta$ 给出的对称能一致, 但是DI-2500所给出的u-d夸克的对称能却有差不多核物质的对称能的五十倍。

另一方面, DI-0所预测的夸克物质的对称能的大小比核物质的对称能要小很多, 在我们之后的计算结果中, DI-0的这套参数所给出的对称能的值和自由夸克费米气体或者正常夸克物质里面的NJL模型给出的对称能的值基本上一样。另外, 我们可以从图2-1看出来, 在u-d-s夸克物质里面增加s 夸克的组分可以减小夸克物质的对称能, 这是因为s夸克给重子数密度 n_B 做了贡献, 因为对称能定义里面重子数密度是在分母上。

在CIDDM模型里面, 我们可以通过增加DI的强度来提高夸克物质对称能的取值。我们应该注意, 对于除了DI之外的其他三个参数 α, β, D (对于D的参数的调节是先令 α, β 保持不变) 的选取都是首先要满足奇异夸克物质beta稳定条件下的稳定性条件的。之后我们的计算结果里面, 可以看出这三套参数DI-0, DI-300, DI-2500都是满足奇异夸克物质的稳定性条件的, 而且我们会进一步地去研究夸克物质的对称能是如何影响到奇异夸克物质和夸克星的性质的。

2.3.2 奇异夸克物质的稳定性

根据Farhi 和 Jaffe的计算^[16], 奇异夸克物质的绝对稳定条件要求奇异夸克物质的每核子能量的最小值要低于已观测到的稳定核的每核子能量的最小值, 也就是我们熟知的 $M(^{56}\text{Fe})c^2/56 = 930 \text{ MeV}$; 同时, beta 稳定条件下, 两味u-d夸克物质的每核子能量的最小值要高于930MeV, 这样才能和标准的核物理自洽起来。这些稳定性条件一般会在夸克物质的模型里面给出非常强的参数空间限制。

图2-2给出了每核子能量和相关的压强作为重子数密度的函数的关系图, 这里面我们考虑了beta- 稳定条件下奇异夸克物质和两味的u-d 夸克物质, 这时候

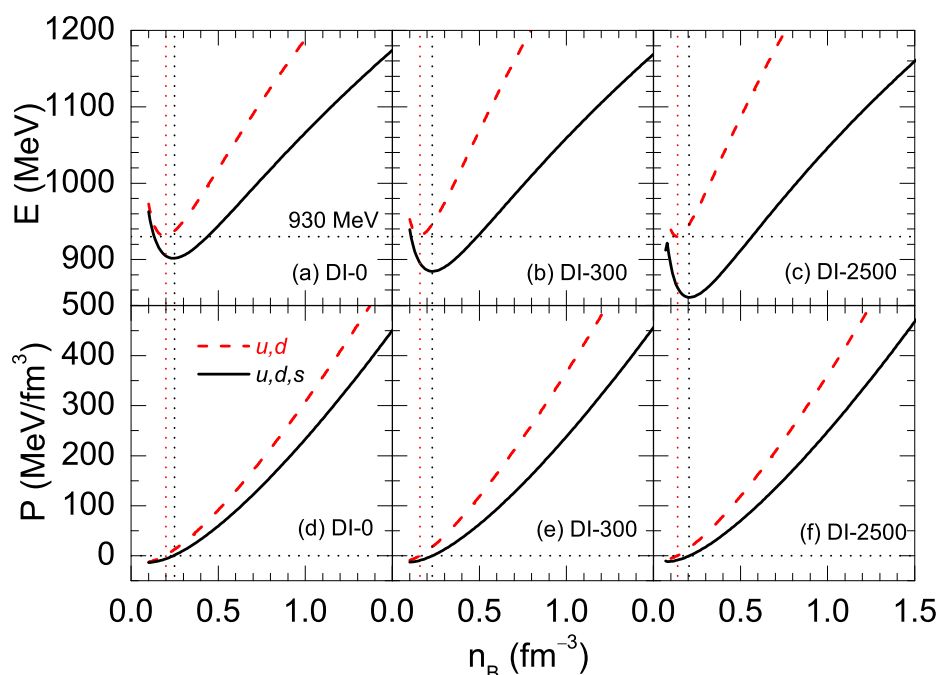


图 2-2: 每核子能量和相应的压强随着奇异夸克物质和两位 u - d 夸克物质的重子数密度变化关系图, 这里面考虑了CIDDM模型里面的 β 稳定条件, 参数选取是DI-0, DI-300, and DI-2500^[79]
 Figure 2-2: Energy per baryon and the corresponding pressure as functions of the baryon density for SQM and two-flavor u - d quark matter in β -equilibrium within the CIDDM model with DI-0, DI-300, and DI-2500^[79].

的CIDDM模型我们还是考虑了DI-0, DI-300和 DI-2500 三套参数。我们可以看出, β -稳定条件下对于这三套参数DI-0, DI-300, 和 DI-2500, 两味夸克物质的每核子能量的最低点高于930MeV, 同时, 奇异夸克物质的每核子能量最低点低于930MeV, 这个是满足绝对稳定条件的。进一步, 我们可以从图2-2 中看到, 对于所有的情况, 每核子能量的最低点所对应的重子数密度, 就是零压点的重子数密度, 这个和热力学自洽的要求是一样的。特别是, 我们注意到, 奇异夸克物质的零压点分别是 0.24 fm^{-3} , 0.23 fm^{-3} , 0.21 fm^{-3} 分别对应于这三套参数 DI-0, DI-300, 和 DI-2500, 这个和正常核物质的饱和密度 0.16 fm^{-3} 相差不远。我们还可以进一步从图里面看到, 当DI增加, 也就是夸克物质的对称能增加的时候, 奇异夸克物质的物态方程变得更硬了。另外, 我们检验了基于已经计算过的三套参数的压强和能量密度所给出的夸克物质的声速, 我们发现对于所有的情况, 声速都没有超光速, 这个是满足因果律的。我们还要说明, 这个工作所有的关于夸克星的计算都没有超光速的现象。

在图2-3里面, 我们给出了CIDDM模型里面的奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化, 仍然是考虑了DI-0, DI-300, and DI-2500三套参数。我们发现, 当

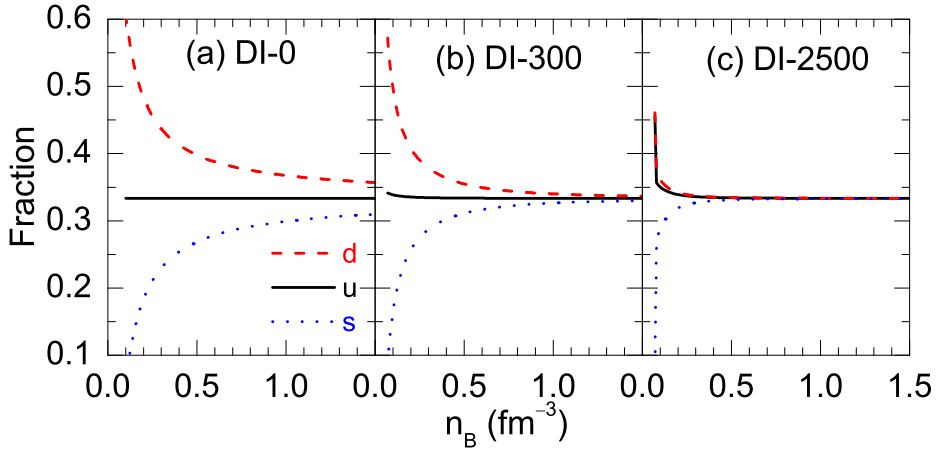


图 2-3: CIDDMM模型里面的奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化^[79].

Figure 2-3: Quark fraction as a function of the baryon density in SQM within the CIDDMM model with DI-0, DI-300, and DI-2500^[79].

夸克物质对称能增大的时候，也就是说DI增大的时候，u，d，s三味夸克的夸克组分之间的差异越来越小。当夸克物质的对称能并不是很大的时候（对比DI-0, DI-300两种情况），u，d，s夸克组分差距迥异，特别是在低重子数密度的时候，这个会在奇异夸克物质里面产生一个很大的同位旋非对称度。另外，在很大的夸克物质的对称能的情况下（比如DI-2500），u，d，s夸克的组分之间的差异会大幅度地减小。特别是，对于DI-2500的情况，可以很清楚地看到，u，d，s夸克的组分变得基本上一致，并且当 $n_B \gtrsim 0.4 \text{ fm}^{-3}$ 的时候趋向0.33，这个和CFL所给出来的图像十分类似。在中子星物质里面，相类似的对称能的效应也能够观测到，也就是说，一个非常大的核物质对称能可以给出一个非常大的质子比率，并且能够因此减少中子和质子在beta-稳定条件的中子星物质里面的组分差异^[83]。

图2-4我们给出了CIDDMM模型下，考虑奇异夸克物质条件，有效夸克质量随着重子数密度的变化。考虑三组参数DI-0, DI-300, DI-2500. 可以看出，在所有的情况里面，有效夸克质量会随着重子数密度的减小显著地增大，这个可以反映出夸克禁闭的性质。更进一步地说，我们可以看出在DI-300和DI-2500 这些参数下，奇异夸克物质里面的u和d 夸克物质的有效夸克质量可以看到一个清晰的同位旋劈裂，同时d夸克的有效质量要比u夸克的有效质量要大。这些特征解释了夸克-夸克有效相互作用在同位旋非对称夸克物质里面，利用现在的CIDDMM模型，所给出的夸克物质的同位旋相关性。我们应该注意到，DI-2500这套参数下，我们看了奇异夸克物质的u,d夸克的有效夸克质量，发现它们的同位旋劈裂要比DI-300的有效夸克质量的劈裂要

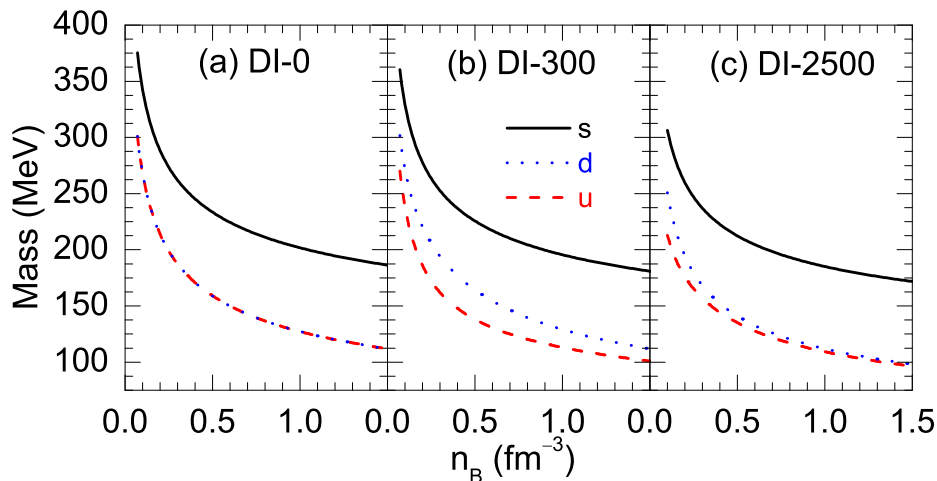


图 2-4: CIDDM模型下, 考虑奇异夸克物质条件, 有效夸克质量随着重子数密度的变化。考虑三组参数DI-0, DI-300, DI-2500^[79]。

Figure 2-4: Equivalent quark mass as a function of the baryon density in SQM within the CIDDM model with DI-0, DI-300, and DI-2500^[79] .

小。产生这种现象的原因就是u,d夸克的有效夸克质量在奇异夸克物质的情况下的同位旋劈裂也和同位旋的非对称度有关; 而这个非对称度的取值, 对于DI-2500 这个情况, 要比DI-300这个情况的取值要小的多, 这个我们可以从图2-3看出。特别是, 我们可以从2-4看出来, DI-2500参数下, u, d夸克的有效夸克质量的劈裂在奇异夸克物质的情况下以及高重子数密度时的取值很小, 原因在于这个时候的奇异夸克物质的同位旋非对称度取值很低, 这个可以从图2-3里面看出来。

2.3.3 夸克星

从图2-2给出的奇异夸克物质的物态方程里面, 人们可以通过求解Tolman-Oppenheimer-Volkov 方程来获得静止夸克星的质量半径关系。在图2-5里面, 我们给出了在CIDDM模型的情况下, 考虑了DI-0, DI-300, 和 DI-2500 这三组参数的静止夸克星的质量半径关系。对于参数DI-2500, 我们也可以从图2-5里面找到以3.15ms为周期旋转的旋转夸克星的结果(这个是PSR J1614-2230里面测的实验值^[18])。这里面我们用了RNS 的程序^[84-86]。其中的旋转夸克星的半径的取值就是赤道半径。

从图2-5里, 我们可以看出, 对于参数组DI-0, 静止的夸克星的最大质量只有1.65倍的太阳质量, 半径大约9.6公里, 这个实际上就是CDDM模型可以算出的夸克星的最大质量, 而且这个时候对应的对称能非常小。因此, DI-0这种情况, 夸克星的最

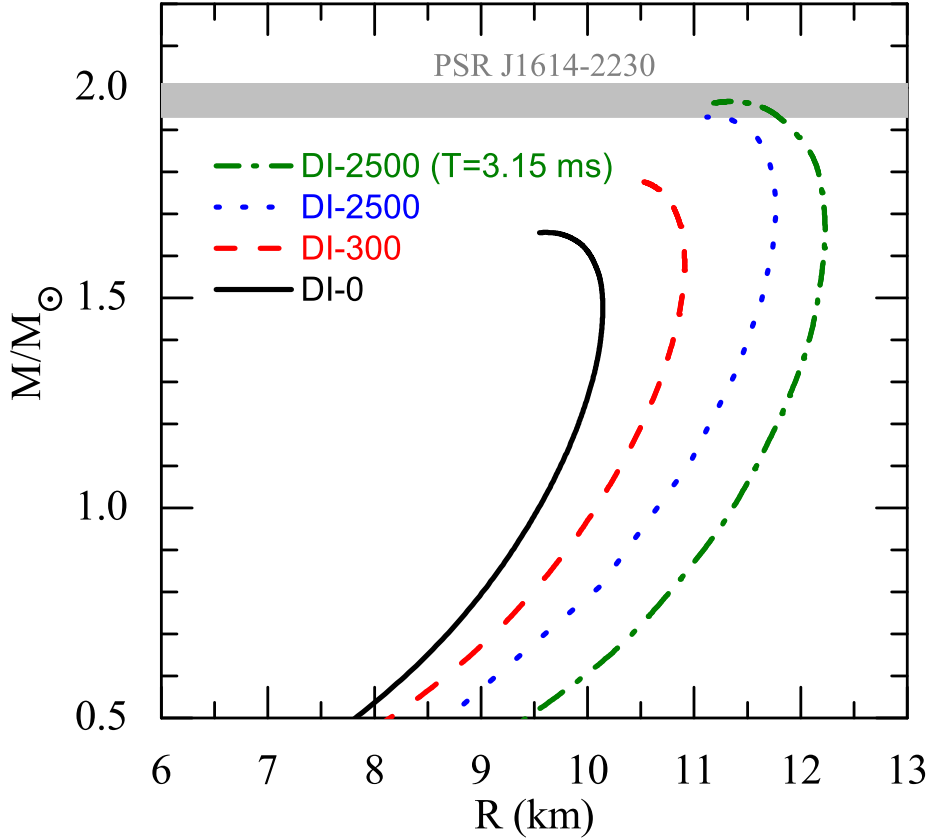


图 2-5: 考虑三组参数DI-0, DI-300, DI-2500的情况下, CIDDm模型里面的静止夸克星的质量半径关系。我们还给出了考虑了旋转周期3.15ms 的夸克星的结果, 这里面我们的半径取赤道半径。覆盖的区域带表示出了PSR J1614-2230 的夸克星的质量范围 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ [79]。

Figure 2-5: Mass-radius relation for static quark stars within the CIDDm model with DI-0, DI-300, and DI-2500. The result for rotating quark stars with a spin period of 3.15 ms is also shown for the case of DI-2500 with the radius at the equator. The shaded band represents the mass of pulsars of $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ from PSR J1614-2230 [79].

大质量要远远比PSR J1614-2230 给出的 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ 来的小。对于DI-300这一套参数, 我们之前给出了, 对于夸克物质的对称能, 这套参数的取值基本上和核物质的对称能的大小一样。然后我们发现, 这套参数所能给出的最大质量可以增加至1.78倍太阳质量, 相应的半径可以达到10.40公里。这个说明了, 增加DI, 也就是增加夸克物质的对称能, 会使得CIDDm模型里面的静止夸克星的最大质量显著地提升。

然而, DI-300这种情况, 夸克星的最大质量也要远远比PSR J1614-2230 给出的 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ 来的小。通过进一步地增加DI的取值并且调节 D , α 和 β 这三个参数来满足奇异夸克物质的稳定性, 同时还要考虑和 $NL\rho\delta$ 给出的核物质的对称能的重



表 2-1: The maximum mass, the corresponding radius and central baryon number density of the static quark stars, the maximum rotational frequency f_{max} for maximum-mass static quark stars as well as the corresponding gravitational mass and equatorial radius at f_{max} , within the CIDDM model with DI-0, DI-300, and DI-2500.

	DI-0	DI-300	DI-2500
$M/M_{\odot}(static)$	1.65	1.78	1.93
$R(km)(static)$	9.60	10.40	11.12
$Central\ density(fm^{-3})$	1.31	1.11	1.06
f_{max} (Hz)	1680	1547	1458
M/M_{\odot} (at f_{max})	1.78	2.12	2.43
$R(km)$ (equator at f_{max})	9.93	11.6	14.2

子数相关性差不多的夸克物质的对称能, 我们发现, DI应该比 $2500\text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$ 来得大。这样才能给出一个 $1.93M_{\odot}$ 的夸克星, 所以我们才选取了DI-2500这一组参数。在图2-5所示, DI-2500的参数组给了我们一个增加到 $1.93M_{\odot}$ 的静止夸克星, 这时候的半径是11.12公里, 这个和我们已经观测到的PSR J1614-2230 给出的 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ 完全一致。进一步, 我们又考虑了夸克星的自转, 这里面我们用PSR J1614-2230 给出的3.15ms作为我们的夸克星的旋转周期, 相应的半径是11.33公里对于DI-2500这套参数。这个和PSR J1614-2230 给出的 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ 的中心值一样。我们的结果暗示了在CIDDM 模型下(这个时候的质量标度参数 $z=1/3$), 通过在CIDDM模型里面使用一个更大的DI参数(这样能实现有效夸克质量的强同位旋效应)可以描述实验上观测的 $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ 的夸克星。这也就是说, 夸克物质的对称能的大小要比核物质的对称能的大小要大很多。这些特征表明PSR J1614-2230可以在CIDDM的条件下变成夸克星, 如果这个实验探测的星体真的是夸克星的话, 那么我们可以给出一个夸克物质里面的非常强的同位旋矢量性质的约束, 特别是夸克物质的对称能。

对于奇异夸克物质里的物态方程, 我们可以给出它所对应的夸克星的最大旋转频率, 这个最大旋转频率可以通过它的静止质量 M_{\odot}^{stat} 和半径 $R_{M_{\odot}}^{stat}$ 来给出来, 下面的就是经验公式^[87]: $\Omega_{max} = 7730(M_{\odot}^{stat}/M_{\odot})^{1/2}(R_{M_{\odot}}^{stat}/10\text{km})^{-3/2}\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

在图表1里面, 我们列出来了最大质量的静止夸克星的最大旋转频率 f_{max} , 还



有相关的引力质量和在最大旋转频率的赤道半径。这里面，我们给出了CIDDM模型的三套参数DI-0, DI-300, 和 DI-2500。为了考虑的更完备一些，我们还包括了图表1里面的最大质量的所有结果，相关的半径，中心重子数密度，这些都是静止夸克星的情况。在图表1 里面，我们可以看出最大旋转频率 f_{max} 随着DI增大而减小，同时相关的质量和赤道半径反而会增大。特别是，对于参数组DI-2500，我们给出了 $f_{max}=1458\text{HZ}$ ，相关的质量是 $2.43M_{\odot}$ ，半径可以达到14.2km。这个已经是我们采用的DI-2500 这套参数所能给出的最大的夸克星的质量了。

2.3.4 夸克物质标度参数的效应

如我们之前所说的，夸克质量的标度参数 z 实际上是CDDM模型的一个唯像参数，而且原则上，它应该由非微扰QCD的计算来决定出来。在最初的CDDM模型里面^[51]，基于MIT 袋模型的论调，采用了 $z=1$ 。而考虑了比较粗糙的介质手征凝聚和线性禁闭^[56] 可以给出夸克质量的标度参数 $z=1/3$ ，这个在之前的计算里面我们已经给出来了^[72]。这些工作指出来仅仅凭借介质里面的手征凝聚的一届展开来做近似，不能完备地描述真实的夸克物质。实际上，这里也有很多关于其他的夸克质量标度的文章^[58,72,76,88]。因此，我们很想看看如果我们把夸克物质的标度参数 z 可以自由改变的话，以上的计算结果会怎么变。我们已经给出来了，CDDM模型（也就是CIDDM 模型里面DI=0 的情况）是不能够给出满足PSR J1614-2230探测结果的夸克星的。在以下的分析中，我们会寻找一下最小的DI（也就是最小的夸克物质的对称能）情况下基于CIDDM 模型能否给出1.93 倍太阳质量的夸克星。

为了检验夸克物质标度参数 z 的效应和寻找最小的夸克物质对称能来给出1.93倍太阳质量的夸克星，我们假设夸克物质的对称能和我们一般习惯上用的高密处的NJL 模型或者自由费米夸克气体的对称能的密度相关性一致。这里面我们考虑的密度区域是从 0.25fm^{-3} 到 1.5fm^{-3} ，这是因为低密度的物态方程是不会影响夸克星的结果的，并且我们仍然选择 $\alpha = 0.7, \beta = 0.1 \text{fm}^3$ 。更进一步，对于参数D和DI，我们将它们固定，然后调节不同的标度参数 z ，我们发现这种做法会很大程度改变夸克星的质量，最后 $z=1.8$ 会给出最大的夸克星的质量。对于固定的 $\alpha = 0.7, \beta = 0.1 \text{fm}^3$ ， $z=1.8$ ，我们想要通过调节不同的DI和D来找到能撑起1.93 太阳质量的最小的DI的值。

图2-6左边给出了静止夸克星的最大质量的DI的相关性。在图2-6里面不同的DI下的D参数使得夸克星的最大质量达到最大。可以从图的左边看到夸克星

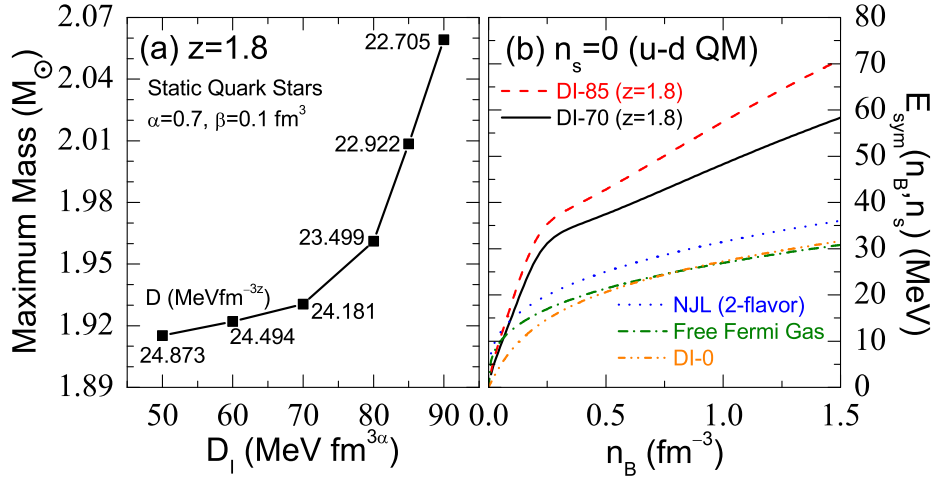


图 2-6: 左图: CIDDM模型里面 $z=1.8$ 的静止的夸克星的最大质量的 D_I 的依赖性。在不同的 D_I 下的 D 参数的取值可以使得夸克星的最大质量变得最大; 右图: 两味 $u-d$ 夸克物质的对称能随着重子数密度的变化关系, 这里面包括DI-70 ($z=1.8$) 和 DI-85 ($z=1.8$)在CIDDM模型里。这些结果里面还包括着DI=0的情况和NJL模型以及自由费米夸克气体的对称能 [79]。

Figure 2-6: Left panel: D_I dependence of the maximum mass of static QS's in the CIDDM model with $z=1.8$. The value of the D parameter at different D_I is obtained so that the QS maximum mass becomes largest. Right panel: The symmetry energy of two-flavor $u-d$ quark matter as a function of baryon number density in the CIDDM model with DI-70 ($z=1.8$) and DI-85 ($z=1.8$). The results of DI-0 as well as the symmetry energy of a free quark gas and normal quark matter within conventional NJL model are also included for comparison [79].

的最大质量和DI这个参数很敏感, 并且随着DI的增大而增大。为了得到比1.93 倍太阳质量的夸克星更大夸克星, 我们找到的最小的DI应该是 $70 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{3\alpha}$, 并且相关的参数组我们设置为DI-70 ($z=1.8$)。对于DI-70 ($z=1.8$), 我们有 $D_I = 70 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{3\alpha}$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.1 \text{ fm}^3$, $D = 24.181 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3z}$, $z = 1.8$ 。这个DI-70 ($z=1.8$) 所能给出的最大质量对应的半径是9.69km, 并且中心重子数密度是 1.3 fm^{-3} , 这个时候的表面 (零压点) 重子数密度是 0.48 fm^{-3} 。

在图2-6的右边的图, 就是CIDDM模型里面DI-70($z=1.8$)参数下两味 $u-d$ 夸克物质对称能的密度相关性。为了便于比较, 我们也包括了DI-0和自由费米气体还有NJL模型的对称能 [38], 这个时候, DI-70($z=1.8$)所给出的对称能大约是费米夸克气体的对称能的两倍, 但是仍然比 $NL\rho\delta$ 所预言的核物质的对称能要小很多。因此, 我们的结果表明, 如果 z 参数可以在CIDDM模型里面自由的调节的话, 夸克物质的对称能可以小于核物质, 但是如果我们要描述PSR J1614-2230所给出的致密星体为夸克星的话, 这个对称能仍然至少是NJL模型或者是自由费米夸克气体的对称能的两倍。有意思的事, 两位色超导相所对应的对称能大约是正常夸克物质的三倍,



和DI-70($z=1.8$)所给出来的对称能接近。

2.3.5 夸克星的最大质量

最近, 实验上探测到了一个新的脉冲星体, 质量是 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ PSR J0348+0432^[89]。这个致密星体是第二个两倍太阳质量左右的脉冲星, 这个也给出了新的最大质量的脉冲星的纪录。我们也很想通过CIDDM模型把这个 PSR J0348+0432以夸克星的形式来模拟出来。另外, 我们还对CIDDM能否预言出更重的夸克星非常有兴趣。

我们已经给出在CIDDM模型里, 静止夸克星的最大质量与夸克物质的对称能(在于DI)和夸克质量的标度参数 z 非常敏感。对于 $z=1/3$, 我们发现静止夸克星的最大质量只能达到 $1.96 M_{\odot}$, 这时候DI已经大于 $3000 \text{ MeV fm}^{3\alpha}$, 如果再增加DI的话, 质量也不会增加了。进一步讲, 我们注意到, 当DI的取值非常大时候(比如 $\text{DI}=3000 \text{ MeV fm}^{3\alpha}$), 改变 α 和 β 也不怎么改变静止夸克星的最大质量(可以从图2-8和以下相关的讨论中看出来)。这些有趣的特征是可以理解的, 因为对于一个非常大的DI, 夸克物质的对称能已经非常大了, 这个时候的uds三味夸克的粒子数密度基本上已经相同(奇异夸克物质), 这个会给出一个非常非常小的同位旋非对称度(图2-3里所示), 所以最终的DI和对称能的效应就会被抵消。这些结果暗示了在CIDDM模型里如果把 z 参数固定在 $z=1/3$, 并不能用来描述两倍太阳质量的脉冲星(比如脉冲星PSR J0348+0432)成为夸克星。我们注意到如果考虑让夸克星按照实验给的39毫秒来转动, 实际上对于夸克星的最大质量没有任何影响。

为了进一步地提升静止夸克星的夸克质量, 我们得在CIDDM模型里面变换不同的质量标度参数 z 。像我们之前展示过的, 夸克质量的标度参数 z 可以很大程度上的影响夸克星的最大质量, 而且对于 $z=1.8$ 的情况, 这个能给出最大质量的静止的夸克星。在图2-6的左边部分, 对于 $z=1.8$, $\alpha=0.7$, $\beta=0.1 \text{ fm}^3$ 这组参数, 我们以前已经探讨过, 可以给出和NJL模型或者自由夸克费米气体所给出的对称能具有差不多的重子数相关性, 这组参数也可以给出DI的最小值达到 $85 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3\alpha}$, ($\alpha=0.7$, $\beta=0.1 \text{ fm}^3$, $D=22.922 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3z}$, $z=1.8$)。在DI-85 ($z=1.8$)这套参数给出的夸克星的最大质量(2.01倍太阳质量)的相对应的半径是9.98km并且此时的中心重子数密度是 1.25 fm^{-3} , 这时候的零压点的密度, 也就是夸克星表面的密度是 0.465 fm^{-3} 。这套参数DI-85 ($z=1.8$)给了我们CIDDM中能给出2.01倍太阳质量的最小的DI(这时候也对应着最小的夸克物质的对称能)。关于CIDDM模型里面



两味u-d夸克的对称能的密度相关性也在图2-6右面给出。我们可以看出, 在DI-85 ($z=1.8$) 这套参数下比DI-70 ($z=1.8$) 这套参数对称能大一些, 但结果仍然是差不多NJL模型和自由夸克费米气体的对称能的两倍。我们的结果给出了个结论: CIDDM 模型可以很好的把PSR J0348+0432描述成为夸克星, 只要我们把 z 也就是夸克质量标度参数作为自由参数, 并且还要有恰当的夸克物质有效质量的同位旋相关性 (也就是夸克物质的对称能)。

图2-6已经表明, 静止夸克星的最大质量会随着DI这个参数的增大而显著地增大。所以我们很有兴趣: 随着DI增大是否存在一个静止的夸克星最大质量的最大值。在图2-7里, 我们给出了和图2-6形式差不多的图, 只不过此时, 我们考虑了更大的DI的取值。从2-7左面的图, 我们可以看到在DI小于 $2000\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ 的时候, 静止的夸克星的最大质量仍然随着DI的增大而快速地增大。之后, 当DI 大于 $2000\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ 的时候 (这个时候静止夸克星的最大质量可以给出2.38倍的太阳质量), 静止夸克星的最大质量开始对于DI不怎么敏感了, 这个和 $z=1/3$ 的情形类似, 此时当DI比 $3500\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ 大的时候, 静止夸克星的最大质量饱和了, 取值为2.39倍的太阳质量。如果我们进一步增加DI的取值, 最终对于静止的夸克星的最大质量就没有什么效果了。从图2-7右边的图里我们可以看出来, 对两味u-d夸克物质的对称能来说, 对称能的大小要比核物质对称能的取值远远超出, 这个时候DI的取值大于 $2000\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3}$ 。这个结果和图2-1左边给出的DI-2500, $z=1/3$ 的情况非常类似。

对于图2-7的结果, 我们固定选择了 $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.1\text{fm}^3$ 这组参数用来遵循NJL 模型和自由费米夸克气体给出的对称能的重子数密度相关性。对于 $DI=3500\text{MeV}\cdot\text{fm}^{-3\alpha}$, 我们发现, 对应不同的 α 和 β , 静止夸克星的最大质量改变非常小。特别是, 当 β 被固定在 0.1fm^3 的时候, 静止夸克星的最大质量非别是2.39倍和2.40倍太阳质量, 分别对应 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 0$ 。当 α 固定在0的时候, 调节 $\beta = 1$ 或 2fm^3 时, 夸克星的最大质量将会保持在一个值, 2.40 倍的太阳质量。为了研究不同的 α 和 β 的取值下夸克物质的对称能怎么改变, 我们在图2-8里面给出了CIDDM 模型里面两味u-d夸克物质的对称能随着不同的 α 和 β 的变化, 这里面我们固定了 $z = 1.8$, $D_I = 3500$ 。和图2-6里左图给出的结果类似, 对于不同的 α 和 β , 我们选择不同的D来给出最大的夸克星的最大质量。我们期望对于非常大的DI, 我们可以看出来, 虽然 α 和 β 实际上也能给出非常不同的两味u-d夸克物质对称能的形状, 但是所有的这些线对应的物态方程都只能给出几乎一样的静止夸克星的最大质量。我们还检查了在DI-85($z=1.8$)的情况下, 固定DI和D, 像图2-8那样改变不同的 α 和 β , 静止夸克星的最大质量。我们的结果发现, 这种情况下, 夸克星的最大质量改变非常小, 仅仅只有0.001个太阳质量左右。在 $n_B = 0$ 和 $\alpha = 0$ 的情况下, 由

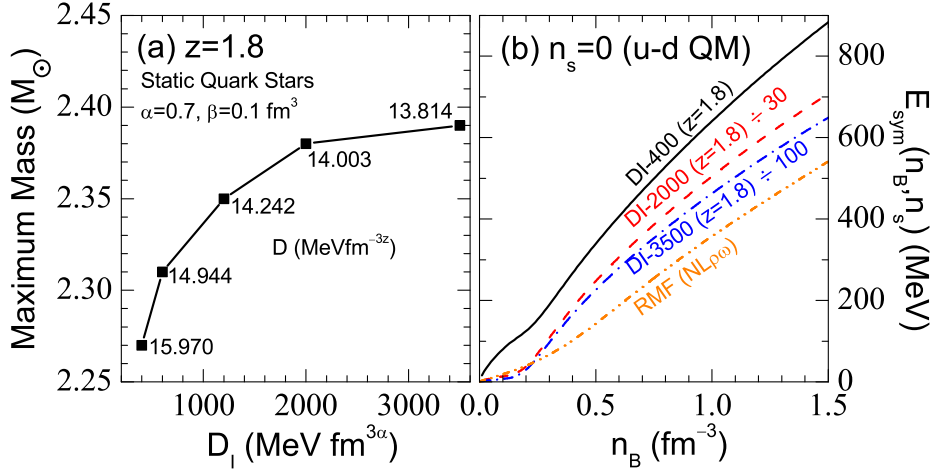


图 2-7: 这张图和图2-6类似但是 D_I 更大。同时在右图也包括相对论平均场 $NL\rho\delta$ 相互作用给出的核物质对称能。DI-2000 ($z = 1.8$) 和 DI-3500 ($z = 1.8$)分别在原来的对称能的取值上除了30和100 [79] .

Figure 2-7: Same as in Fig2-6 but with larger D_I values. The nuclear matter symmetry energy from the RMF model with interaction $NL\rho\delta$ is also included in the right panel for comparison. The symmetry energy values from DI-2000 ($z = 1.8$) and DI-3500 ($z = 1.8$) have been divided by a factor of 30 and 100, respectively [79] .

于非对称夸克物质的有效夸克质量的同位旋劈裂，我们能够发现对称能在 $\alpha = 0$ 的情况下即使零重子数的时候，仍然可以取有限值。从上面的结果和讨论里面，我们可以概括出来静止夸克星的最大质量的取值大约为2.40 倍的太阳质量，如果我们仅仅从CIDDMM模型出发，这个时候的 z 参数和夸克物质对称能的强度都是可以自由改变的。

从图2-7右半部分，我们可以发现当我们把CIDDMM模型里面的 z 参数设置为1.8的时候，给出2.4倍太阳质量所对应的u-d夸克物质的对称能非常大，大约是正常核物质对称能的100倍。而对于 $z=1/3$ 的情况，我们可以看出来这个对称能依然非常大，和 $z=1.8$ 的时候差不多，但是此时所能描述的最大静止夸克星的最大质量为1.96倍太阳质量。这么大的两味u-d夸克物质的对称能明显非常让人吃惊，并且我们十分迫切地想在实验里的可观测量的效应里面发现这种现象。这里，我们还要指出来，即使两味u-d夸克物质的对称能非常大，奇异夸克物质的绝对稳定条件依然能够满足，这个时候，u,d,s夸克物质会在奇异夸克物质里面有着基本相等的组分，从而得到的同位旋非对称度也非常小，和CFL色味锁的图像基本一致。另外，当两味u-d夸克物质的对称能非常大的时候， D_I 也会非常大，这个时候的同位旋非对称夸克物质里面的u夸克的有效质量可能会出现负值，这个就会破坏我们的模型。比如，对

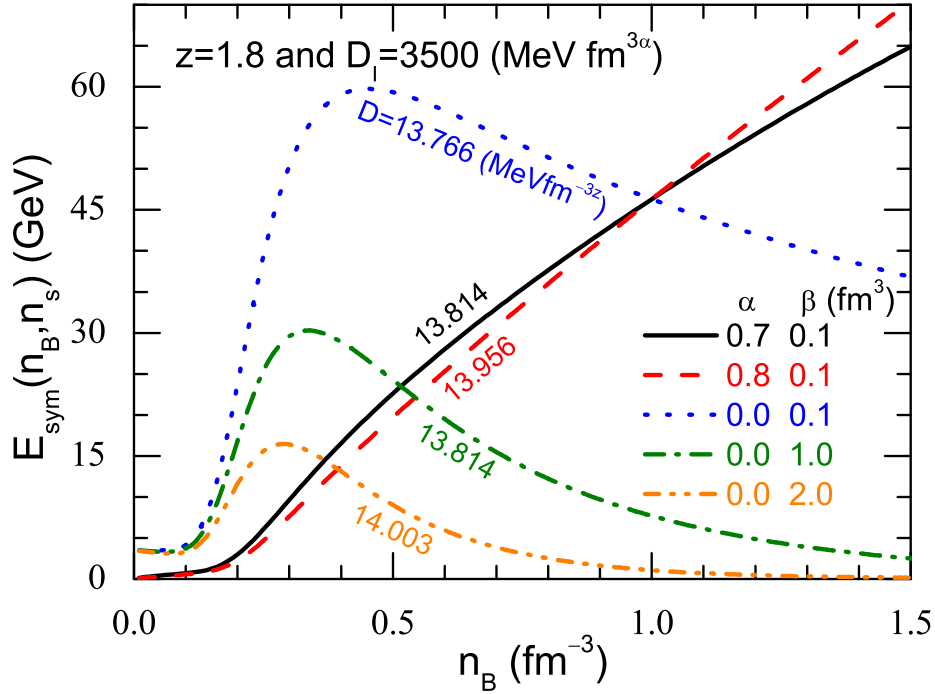


图 2-8: CIDDM模型下两味 u - d 夸克物质对称能的密度相关性, 我们选取 $z = 1.8$, $D_I = 3500 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$, α 和 β 分别取不同的值 [79].

Figure 2-8: Density dependence of the two-flavor u - d quark matter symmetry energy in the CIDDM model using $z = 1.8$ and $D_I = 3500 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$ with different values of α and β . The value of the D parameter corresponding to the configuration of the largest maximum mass of static QS's is also indicated for the different values of α and β [79].

于DI-2500这个情况, 如果我们把同位旋不对称度固定在0.05的时候, u 夸克的有效质量会在重子数密度比 0.98 fm^{-3} 大的情况下变成负值。如果我们把同位旋非对称度固定在0.1时, 相应的负值点会减小到 0.48 fm^{-3} . 这一些特征暗示了, 高密高非对称度的夸克物质会对两味 u - d 夸克物质的对称能的大小有一个非常重要的限制。另外, 两味 u - d 夸克物质的对称能如果非常大, 会很大程度地影响丰中子核物质的极端相对论重离子碰撞 (比如 $\text{Pb} + \text{Pb}$ at LHC/CERN 或者 $\text{Au} + \text{Au}$ at RHIC/BNL) 的部分子动力学里面的性质 [90,91]。并且, 原则上在这些碰撞里面的对称能的性质也可以通过考虑了部分子势能的部分子输运模型来研究。在这种情况下, 结合了夸克星和夸克物质的对称能的限制因素, 极端相对论重离子碰撞可能给夸克物质的对称能和CIDDM里面的 z 参数给出一定的限制。我们的结果给出, 如果我们把PSR J0348+0432 当作是一个夸克星的话, $z=1/3$ 的情况, 就要被排除。

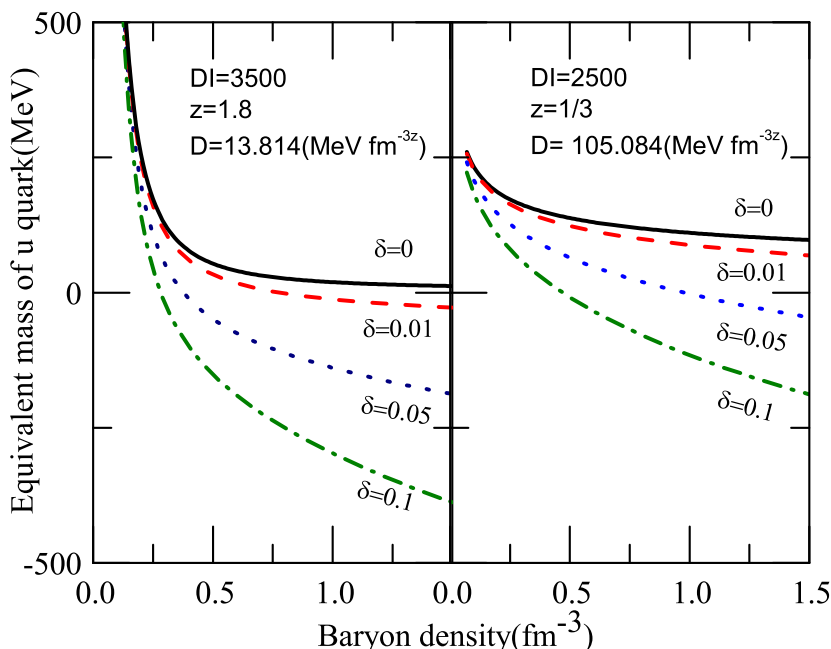


图 2-9: CIDDM模型下u夸克有效质量质量随着不对称度的变化 [79].

Figure 2-9: The equivalent mass of u quark as a function of isospin asymmetry in CIDDM [79].

2.4 零温情况下CIDDM模型的总结与展望

我们已经把禁闭的质量密度相关模型 (CDDM) 扩展到同位旋质量密度相关模型, 并且通过这个模型来给出夸克物质的禁闭性质来。在同位旋质量密度相关模型 (CIDDM) 里面, 我们探索了夸克物质的对称能, 奇异夸克物质的稳定性以及夸克星的性质。我们发现, 如果我们考虑了夸克物质的有效质量的同位旋相关性, 夸克物质的对称能, 奇异夸克物质的性质和夸克星的性质会有非常大程度的改变。我们已经指出来了, 尽管最近的PSR J1614-2230的实验研究不能通过CDDM模型来描述最近实验上给出的 $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ 的夸克星, 但是我们可以通过CIDDM 模型来给出符合实验数据的夸克星, 这时候我们是在夸克物质的有效质量里面考虑了同位旋效应。特别地, 如果质量密度相关模型的标度参数 z 固定在 $z=1/3$ 的情况下 (考虑了手征凝聚一阶展开和线性禁闭), 在描述PSR J1614-2230的夸克星时夸克物质的有效质量会有非常大的同位旋依赖, 这个会使得两味u-d夸克物质的对称能比核物质的对称能大很多。另外, 如果夸克物质有效质量的标度参数 z 能够自由的变化, 我们就能给出来PSR J1614-2230所对应的夸克星, 并且此时的两味u-d 夸克物质的对称能



仅仅只有自由费米气体模型或者 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型的对称能的两倍, 这个对称能已经比起之前的对称能大大地减小了, 另外, 在最新的实验里面, 给出了 PSR J0348+0432 这个最重的脉冲星体, 质量为 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ 。此时, 如果我们想用 CIDDM 模型来给出满足最大质量的夸克星来, 就要改变标度参数 z 。这个时候的两味 u-d 夸克物质的对称能基本上还是自有其体模型的或者 NJL 模型的对称能的两倍。我们的结果进一步说明如果我们把 PSR J0348+0432 当作是一个夸克星的话, $z=1/3$ 的情况, 就要被排除。

我们研究了 CIDDM 模型下静止的夸克星所能达到的最大质量, 大约是 2.40 倍的太阳质量, 此时的 z 参数是可以自由调节的, 并且两味 u-d 夸克物质的对称能可以允许非常大 (因为我们要给出最大夸克星的情况)。

因此, 我们的结果已经给出: 研究夸克物质里面同位旋矢量的性质可以加深对奇异夸克物质的性质和夸克星的理解。如果 PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432 这两个实验给出的致密星体是夸克星的话, 可以给夸克物质的同位旋矢量的性质一个重要的限制作用, 特别是夸克物质的对称能。我们的结果还给出了两味 u-d 夸克物质的对称能可以是自由费米气体模型或者 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型的对称能的两倍如果我们描述 PSR J1614-2230 和 PSR J0348+0432 这两个实验给出的致密星体是夸克星的话。

这一章的工作里面, 我们主要研究了 CIDDM 模型下的夸克物质的对称能和夸克星的性质。在未来的研究中, 我们想研究一下其他夸克模型里面的同位旋矢量道的性质, 看一看是不是会影响比如强子夸克相变, 丰中子核的高能重离子碰撞等等。

2.4.1 CIDDM 模型的参数讨论

附表里面, 我们给出了 CIDDM 模型的一些参数空间的讨论, 内容还是和正文章节里面一致, 在这里我们指出了一些细节: 首先, 表 2-2 里, 我们给出的夸克星的质量, 是每一组参数所能给出的最大的夸克星的质量。当我们固定 $z = 1.8$ $DI = 3000$, 令 β 增大, 我们发现 α 不变的情况下, 最大质量会减小; 其次, 我们控制 β 不变, 增加 α 的取值, 可以看出 D 的值会增加, 最大质量也减小。

之后, 在表 2-3 里面, 我们探索了 CIDDM 模型夸克星的最大质量接近两倍太阳质量的情况的参数对比, 可以看出当 α, β 固定的时候, DI 增大会使得 D 减小, 夸克星的最大质量增大, 半径减小; 其次, $z = 1.8$ $DI = 3000$ 的情况对比 $z = 1/3$ $DI = 143.5$ 的情况, 夸克星明显更容易达到两倍太阳质量。



表 2-2: DI等于3500时所能给出的最大夸克星质量

z	D	α	β	最大质量
1.8	13.76634	0	0.1	2.40306
1.8	13.81352	0	1	2.40003
1.8	14.00307	0	2	2.39934
1.8	13.814	0.7	0.1	2.39
1.8	13.95557	0.8	0.1	2.3852

表 2-3: CIDD M模型给出的最大质量接近两倍太阳质量的夸克星的对比

z	D	DI	α	β	饱和点	最大质量	半径	中心密度
1/3	143.5	3000	0	0.1	0.205	1.95683	11.235	1.05
1.8	23.0084	81	0.7	0.1	0.465	1.97401	9.89	1.25
1.8	22.9224	85	0.7	0.1	0.465	2.00851	9.975	1.25

2.5 有限温度情况下CIDD M模型的拓展研究

在之前的讨论中, 我们研究的范围是零温有限化学势的夸克物质的性质, 并讨论了冷致密星体的质量半径关系。我们知道, 在讨论夸克物质的热力学性质的过程里, 有限温度的情况是不可忽视的。首先研究有限温度下夸克物质的性质在高温区可以与LHC实验联系在一起; 如果化学势很低的情况下, 还可以和Lattice QCD的计算相互辉映^[92-97]。现在有很多唯象模型可以根据Lattice QCD的计算结果, 用理论数值模拟来符合, 并且可以预言Lattice QCD不能计算的相图区域, 比如有限化学势区域。在研究有限温度相图的文献里, Polyakov-loop NJL的方法是现在非常流行的预言QCD相图的手段^[98-103]。首先这个方法能够比较好地重复Lattice QCD给出的结果^[104], 并且满足QCD所拥有的禁闭和渐近自由, 给出手征对称性的恢复相变和强相互作用有限温度和有限化学势下的夸克物质的性质。

然而我们知道, 有限温度有限化学势的情况下不仅仅可以研究QCD的相图, 还可以研究年轻的致密星体的性质, 也就是proto-quark star(PQS)初生的夸克星的一些问题。当一个致密星体刚刚形成的时候, 中微子可以通过 β 稳定条件下的电子的俘



获来产生。而这个时候的轻子数的组分经过广义相对论的计算可以得出来是0.4，每核子熵 $S = 1$ 。之后十到二十秒钟的阶段，中微子会从星体之中释放出去，在释放的过程中，会把自身携带的能量留给星体，形成一个加热的过程。如果我们把这个过程用准静态来处理的话，经过前人的计算，大约在每核子熵 $S = 2$ 的时候，温度为30 – 50MeV范围内，致密星体会达到加热的最大值。最后几分钟内，致密星体的温度很快降低到低于1MeV，随之而形成的就是我们前半章节一直讨论的冷致密星体的情况。这里，我们仍然想通过CIDDM模型来处理有限温度情况下夸克物质的性质，但是如何处理同位旋密度相关的夸克有效质量随着温度发生手征恢复相变的这个现象，十分重要。在前人的文章里，有利用拓展的密度相关夸克质量模型来描述相变的情况^[105-107]，在彭光雄老师的文章里面，对有限温度情况下的CIDDM模型有了进一步的讨论^[59]，给出了有限温度下CIDDM模型的夸克物质的性质和奇异液滴的详细讨论。

在这部分的内容里面，我们用CIDDM模型对有限温度情况下的夸克物质进行了求解，并且按照PQS所对应的不同阶段，给出了夸克物质有限温度下所对应的致密星体的特征，并且与零温冷夸克星的情况进行了比较。

2.5.1 有限温度情况下奇异夸克物质的热力学性质

在同位旋质量密度相关夸克模型里面，我们给出了 u, d, s 三味夸克的有效质量零温情况下的形式。现在，考虑了有限温度的情况，我们根据文献^[59]的方法，给出了温度相关的夸克有效质量的表达式：

$$m_q = m_{q_0} + \left(\frac{D}{n_B^{1/3}} \pm D_I \delta n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \right) \left[1 - \frac{8T}{\lambda T_c} \exp\left(-\lambda \frac{T_c}{T}\right) \right] \quad (2.24)$$

其中， $q = u, d, s$ ， T_c 是相变温度， λ 被定义为当 $T = T_c$ 的时候，方程 $1 - \frac{8T}{\lambda T_c} \exp\left(-\lambda \frac{T_c}{T}\right) = 0$ 所定的值，算得1.60581199632。 T_c 我们定为170MeV，作为一个手摆的参数。然后我们就可以按照之前给出的热力学关系给出热力学势的表达式：

$$\Omega_i = -\frac{g_i T}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \ln[1 + e^{(\epsilon_i - \mu_i)/T}] + \ln[1 + e^{(-\epsilon_i - \mu_i)/T}] \right\} p^2 dp \quad (2.25)$$

这里 μ_i 是有限温度下的化学势， $\epsilon_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}$ 是色散关系。 i 遍历各味夸克和轻子。之后我们可以通过将热力学势对化学势求偏导取负值，得到粒子数密度的表达式：

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1 + e^{(\epsilon_i - \mu_i)/T}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon_i + \mu_i)/T}} \right] p^2 dp \quad (2.26)$$



这里面我们还考虑了反粒子的贡献（化学势为粒子化学势的相反数）。然后我们就能给出能量密度的表达式：

$$E_i = -\frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\epsilon_{i,p}}{1 + e^{(\epsilon_i - \mu_i)/T}} + \frac{\epsilon_{i,p}}{1 + e^{(\epsilon_i + \mu_i)/T}} \right\} p^2 dp - T \frac{\partial \Omega_i}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} \quad (2.27)$$

在有限温度的情况下，自由能密度 F 是一个非常重要的量，我们首先给出自由能密度和压强的表达式：

$$F = \sum_i (\Omega_i + \mu_i n_i) \quad (2.28)$$

$$P = \sum_i \left(-\Omega_i + n_B \frac{\partial m_i}{\partial n_B} \frac{\partial \Omega_i}{\partial m_i} \right)$$

可以看出来，如果此时要满足热力学自洽性，也就是HVV定理的话，应该是每核子自由能的最低点和零压点要求重合，这是一个非常重要的性质。之后我们可以给出熵密度的表达式：

$$S = \sum_i S_i = \sum_i \left(-\frac{\partial \Omega_i}{\partial T} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} \right) \quad (2.29)$$

并且我们也能给出热力学势对质量项的偏导为：

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial m_i} = \frac{g_i T}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1 + e^{(\epsilon_i - \mu_i)/T}} + \frac{1}{1 + e^{(\epsilon_i + \mu_i)/T}} \right] \frac{p^2}{\epsilon_i} dp \quad (2.30)$$

进而我们可以给出真实化学势的表达式：u夸克：

$$\begin{aligned} \mu_u^* = & \mu_u + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \\ & \times \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right] \\ & + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left(\frac{\partial \Omega_u}{\partial m_u} - \frac{\partial \Omega_d}{\partial m_d} \right) \\ & \times \frac{6n_d}{(n_u + n_d)^2} \cdot \left[1 - \frac{8T}{\lambda T_c} \exp\left(-\lambda \frac{T_c}{T}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$



d 夸克:

$$\begin{aligned} \mu_d^* = & \mu_d + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \\ & \times \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right] \\ & + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left(\frac{\partial \Omega_d}{\partial m_d} - \frac{\partial \Omega_u}{\partial m_u} \right) \\ & \times \frac{6n_u}{(n_u + n_d)^2} \cdot \left[1 - \frac{8T}{\lambda T_c} \exp\left(-\lambda \frac{T_c}{T}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

s 夸克:

$$\begin{aligned} \mu_s^* = & \mu_s + \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \\ & \times \left[-\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta(\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha) e^{-\beta n_B} \right] \cdot \left[1 - \frac{8T}{\lambda T_c} \exp\left(-\lambda \frac{T_c}{T}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

然后我们就可以计算有限温度下CIDDM模型给出的奇异夸克物质的性质了。

2.5.2 结果与讨论

首先我们在图2-10给出了不同温度下CIDDM模型 $z=1/3$ 情况下奇异夸克物质的每核子自由能随着重子数密度变化的图线, 这里面我们参照了先前的讨论, 为了给出合理的对称能, 选择了DI-85这一套参数, 其中 $\alpha = 0.7, \beta = 0.1$ 。我们按照温度给出了三组图线, 每一组图线的每核子自由能的最低点都和零压点重合, 这说明了模型符合热力学的自洽性。我们还发现随着温度的升高, 每核子自由能逐渐降低, 饱和点(零压点)会减小, 同粒子数密度的情况下压强会增大, 也就是物态方程会变得硬一些。在 $z=1.8$ 的情况下, 我们在图2-11可以给出和 $z=1/3$ 类似的图线, 每核子自由能的最低点依然和零压点重合, 反映了热力学自洽性的满足。这里面我们选取的参数是能够在零温条件达到两倍太阳质量的夸克星所对应的参数组。我们可以看出, 每核子自由能随着温度的上升会下降, 零压点会减小, 压强会增大少许。

我们在图2-12和在图2-13中分别给出了不同温度下 $z=1/3$ 和 $z=1.8$ 的情况下夸克组分随着重子数密度变化的图线, 通过对比, 我们发现两种情况下温度对夸克物质的组分起到的作用很小, 可以忽略。最后我们给出了不同阶段下的PQS的

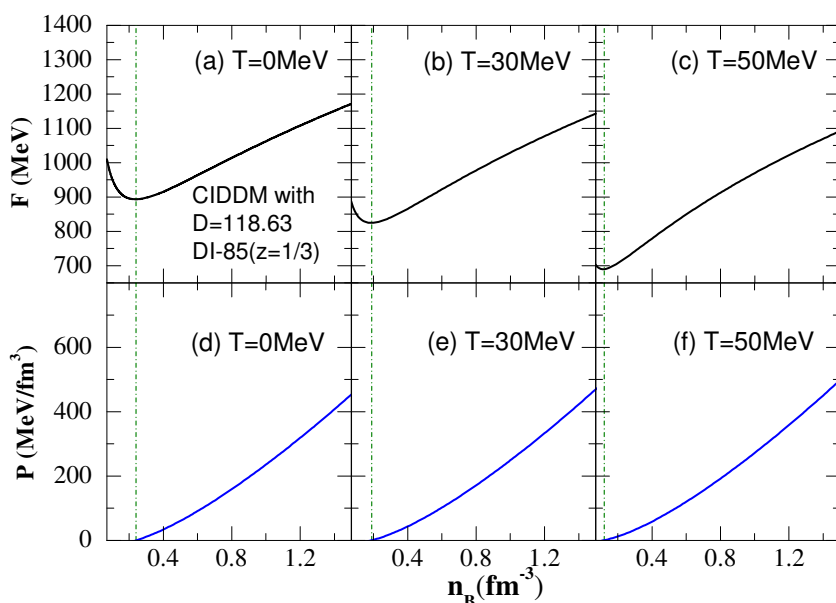


图 2-10: 不同温度下CIDDMM模型 $z=1/3$ 情况下奇异夸克物质的每核子自由能和压强随着重子数密度变化的关系。

Figure 2-10: Free energy per baryon as a function of baryon number density at different temperature and different sets of parameters.

质量半径关系图，图中的曲线分别表示了固定了每核子熵的情况下的PQS的质量曲线。对于第一个阶段，夸克星内部束缚了非常多的中微子，通过前人的计算所得 $s = 1, Y_l = 0.4$ 。第二个阶段，夸克星内部由于中微子大量释放传热，轻子中已经没有了中微子的组分，这个时候温度最高，熵最大，我们按照惯例取作 $s = 2, Y_{\nu_e} = 0$ 。最后一个阶段，也就是夸克星完全冷却的时候，我们之前的结果都已经详细地讨论过，这里作为一个比较的标准。

从图2-14中可以看到，对于 $z=1/3$ 的情况，第一阶段的夸克星的最大质量为 $1.84812M_{\odot}$ ，第二阶段的为 $1.85923M_{\odot}$ ，第三阶段最大质量是 $1.73886M_{\odot}$ 。对于 $z=1.8$ 的情况，第一阶段的夸克星的最大质量为 $2.02959M_{\odot}$ ，第二阶段的为 $2.05684M_{\odot}$ ，第三阶段最大质量是 $2.00863M_{\odot}$ 。这里的蓝色区域为通过Swift/XRT方法来给出的夸克星的质量半径关系的约束： $M = 1.1 \pm 0.3M_{\odot}$ ， $R = 9.6 \pm 1.5\text{km}$ ^[108]。我们可以得到如下的结论，对于CIDDMM模型考虑有限温度的情况，在第一阶段的夸克星和第二阶段的夸克星的最大质量均大于冷夸克星的最大质量，其中以第二阶段的夸克星最大，并且所有给出的夸克星的质量半径图线均穿过文献里给出的信任区域。

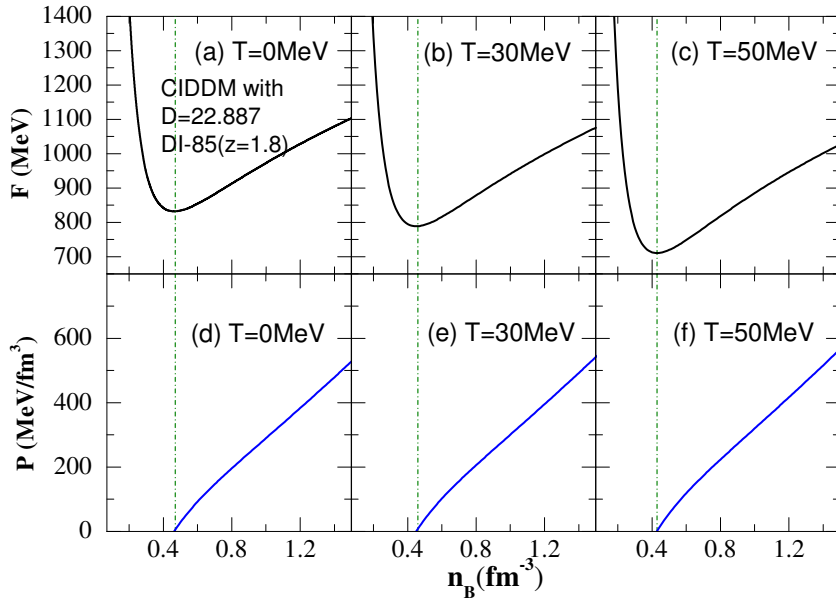


图 2-11: 不同温度下CIDDM模型 $z=1.8$ 情况下奇异夸克物质的每核子自由能和压强随着重子数密度变化的关系。

Figure 2-11: Free energy per baryon as a function of baryon number density at different temperature and different sets of parameters.

2.5.3 有限温度情况下CIDDM模型的总结

这一部分我们给出了有限温度下CIDDM模型的夸克物质的性质，对热力学自洽性和热力学量进行了讨论，最后按照PQS惯用的三个阶段讨论了初生夸克星到冷夸克星的过程中的质量半径关系，我们发现在第一阶段的夸克星和第二阶段的夸克星的最大质量均大于冷夸克星的最大质量，其中以第二阶段的夸克星最大，并且所有给出的夸克星的质量半径图线均穿过文献里给出的信任区域。

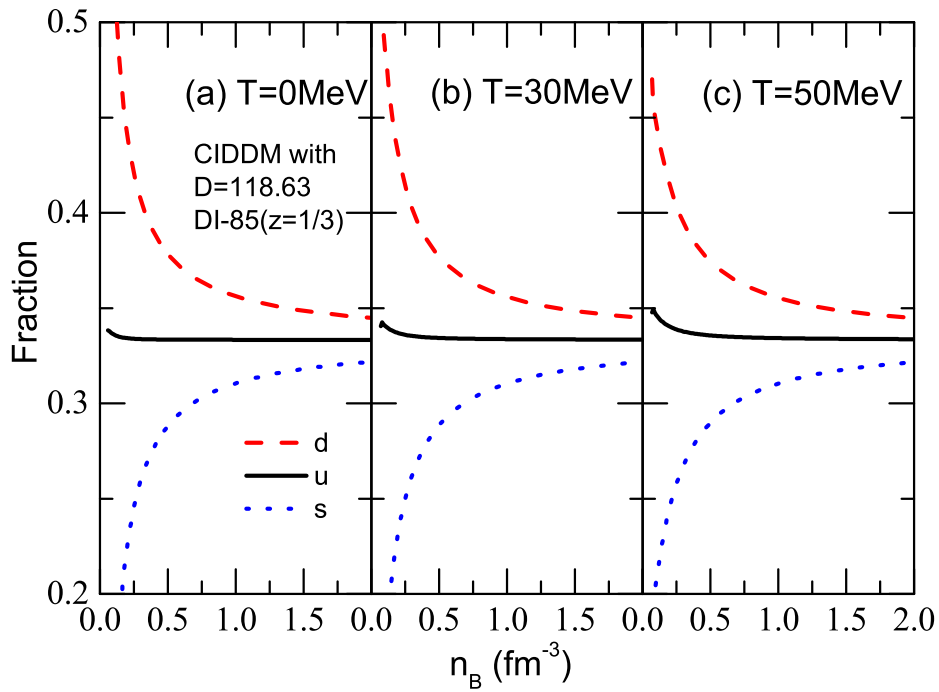


图 2-12: 不同温度情况下CIDDM模型 $z=1/3$ 时奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化
 Figure 2-12: Quark fraction as a function of the baryon density in SQM within the CIDDM model at different temperature.

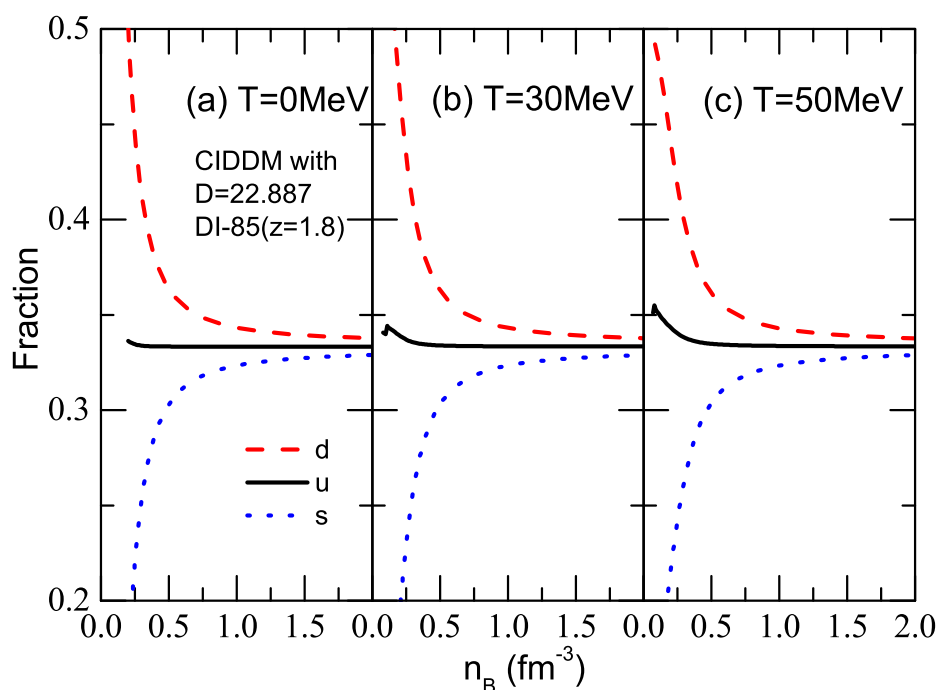


图 2-13: 不同温度情况下CIDDM模型 $z=1/3$ 时奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化
Figure 2-13: Quark fraction as a function of the baryon density in SQM within the CIDDM model at different temperature.

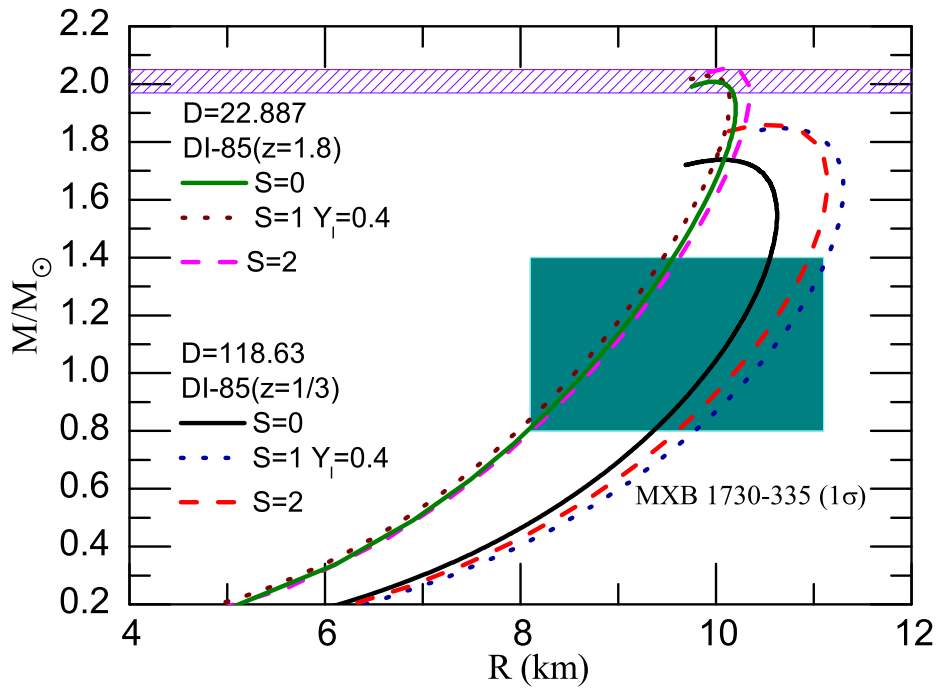


图 2-14: 不同阶段下CIDDM模型 $z=1/3$, $z=1.8$ 时夸克星的最大质量随着半径的变化关系
 Figure 2-14: Maximum mass of quark star as a function of radius within CIDDM.



参考文献

- [1] Fukushima K. & Hatsuda T., “The phase diagram of dense quantum chromodynamics”, RPPh, 2011, **74**(014001).
- [2] Barbour I. et al, “Problems with finite density simulations of lattice quantum chromodynamics”, NPB, 1986, **275**(296).
- [3] Tang A.H., “Isospin chemical potential”, NPA, 2009, **830**(673c).
- [4] Stephanov M.A., Rajagopal K., & Shuryak E., “Signatures of the tricritical point in quantum chromodynamics”, PRL, 1998, **81**(4816).
- [5] Lattimer J.M. & Prakash M., “The physics of neutron stars”, Science, 2004, **304**(536).
- [6] Steiner A.W. et al, “Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars”, Physics Report, 2005, **410**(325).
- [7] Bombaci I., Parenti I., & Vidana I., “Quark deconfinement and implications for the radius and the limiting mass of compact stars”, APJ, 2004, **614**(314).
- [8] Staff J., Ouyed R., & Bagch M., “A three stage model for the inner engine of gamma ray burst: Prompt emission and early afterglow”, APJ, 2007, **667**(340).
- [9] Herzog M. & Ropke F.K., “Three-dimensional hydrodynamic simulations of the combustion of a neutron star into a quark star”, PRD, 2011, **84**(083002).
- [10] Kapoor R.C. & Shukre C.S., “Are radio pulsars strange stars ?”, A & A, 2001, **375**(405).
- [11] Weber F., “Strange quark matter and compact stars”, Progress in Particle and Nuclear Physics, 2005, **54**(193).
- [12] Ivanenko D. & Kurdgelaidze D.F., “Remarks on quark stars”, NCL, 1969, **2**(13).
- [13] Itoh N., “Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars”, PTP, 1970, **44**(291).
- [14] Bodmer A.R., “Collapsed nuclei”, PRD, 1971, **4**(1601).



-
- [15] Witten E., “Cosmic separation of phases”, PRD, 1984, **30**(272).
- [16] Farhi E. & Jaffe R.L., “Strange matter”, PRD, 1984, **30**(2379).
- [17] Alcock C. et al, “Distillation and survival of strange-quark-matter droplets in ultrarelativistic heavy-ion collisions”, APJ, 1986, **310**(261).
- [18] Demorest P. et al, “A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay”, Nature, 2010, **467**(1081).
- [19] Alford M. & Reddy S., “Compact stars with color superconducting quark matter”, PRD, 2003, **67**(074024).
- [20] Baldo M. et al., “Neutron stars and the transition to color superconducting quark matter”, PLB, 2003, **562**(153).
- [21] Ruster S.B. et al., “Effect of color superconductivity on the mass and radius of a quark star”, PRD, 2004, **69**(045011).
- [22] Alford M. et al, “Hybrid stars that masquerade as neutron stars”, APJ, 2005, **629**(969).
- [23] Alford M. et al, “Astrophysics: Quark matter in compact stars?”, Nature, 2007, **445**(7).
- [24] Klahn T. et al., “Modern compact star observations and the quark matter equation of state”, PLB, 2007, **654**(170).
- [25] Ippolito N.D. et al., “Equilibrium sequences of nonrotating and rapidly rotating crystalline color-superconducting hybrid stars”, PRD, 2008, **77**(023004).
- [26] Lai X.Y. & Xu R.X., “A note on the discovery of a 2m pulsar”, RA & A, 2011, **11**(687).
- [27] Weissenborn S. et al., “Quark matter in massive compact stars”, APJL, 2011, **740**(L14).
- [28] de Avellar et al, “Self-bound models of compact stars and recent mass-radius measurements”, PRD, 2011, **84**(043004).



- [29] Bonanno L. & Sedrakian I., “Composition and stability of hybrid stars with hyperons and quark color-superconductivity”, *A & A*, 2012, **539**(A16).
- [30] Son D.T. & Stephanov M., “Quantum chromodynamics at finite isospin density”, *PRL*, 2001, **86**(592).
- [31] Frank M., Buballa M., & Oertel M., “Flavor-mixing effects on the quantum chromodynamics phase diagram at non-vanishing isospin chemical potential: one or two phase transitions?”, *PLB*, 2003, **562**(221).
- [32] Toublan D. et al., “Isospin chemical potential and the quantum chromodynamics phase diagram at nonzero temperature and baryon chemical potential”, *PLB*, 2003, **564**(212).
- [33] He L. & Zhuang P., “Phase structure of nambu jona lasinio model at finite isospin density”, *PLB*, 2005, **615**(93).
- [34] Toro D. et al, “Testing deconfinement at high isospin density”, *NPA*, 2006, **775**(102).
- [35] Pagliara G. & Schaffner-Bielich J., “Hadron-quark phase transition at nonzero isospin density: The effect of quark pairing”, *PRD*, 2010, **81**(094024).
- [36] Shao G.Y. et al., “Influence of vector interactions on the hadron-quark/gluon phase transition”, *PRD*, 2012, **85**(114017).
- [37] Chodos A. et al, “New extended model of hadrons”, *PRD*, 1974, **9**(3471).
- [38] Rehberg P. Klevansky S.P., “Hadronization in the su(3) nambu jona lasinio model”, *PRC*, 1996, **53**(410).
- [39] Hanauske M. et al., “Strange quark stars within the nambu jona lasinio model”, *PRD*, 2001, **64**(043005).
- [40] Menezes D.P., Providencia C., & Melrose D.B., “Quark stars within relativistic models”, *JPG*, 2006, **32**(1081).
- [41] Freedman B.A. & McLerran L.D., “Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. i. formal techniques”, *PRD*, 1977, **16**(1169).



-
- [42] Freedman B.A. & McLerran L.D., “Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. iii. the ground-state energy of a relativistic quark gas”, PRD, 1978, **17**(1109).
- [43] Fraga E.S., Pisarski R.D., & Schaffner-Bielich J., “Small, dense quark stars from perturbative quantum chromodynamics”, PRD, 2001, **63**(121702).
- [44] Fraga E.S., “The role of quark mass in cold and dense pquantum chromodynamics and quark stars”, NPA, 2002, **702**(217c).
- [45] Fraga E.S. et al., “Role of quark mass in cold and dense perturbative quantum chromodynamics”, PRD, 2005, **71**(105014).
- [46] Fraga E.S., “Hydrodynamical instabilities in an expanding quark gluon plasma”, NPA, 2006, **774**(819).
- [47] Kurkela A. et al., “Cold quark matter”, PRD, 2010, **81**(105021).
- [48] Zong H.S., “New approach for calculating the dressed quark propagator at finite chemical potential”, PRC, 2005, **71**(015205).
- [49] Qin S.X. et al., “Phase diagram and critical end point for strongly interacting quarks”, PRL, 2011, **106**(172301).
- [50] Li A. & Xu R.X., “Strange stars with different quark mass scalings”, RA & A, 2011, **11**(482).
- [51] Fowler G.N., Raha S., & Weiner R.M., “Confinement and phase transitions”, ZPC, 1981, **9**(271).
- [52] Chakrabarty S. et al, “Strange quark matter and the mechanism of confinement”, PLB, 1989, **229**(112).
- [53] Chakrabarty S., “Equation of state of strange quark matter and strange star”, PRD, 1991, **43**(627).
- [54] Chakrabarty S., “Stability of strange quark matter”, PRD, 1993, **48**(1409).
- [55] Chakrabarty S., “Quark matter in a strong magnetic field”, PRD, 1996, **54**(1306).



- [56] Peng G.X. et al., “Charge and critical density of strange quark matter”, PRC, 1999, **61**(015201).
- [57] Peng G.X. et al., “Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the brueckner theory with three-body forces and a quark model with chiral mass scaling”, PRC, 2008, **77**(065807).
- [58] Zhang Y. & Su R.K., “Quark mass density- and temperature-dependent model for bulk strange quark matter”, PRC, 2002, **65**(035202).
- [59] Wen X.J. et al., “Thermodynamics with density and temperature dependent particle masses and properties of bulk strange quark matter and strangelets”, PRC, 2005, **72**(015204).
- [60] Mao H. et al., “Soliton solutions of an improved quark mass density-dependent model at finite temperature”, PRC, 2006, **74**(055204).
- [61] Wu C. et al., “Improved density-dependent quark mass model with quark meson and quark meson couplings”, PRC, 2008, **77**(015203).
- [62] Yin S.Y. & Su R.K., “Consistent thermodynamic treatment for a quark-mass density-dependent model”, PRC, 2008, **77**(055204).
- [63] Schertler K. & Greiner C., “Medium effects in strange quark matter and strange stars”, NPA, 1997, **616**(659).
- [64] Schertler K. et al., “The influence of medium effects on the gross structure of hybrid stars”, NPA, 1998, **637**(451).
- [65] Peshier A. & Soff G., “Equation of state of deconfined matter at finite chemical potential in a quasiparticle description”, PRC, 2000, **61**(045203).
- [66] Horvath J.E. & Houngh L., “Nuclear symmetry energy from quantum chromodynamics sum rules”, A & A, 2004, **442**(L1).
- [67] Rajagopal K. & Wilczek F., “The condensed matter physics of quantum chromodynamics”, PRL, 2000, **86**(3492).



- [68] Lugones G. et al., “Indicadores de la sociedad del conocimiento e indicadores de innovacion. vinculaciones e implicancias conceptuales y metodologicas”, IJMPD, 2003, **12**(495).
- [69] Zheng X.P. et al., “Bulk viscosity of strange quark matter in a density-dependent quark mass model and dissipation of the r mode in strange stars”, PRC, 2004, **70**(015803).
- [70] Peng G.X. et al., “New solutions for the color flavor locked strangelets”, PLB, 2006, **633**(313).
- [71] Wen X.J. & Peng G.X., “Phase structure in a quark mass density-and-temperature-dependent model”, JPG, 2007, **34**(1697).
- [72] Li A. et al., “Strange stars and stability condition”, MNRAS, 2010, **402**(2715).
- [73] Kaiser N. & Weise W., “Chiral condensate in neutron matter”, PLB, 2009, **671**(25).
- [74] Drukarev E.G. et al, “Nucleon quantum chromodynamics sum rules in nuclear matter including four-quark condensates”, PRC, 2004, **70**(065206).
- [75] Jeong K.S. et al., “Nuclear symmetry energy from quantum chromodynamics sum rules”, PRC, 2013, **87**(015204).
- [76] Dey M. et al, “Strange stars with realistic quark vector interaction and phenomenological density-dependent scalar potential”, PLB, 1998, **438**(123).
- [77] Di Toro M. et al, “Probing the nuclear symmetry energy with heavy-ion collisions”, JPG, 2010, **37**(083101).
- [78] Li B.A. et al., “Recent progress and new challenges in isospin physics with heavy-ion reactions”, Physics Report, 2008, **464**(113).
- [79] Chu P. C. & Chen L.W., “Quark matter symmetry energy and quark star”, APJ, 2014, **780**(4), 135.
- [80] Liu B. et al., “Asymmetric nuclear matter: The role of the isovector scalar channel”, PRC, 2002, **65**(045201).



- [81] Gaitanos T. et al., “In-medium effects on particle production in heavy ion collisions”, NPA, 2004, **732**(24).
- [82] Chen L., “Recent progress on the determination of the symmetry energy”, arXiv:1212.0284, 2012.
- [83] Xu J. et al., “Nuclear constraints on properties of neutron star crusts”, APJ, 2009, **697**(1549).
- [84] Cook G.B. et al, “Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state”, APJ, 1994, **424**(823).
- [85] Stergioulas N. & Friedman J.L., “Nonaxisymmetric neutral modes in rotating relativistic stars”, APJ, 1995, **444**(306).
- [86] Komatsu H., Buballa M., & Oertel M., “Flavor-mixing effects on the quantum chromodynamics phase diagram at non-vanishing isospin chemical potential: one or two phase transitions?”, MNRAS, 1989, **237**(355).
- [87] Gourgoulhon E. et al., “Fast rotation of strange stars”, A & A, 1999, **349**(851).
- [88] Wang P., “Strange matter in a self-consistent quark mass-density-dependent model”, PRC, 2000, **62**(015204).
- [89] Antoniadis J. et al, “A massive pulsar in a compact relativistic binary”, Science, 2013, **340**(6131).
- [90] Song T. et al., “Partonic mean-field effects on matter and antimatter elliptic flows”, arXiv:1211.5511, 2013.
- [91] Xu J. et al., “Elliptic flow splitting as a probe of the quantum chromodynamics phase structure at finite baryon chemical potential”, arXiv:1308.1753, 2013.
- [92] Boyd G. et al., “Thermodynamics of su (3) lattice gauge theory”, NPB, 1996, **469**(419).
- [93] Engel J. et al., “The quenched limit of lattice quantum chromodynamics at non-zero baryon number”, NPB, 1999, **558**(307).



-
- [94] Fodor Z. & Szabo K.K., “The quantum chromodynamics equation of state at nonzero densities: Lattice result”, PLB, 2003, **568**(73).
- [95] Allton C. R. et al., “Quantum chromodynamics thermal phase transition in the presence of a small chemical potential”, PRD, 2002, **66**(074507).
- [96] Allton C. R. et al., “Equation of state for two flavor quantum chromodynamics at nonzero chemical potential”, PRD, 2003, **68**(014507).
- [97] Allton C. R. et al., “Thermodynamics of two flavor quantum chromodynamics to sixth order in quark chemical potential”, PRD, 2005, **71**(054508).
- [98] Meisinger P. N., Miller T.R., & Ogilvie M.C., “Phenomenological equations of state for the quark-gluon plasma”, PRD, 2002, **65**(034009).
- [99] Pisarski R. D., “Quark-gluon plasma as a condensate of $z(3)$ wilson lines”, PRD, 2000, **62**(111501).
- [100] Dumitru A. & Pisarski R. D., “Event-by-event fluctuations from decay of a polyakov loop condensate”, PLB, 2001, **504**(282).
- [101] Dumitru A. & Pisarski R. D., “Scattering of gluons from the color glass condensate”, PLB, 2002, **525**(95).
- [102] Dumitru A. & Pisarski R. D., “Two-point functions for $su(3)$ polyakov loops near t_c ”, PRD, 2002, **66**(096003).
- [103] Fukushima K., “Chiral effective model with the polyakov loop”, PLB, 2004, **591**(277).
- [104] Ghosh S. K. et al., “Susceptibilities and speed of sound from the polyakov-nambu-jona-lasinio model”, PRD, 2006, **73**(114007).
- [105] Zhang Y. & Su R. K., “Quark mass density- and temperature-dependent model for bulk strange quark matter”, PRC, 2002, **65**(035202).
- [106] Zhang Y. & Su R. K., “Stability of strangelets at finite temperature”, PRC, 2003, **67**(015202).



- [107] Zhang Y. & Su R. K., “Quark mass density- and temperature-dependent model for bulk strange quark matter”, *JPG*, 2004, **30**(811).
- [108] Sala G. et al., “Constraints on the mass and radius of the accreting neutron star in the rapid burster”, *APJ*, 2012, **752**(158).

第三章 基于禁闭势的夸克物质模型与介质中的组分夸克质量和夸克星

3.1 研究背景

强相互作用物质的研究是核物理，天体物理，宇宙学的基础工作之一。强相互作用下的状态方程对于了解核结构、核反应，天体物理中的尖端问题，以及早期宇宙的物质形态有很重要的作用。为了更进一步地理解强相互作用物质的性质，人们创立了量子色动力学作为基础手段。对于现代物理的最流行的领域，比如高能物理，微扰QCD可以成功地描述高能过程，但是对于处理非微扰的情况，仍是有很多问题^[1]。格点QCD的数值蒙特卡洛模拟可以给有限温度下的强相互作用物质直接进行描述，但是这个机制无法处理有限化学势的情况，因为计算得来的化学势出现在虚部上^[2]，这就迫使人们不得不选取其他的方法来处理有限化学势的强相互作用物质。

为了研究强相互作用物质的性质，大量的地上实验室被兴建。在前几章里我们也提到过，中子星的研究会给我们一个从自然界入手来探测高密度低温读的强相互作用物质的性质的方法^[3,4]。前文我们提到过，由于中子星的内部可能存在夸克物质，人们就提出了三味夸克和轻子构成的夸克星的概念^[5-7]。虽然致密星体的观测可以由传统的中子星模型来给出解释，但是夸克星的存在是不能被排除的。如果我们把致密星体的质量固定，那么夸克星所对应的星体半径会小于中子星^[8]。对于夸克星是否存在的证据始终是现代天体物理的一个非常引人注目的论题，并且能够对奇异夸克物质的结构和性质的理解起到非常重要的作用^[9-15]。致密夸克物质的物态方程一般来说是比较软的，这是因为夸克间的相互作用会在高密处比较弱。另外，奇异夸克物质的物态方程由于增加了s夸克这样的一个自由度会变得更软。因此，大多数的夸克模型很难给出大质量的夸克星。近年来，两倍太阳质量的星体 PSR J1614-2230^[16] 和 PSR J0348+0432^[17] 被观测到，并且被认为是最重的已观测到的脉冲星。只有令夸克物质之间的相互作用变强，才能用夸克星来描述这两个星体。

我们曾提到过PQCD和LQCD并不能用来描述有限化学势和非极高能量的情况下的奇异夸克物质，人们需要用唯像模型来模拟夸克物质的相互作用。在夸克模型里面，最重要的事情之一就是如何来处理夸克的禁闭，一个流行的方法就是使用密



度相关夸克质量模型 [18-32]。在我们以前的工作中 [18]，在前面几章中有详细的介绍，我们构造了一个同位旋质量密度相关模型(CIDDM)，用有效夸克质量来涵盖所有的奇异夸克物质的相互作用，并且通过加入同位旋效应可以描述原来的质量密度相关模型不能给出的两倍太阳质量的夸克星。另外的能够在奇异夸克物质中处理夸克禁闭的方法是考虑胶子交换产生的夸克禁闭势能。自从前人表明用大 N_c 近似的方法对于高密系统比如致密星体可以通过加入了介子部分唯像夸克势能的相对论树图来描述 [12]。在这一章的工作里面，我们会采用禁闭夸克模型来计算奇异夸克物质的性质，禁闭夸克模型中我们考虑了矢量的夸克势能 [33]，并且能够满足色禁闭和渐近自由 [34-37]。

在夸克星的内部，u-d夸克的同位旋非对称效应有可能非常大，所以奇异夸克物质的同位旋矢量效应就会很重要。另外，u-d夸克的粒子数密度在HICs的高能碰撞的粒子数密度一般不相等，所以许多关于有限同位旋非对称度的QCD相图的工作相继提出 [38-44]，这对于我们理解夸克星，QCD相图和高能重离子碰撞的同位旋效应具有十分重要的意义。最近有许多关于丰中子物质内的中子质子有效质量劈裂的工作，目的是研究核子有效相互作用的同位旋和动量相关性 [45,46]，我们也想要研究一下在丰中子物质里面（ud夸克比分为 $u/d \approx 1/2$ ）的ud夸克组分夸克质量的劈裂情况来探索奇异夸克物质的物态方程的同位旋效应以及对夸克星质量的影响。

这一章里，我们扩展了传统的禁闭夸克模型，考虑了组分夸克质量的同位旋相关性。基于同位旋相关模型，我们研究了夸克物质的对称能，奇异夸克物质的稳定区域，非对称夸克物质的组分夸克质量的同位旋劈裂情况，以及夸克星的质量半径关系。

3.2 理论模型和处理方法

3.2.1 理论推导

我们在模型里面引入理查德森势能来描述夸克之间的相互作用。首先给出系统的哈密顿量 [34]：

$$\mathcal{H} = \sum_i (\alpha_i \cdot p_i + \beta_i M_i) + \sum_{i < j} \frac{\lambda^{(i)} \lambda^{(j)}}{4} V_{ij} \quad (3.1)$$



这里 $i(j)$ 代表第 $i(j)$ 味的夸克, λ_i 是SU(3)相互作用夸克矩阵, α_i 和 β_i 来自狄拉克方程, M_i 是质量密度相关的狄拉克质量:

$$M_i = m_i + (310\text{MeV})\text{sech}\left(\nu\frac{n_B}{n_0}\right), \quad i = u, d, s \quad (3.2)$$

i 代表第 i 味夸克, n_B 是重子数密度, $n_0 = 0.17fm^{-3}$ 是正常核物质的饱和密度, ν 是手摆的参数。我们可以看出夸克质量随着重子数密度从高到低会从310MeV降至流夸克质量。我们令 $m_u = m_d = 5.5\text{MeV}$ $m_s = 95\text{MeV}$ 作为夸克的流夸克质量。 M_i 对于ud夸克是相等的, 这意味着考虑了把标量道加入(比如 σ 介子)在QCD的拉氏密度里面。我们发现这个质量项里面没有考虑同位旋相关性, 这意味着奇异夸克物质的相互作用对三味夸克是相等的。人们知道同位旋相关性已被证明为一个不能忽视的重要的性质, 于是我们考虑构建一个包含了同位旋效应的同位旋相关的禁闭模型(IDCQM)。在CQM模型里面, M_i 是由三味夸克的流夸克质量和对三味夸克都相等的标量部分构成的。在相对论平均场模型里面我们可以通过考虑了同位旋标量-标量介子得到一个类似的质量项的结构, 并且人们将这个质量定义为通过在核子相里计算核物质的标量自能所给出的狄拉克质量。对于类似于NJL模型的夸克模型, 我们也考虑了通过计算夸克自能来得到夸克物质的质量项 M_i , 并且 M_i 通常被称为组分夸克质量。在我们之前列出, CQM模型内的 M_i 也是从狄拉克方程推出的, 并且也包括了流夸克质量和一个标量部分, 所以这个夸克的狄拉克质量像NJL模型一样, 也被定义为组分夸克质量。我们也注意到在NJL模型里面和组分夸克质量息息相关的物理量就是夸克凝聚。在u-d夸克物质里面的SU(2) 组分夸克质量里的夸克凝聚被定义为 $\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{M_q - m_q}{2G}$, 这里 M_q 是组分夸克质量, m_q 是流夸克质量, G 是标量道的耦合常数(σ 场)。但在SU(3) NJL模型里, 夸克凝聚无法通过这个方程简单地得到, 这是因为所有的不同味的夸克凝聚都被包含在 $(M_q - m_q)$ 里面。因为我们的CQM模型的组分夸克质量 M_i 也是基于SU(3)夸克场, 我们可以通过 $(M_q - m_q)$ 趋近于零的时候近似地得到有限重子数密度的手征对称性恢复。

$$\begin{aligned} M_{i=u,d} &= m_i + (329.5\text{MeV})\text{sech}\left(\nu_i\frac{n_B}{n_0}\right) - \tau_i\delta D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \\ M_{i=s} &= m_i + (432\text{MeV})\text{sech}\left(\nu_i\frac{n_B}{n_0}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

另外对于CQM模型的组分夸克质量, 由于组分夸克质量的同位旋相关性的具体形式仍然是个谜, 我们应该构建一个包含同位旋效应的符合QCD渐近自由和色禁闭



以及同位旋对称性的唯像参数化模型。所以我们按照之前的CIDDM模型的扩展方法加入了同位旋效应得到了同位旋相关的IDCQM模型^[18] ()见方程3-3(。这里 D_I, α 和 β 是引入夸克与夸克之间的同位旋相关的相互作用所设立的参数, τ_i 是夸克的同位旋量子数, 我们令 $\tau_i = 1$ 对 $i = u$ (u 夸克), $\tau_i = -1$ 对 $i = d$ (d 夸克), $\tau_i = 0$ 对 $i = s$ (s 夸克)。从方程3.3可以看出, 我们为了能够和SU(3) NJL mod模型里面的 $M_{u0} = M_{d0} = 335$ MeV 以及 $M_{s0} = 527$ MeV 对应^[47], 改变了常数夸克质量310 MeV 来拟合NJL 模型的真空夸克质量。由于组分夸克质量的密度依赖性还是未知, 我们将原来的CQM的参数 ν 改成了 ν_{ud} 和 ν_s , 这意味着组分夸克质量的密度相关性对于ud夸克是相同的, 但是有可能会给出一个完全不一样的s夸克的组分夸克质量, 这个和NJL模型的结果很类似。这里我们定义同位旋非对称度 δ 为:

$$\delta = 3 \frac{n_d - n_u}{n_d + n_u} \quad (3.4)$$

这个定义在之前的工作里面以及第二章的工作中广泛用到^[42-44,48]。对于纯中子(质子)的夸克物质, 我们令 $\delta = 1$ (-1)。从方程3.3里可以看出如果 $\beta > 0$, 我们能够得到 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_{iso} = 0$ 并且能够给出渐近自由的情况 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = m_{q0}$ 。对于两味 $u-d$ 夸克物质, 如果忽略ud夸克的组分夸克质量, 手征对称性将会在高密度处恢复 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = 0$ 。另外, 在方程3.3中的夸克质量也满足ud夸克的交换对称性, 这说明了强相互作用下的同位旋对称性。因此, 同位旋相关夸克质量的唯像模型的参数化形式方程3.3是具有普适性的, 而且能反映QCD的性质。最新加入的同位旋相关项可以视为一个包含同位旋矢量-矢量道、同位旋标量-矢量道以及同位旋矢量-标量道的混合的质量项。在这一章的工作里面, 为了能够给出一个合理的夸克物质对称能的密度相关性, 我们令 $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$ 。

现在我们考虑将理查德森势能放入夸克物质里面, 这个势能来自胶子交换。方程3.1的理查德森势能的形式来自文献^[33]

$$V_{ij} = \frac{12\pi}{27} \frac{1}{\ln(1 + [(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)^2 + m_g^2]/\Lambda^2)} \frac{1}{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)^2 + m_g^2} \quad (3.5)$$

我们根据文献^[34]的观点, 从强子物理的唯像模型里面可以得到 $\Lambda = 100$ MeV, 并且 $\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j$ 代表着第 i 和 j 粒子的动量交换。这个势能会由于对产生和红外发散被介



质屏蔽。其中屏蔽长度的倒数的最低阶的表达式为 [49]

$$(m_g)^2 = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sum_{i=u,d,s} k_i^f \sqrt{(k_i^f)^2 + M_i^2} \quad (3.6)$$

这里 $k_i^f = (\pi^2 n_i)^{1/3}$ 是第 i 味夸克, n_i 是第 i 味夸克的密度, α_0 是微扰的夸克胶子耦合常数。人们可以看出 m_g 符合了矢量相互作用 $u-d$ 夸克的交换对称性。这个势能也能体现渐近自由和夸克禁闭。我们可以看出当重子数密度为零的时候, m_g 减小为零, 会引起夸克禁闭并且会在有限粒子数密度的时候发生退禁闭现象, 甚至在高密度区域内恢复手征对称性。我们对所有不同味的夸克求和来得到屏蔽长度的倒数, 而不是像前人的工作那样去平均屏蔽长度的倒数来简化计算。理查德森势能的取值 V_{ij} 会趋向于无穷大, 当夸克的粒子数密度趋向于零的时候, 这就体现了 QCD 的禁闭特征, 同时当夸克粒子数非常大的时候, V_{ij} 会降至零, 这体现了夸克的退禁闭特征。根据这些方法, 我们将会在下面的部分来通过同位旋相关的模型来给出有限密度有限化学势下的夸克物质的性质。

首先我们研究了 $u-d-s$ 夸克物质的能量密度。下面是 $u-d-s$ 夸克物质能量密度的动能部分:

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \frac{6}{(2\pi)^3} \sum_{i=u,d,s} \int_0^{k_i^f} d^3k \sqrt{k^2 + M_i^2} \\ &= \frac{3}{4\pi^2} \sum_{i=u,d,s} \left[k_i^f \left((k_i^f)^2 + M_i^2/2 \right) \sqrt{(k_i^f)^2 + M_i^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_i^4}{2} \ln \frac{\sqrt{(k_i^f)^2 + M_i^2} + k_i^f}{M_i} \right] \\ &= \frac{3}{4} \sum_{i=u,d,s} \left[n_i \sqrt{k_i^{f2} + M_i^2} + M_i \rho_s^i \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里 ρ_s^i 是第 i 味夸克的标量密度。

$$\begin{aligned} \rho_s^i &= \frac{3}{2\pi^2} \left[M_i k_i^f \sqrt{(k_i^f)^2 + M_i^2} \right. \\ &\quad \left. - M_i^3 \ln \frac{\sqrt{(k_i^f)^2 + M_i^2} + k_i^f}{M_i} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$



势能部分的表达式如下：

$$\begin{aligned} \epsilon_v = & - \frac{1}{2\pi^3} \sum_{i,j} \int_{-1}^1 dx \int_0^{k_j^f} k_j^2 \int_0^{k_i^f} k_i^2 \times f(k_i, k_j, M_i, M_j, x) \\ & \times V_{ij} dk_j dk_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

同时有

$$\begin{aligned} f(k_i, k_j, M_i, M_j, x) = & \left(e_i \cdot e_j + 2 \cdot k_i \cdot k_j \cdot x + \frac{k_i^2 k_j^2}{e_i \cdot e_j} \right) \\ & \times \frac{1}{(e_i - M_i)(e_j - M_j)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里

$$e_i = \sqrt{k_i^2 + M_i^2} + M_i \quad (3.11)$$

两味ud夸克的对称能的研究是一个可以探测夸克模型同位旋相关的直接方法，我们可以通过两味ud夸克物质的能量密度来给出对称能的表达式：

$$E_{\text{sym}}(n_B) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 [(\epsilon_k + \epsilon_v)/n_B]}{\partial \delta^2} \Big|_{\delta=0}. \quad (3.12)$$

在奇异夸克物质里面，人们定义其中没有中微子，并且包含电中性的uds夸克以及轻子 e^- ，满足化学平衡和重子数守恒。我们可以如下给出化学势的表达式：

$$\mu_i = \mu_{i,K} + \mu_{i,V} \quad (3.13)$$

这里 $\mu_{i,K}$ 是能量密度的动能部分的贡献，可以计算得到：

$$\mu_{i,K} = \frac{\partial \epsilon_k}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial n_i} = \sqrt{M_i^2 + (k_i^f)^2} + (\rho_s^u + \rho_s^d + \rho_s^s) \frac{\partial M_i}{\partial n_i} \quad (3.14)$$



能量密度势能部分的贡献为:

$$\mu_{i,V} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial k_i^f} \frac{\partial k_i^f}{\partial n_i} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial M_i} \frac{\partial M_i}{\partial n_i} \quad (3.15)$$

于是我们就能得到 β 稳定和电中性条件下的奇异夸克物质需要满足的条件:

$$\mu_d = \mu_s, \quad \mu_d = \mu_u + \mu_e \quad (3.16)$$

and

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0 \quad (3.17)$$

对于轻子, 我们使用 $\mu_e = \sqrt{(k_e^f)^2 + m_e^2}$ 来给出化学势, 这里 $k_e^f = (3\pi^2 n_e)^{\frac{1}{3}}$ 是电子的费米动量。于是我们可以通过热力学第一定律来给出奇异夸克物质的总的压强:

$$P = -\epsilon + \sum_{j=u,d,s,e} n_j \mu_j \quad (3.18)$$

这里 ϵ 是奇异夸克物质的总的能量密度。

3.2.2 结果与讨论

我们根据Farhi和Jaffe^[13]的观点来研究了奇异夸克物质的绝对稳定区域。这个绝对稳定条件要求每核子能量的最低点要低于可观测的稳定核的每核子最低点, 也就是930MeV。并且对于 β 稳定的 $u-d$ 夸克物质的每核子能量最低点应该高于930MeV, 这个就和核物理的认知相一致了。基于以上的奇异夸克物质的绝对稳定条件, 参数的取值范围就会被加上一个很强的限制。

图3-1给出了CQM和IDCQM两个模型下的奇异夸克物质的稳定区域, 这里面还是用上述的绝对稳定条件作为基准。我们设 ν_{ud} 和 ν_s 分别为x轴与y轴, 并且取 $DI = -300$, $DI = 0$, $DI = 600$ and $DI = 1000$ 来描述SQM内部同位旋强度以及稳定区域的关联。参数 α_0 和前人的工作保持一致被定为^[34]0.2。经过了详细地计算, 我们发现对于每组参数, ud 夸克物质的每核子能量的最低点会随着 ν_{ud} 的上升而下降, 于是 ν_{ud} 对于 $DI = -300, DI = 0, DI = 600$ 和 $DI = 1000$ 的最大值就能确定下来, 分别是: 0.5, 0.53, 0.63和0.68。我们也能发现奇异夸克物质的每核子能量最低点对

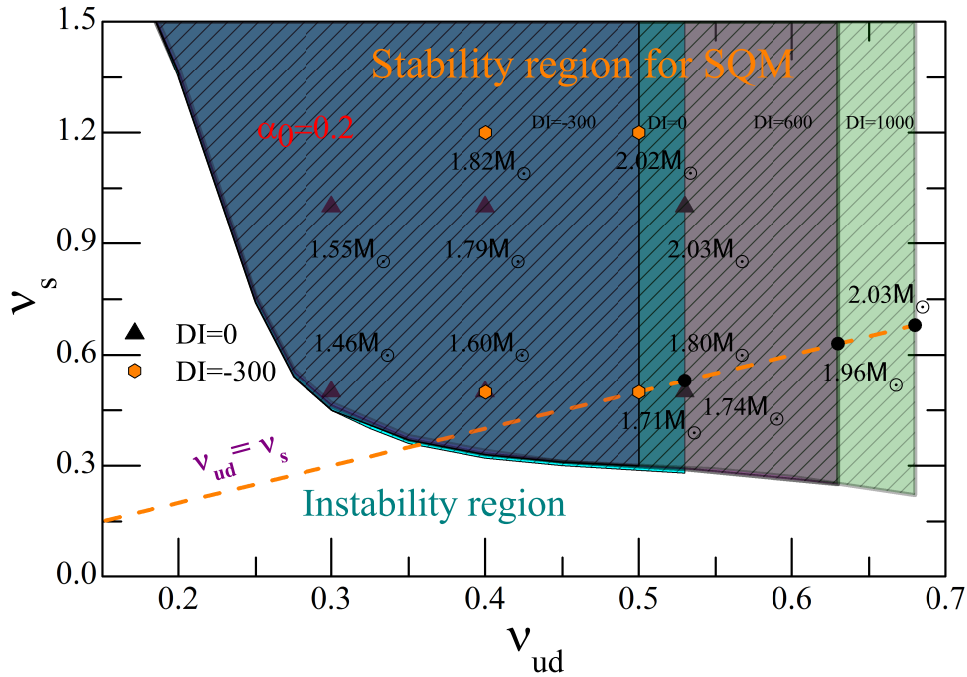


图 3-1: 在不同参数下奇异夸克物质的绝对稳定区间

Figure 3-1: Energy per baryon and the corresponding pressure as functions of the baryon density for SQM and two-flavor u - d quark matter in β -equilibrium within the IDCQM model with $DI=-300, DI=0$ (CQM model), $DI=600$ and $DI=1000$.

固定的 ν_{ud} 会随着 ν_s 的减小而增大，所以我们就能够给出一个奇异夸克物质稳定区域的最低边界，对于 $DI = -300, DI = 0, DI = 600$ 和 $DI = 1000$ 这四组参数。因为我们能够得到奇异夸克物质的稳定区域，所以我们可以计算一下基于绝对稳定条件的奇异夸克物质的夸克星的最大质量，我们发现：a) 在所有四组参数里，夸克星的最大质量对固定的 ν_{ud} 会随着 ν_s 的增大而增大。b) 夸克星的最大质量对固定的 ν_s 会随着 ν_{ud} 的增大而增大，于是我们通过固定 ν_{ud} 的值为0.5, 0.53, 0.63 和 0.68来获得在 $DI = -300, DI = 0, DI = 600$ 和 $DI = 1000$ 四组参数下的最大的夸克星的质量，并且通过改变 ν_s 可以描述质量为 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ [17] 的致密星体PSR J0348+0432 为夸克星。在这张图里，我们还画了 $\nu_{ud} = \nu_s$ 的情况，这是组分夸克质量的密度相关性对uds三种夸克都相等的情况。我们发现，直到 $DI=1000$ 并且 $\nu_{ud} = \nu_s = 0.68$ 的时候，才能够描写 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ 的夸克星并且符合绝对稳定条件，这个就是IDCQM模型下 $\nu_{ud} = \nu_s$ 时能够描述2倍太阳质量夸克星的最小的DI取值。

图3-2给出了奇异夸克物质以及ud夸克物质每核子能量和相应的压强随着

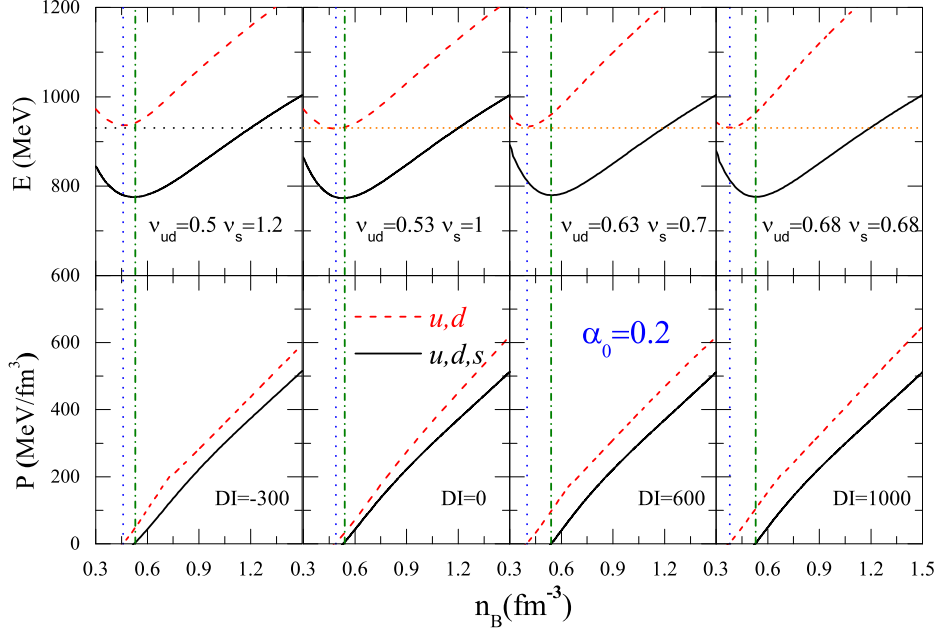


图 3-2: 在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化
 Figure 3-2: Energy per baryon and the corresponding pressure as functions of the baryon density for SQM and two-flavor u - d quark matter in β -equilibrium within the IDCQM model with DI-300, DI-0 (CQM model), DI-600 and DI-1000

重子数密度的变化，我们考虑了四组参数：最左边的两幅图为 $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.5, \nu_s = 1.2, DI = -300$ (DI-300)，之后为 $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.53, \nu_s = 1, DI = 0$ (DI-0)， $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.63, \nu_s = 0.7, DI = 600$ (DI-600)，最右边的两幅图为 $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.68 = \nu_s, DI = 1000$ (DI-1000)。之所以选四组参数的原因，是因为这四组参数都能产生两倍太阳质量的夸克星。对于所有的四组参数，我们发现 ud 夸克物质的每核子能量的最低点要大于 930MeV ，而奇异夸克物质的每核子能量最低点要低于 930MeV ，满足了绝对稳定条件。我们也能从图3-2看出来对于所有参数每核子能量的最低点和零压点重合，反映了热力学自洽性。而且我们检查了所有的情况的声速，都没有超光速，符合因果律。

我们给出了IDCQM模型下四组参数DI-300, DI-0, DI-600, DI-1000的对称能随着粒子数密度变化的关系来研究 ud 夸克物质的同位旋效应。在图3-3里可以看出对于DI-0, 夸克的对称能可以在 1.5 fm^{-3} (around $10 n_0$)处达到 39 MeV 。对于DI-300、DI-600 和 DI-1000 的情况可以达到 52MeV 、 82 MeV 和 155 MeV ，可以看出DI如果取值比较大使得同位旋效应增大，进而给出对称能的取值比较大，这一点和CIDDM模型第二章的结果一致。参数 α 和 β 的选择方法是按照自由费米气体

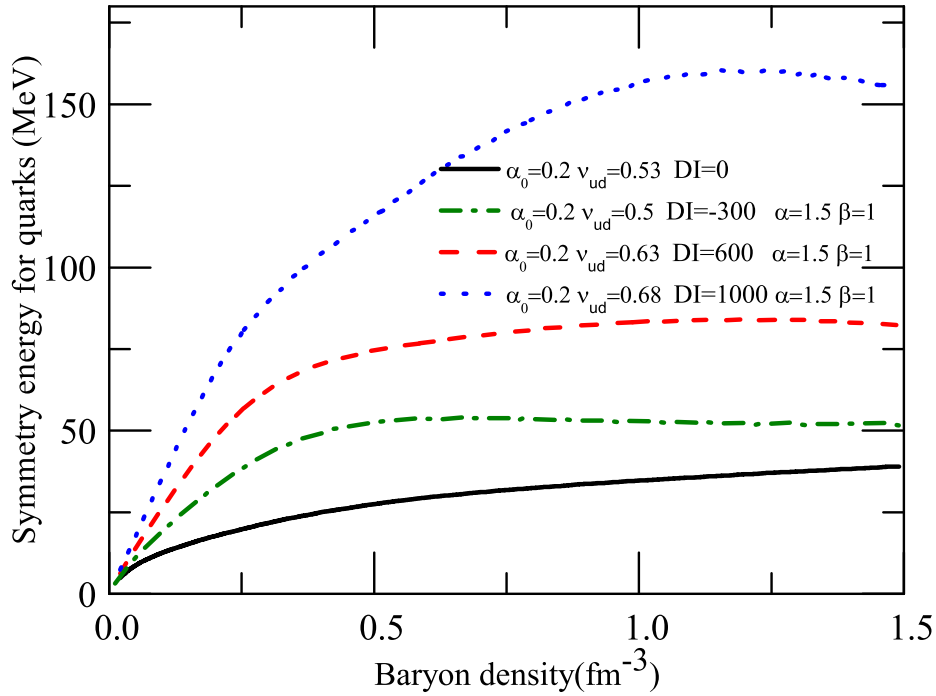


图 3-3: IDCQM夸克物质的对称能随着重子数密度的变化

Figure 3-3: Quark matter symmetry energy as a function of baryon number density in the IDCQM model with three parameter sets, i.e.,DI-300 DI-0, DI-600 and DI-1000.

和NJL 模型的对称能的密度相关性来选择的。在第二章的CIDDm模型里面，DI-2500所对应的对称能的值大约是NJL模型的100倍，然后才能给出比较硬的物态方程，进而给出两倍太阳质量的夸克星。现在用IDCQM模型，我们可以用DI-600这套参数给出两倍NJL模型的对称能，并且我们会在下面的部分检验所对应的夸克星的最大质量的取值。

在图3-4里面我们给出了夸克物质的组分随着重子数密度变化的关系，我们仍采用DI-300, DI-0, DI-600 and DI-1000 这四组参数。我们发现，对于DI-0、DI-600、DI-100这三种情况，d夸克的组分随着粒子数密度的增大而降低，u夸克的组分一直保持在三分之一处浮动，s夸克的组分会从零开始随着粒子数密度的增加而增大，最终三者密度比较高的时候趋于相等。对于DI-600、DI-1000这两种情况，相比于DI-0，d夸克（s夸克）的比分会在密度比较低的时候就降至（升至）三分之一，也就是uds三味夸克比分会在密度较低的情况就基本相等，类似于CFL的情形，这是由于同位旋效应的影响，我们在第二章CIDDm模型里面也得到过类似的结论。但是对于DI-300这种情况，我们发现在低密处d夸克的粒子数密度会下降到比u夸克的粒子数密度还要低，而s夸克的粒子数密度会由于电中性条件而高于u夸克的粒子数密度，

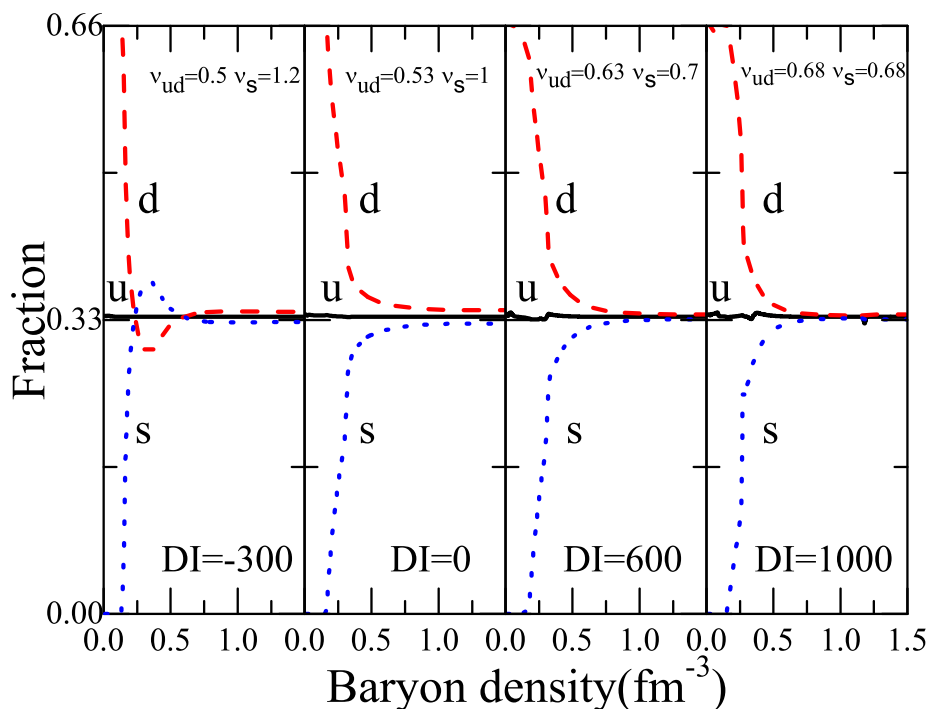


图 3-4: 不同参数下夸克物质的组分随着重子数密度的变化

Figure 3-4: Quark fraction for u,d and s quarks as functions of the baryon density in SQM within the IDCQM model with DI-300, DI-0(CQM model), DI600 and DI-1000.

之后随着粒子数密度的增加，d夸克的粒子数密度会有所回升，最终高于u夸克的粒子数密度，相应的s夸克的粒子数密度减小至小于u夸克的粒子数密度，产生这个现象的原因在于同位旋效应在组分夸克质量里面的影响，在下面的工作里面我们会详细讲述。

图3-5里我们给出了IDCQM模型里DI-300,DI-0(CQM model), DI-600, DI-1000四组参数下的奇异夸克物质的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系。我们能发现所有的情况下，夸克质量会从零密度的组分夸克质量开始，随着粒子数密度增加显著地减小，最终恢复手征对称性。从图中可以看出对于DI-300与DI-0两套参数，由于 ν_s 取值较大，s夸克的组分夸克质量随着粒子数密度增大的减小程度要远比其他两种情况强烈；同时，对于DI-600和DI-1000两种情况，ud夸克的组分夸克质量会产生明显的劈裂，d夸克的质量会高于u夸克的。而DI-300这种情况比较特殊，我们发现这种情况同样会产生ud夸克同位旋劈裂，但是u夸克的组分夸克质量会在低密处高于d夸克的，然后在 0.2fm^{-3} 处二者相等，之后d夸克的组分夸克质量又会高于u夸克的，直到 0.6fm^{-3} 时，u夸克的组分夸克质量再次超过d夸克的组分夸克质量。产生

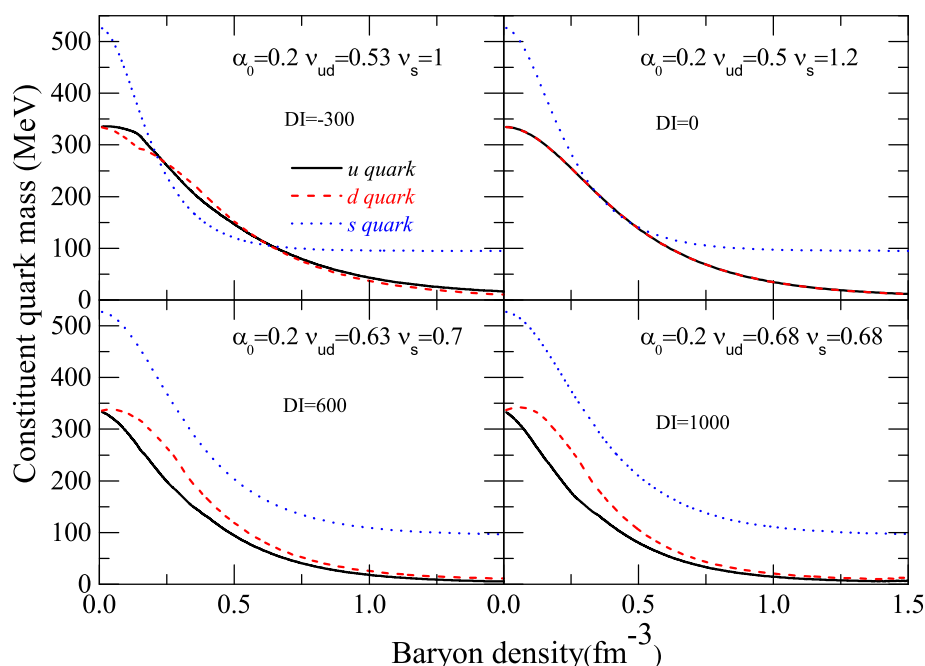


图 3-5: 奇异夸克物质的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系

Figure 3-5: Constituent quark mass as a function of the baryon density in SQM within the IDCQM model with DI-300,DI-0(CQM model), DI600 and DI-1000.

这种现象的原因在于s夸克的组分夸克质量下降地过快，使得s夸克的粒子数密度在密度比较低的时候更容易产生，从图3-4我们也能看出来。由于电中性条件要求，使得d夸克的粒子数密度降低，从而改变同位旋非对称度的符号；但是随着粒子数密度的增加，s夸克的粒子数密度会低于u夸克的粒子数密度，从而d夸克的粒子数密度高于u夸克的，同位旋非对称度也就再次变号，这就是组分夸克质量出现翻转的原因。这些结果给了我们和CIDDM相似的同位旋非对称物质内的同位旋相关性。我们能够看出组分夸克质量里面的同位旋劈裂确实可以影响到奇异夸克物质的组分、对称能以及物态方程。

为了更进一步地研究组分夸克质量的同位旋劈裂情况，我们给出了ud夸克的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系，想看一下在不同的同位旋非对称度 δ 和参数DI的情况下，夸克物质的组分夸克质量是否有很大的影响。从图3-6我们可以看出，对于所有的情况，u夸克的组分夸克质量会随着重子数的增加而减小，而对于d夸克的组分夸克质量，会在DI-600情况下， δ 等于 0.6 和 1 的时候产生一个向上的鼓包。我们可以看出，ud夸克的同位旋劈裂在DI固定 δ 比较大也就是丰d夸克物质的时候或者 δ 固定DI比较大的时候会给出比较大的取值。上述所有的情况给了我

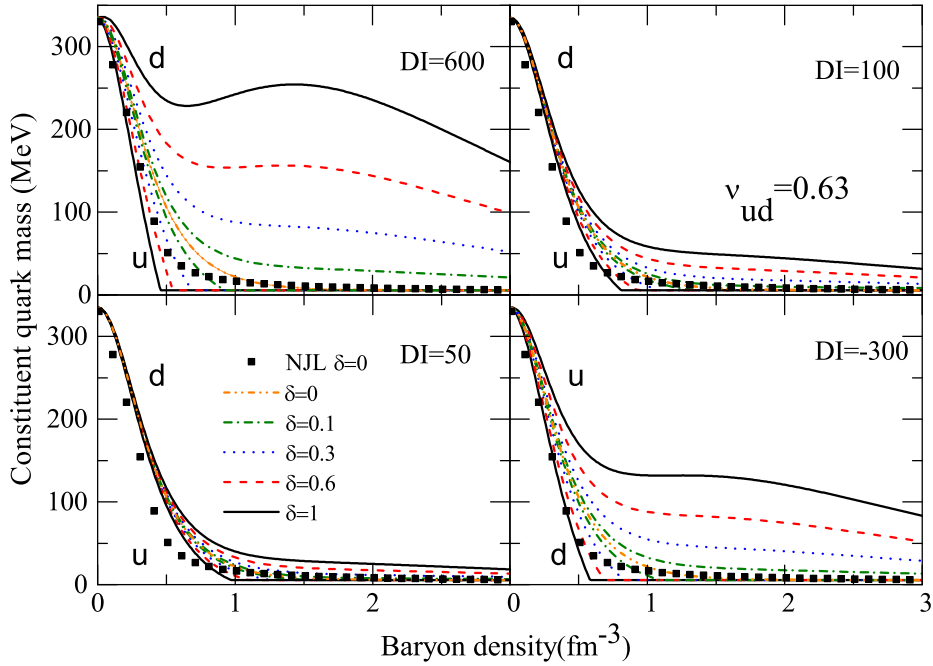


图 3-6: u - d 夸克的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系

Figure 3-6: Constituent quark mass as a function of the baryon density in u - d quark matter within the IDCQM model by different DI and δ

们这个模型的同位旋性质，并且展示了不同的 DI 和同位旋非对称度下手征对称性恢复的变化。 u 夸克的组分夸克质量在 δ 和 DI 都很大的时候会较早地减小到其组分夸克质量，这说明了我们可能在 $DI=600$ 、同位旋非对称度等于1、粒子数密度和化学势并不高的情况下观测到 u 夸克的手征对称性恢复的现象。对于 $DI=50$ 、 $\delta=1$ 或者 $DI=600$ 、同位旋非对称度很小的时候， u 夸克的手征对称性恢复就会延后。这个同位旋劈裂的特征说明了夸克模型里面的组分夸克质量的同位旋效应的重要性，并且可以更进一步地改变奇异夸克物质的性质和夸克星的质量半径。

通过求解基于IDCQM模型的奇异夸克物质的物态方程，我们可以求解TOV方程进而得到夸克星的质量半径关系。在图3-7中，我们绘制了IDCQM模型下 $DI=300, DI=0, DI=600, DI=1000$ 几组参数所给出的质量半径关系。图中所绘的质量区域是最近观测到的脉冲星 PSR J0348+0432，质量为 $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ [17]。这个脉冲星是目前观测的最大质量脉冲星。对于参数组 $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = \nu_s = 0.53, DI = 0$ ， u - d - s 夸克的组分夸克质量密度相关性是相同的，并且能给出的最大夸克星质量为 $1.80 M_{\odot}$ ，小于两倍太阳质量。基于前文我们提到过的几组参数 $\alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.5, \nu_s = 1, DI = -300 (DI=300), \alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} = 0.53, \nu_s = 1, DI = 0 (DI=0), \alpha_0 = 0.2, \nu_{ud} =$

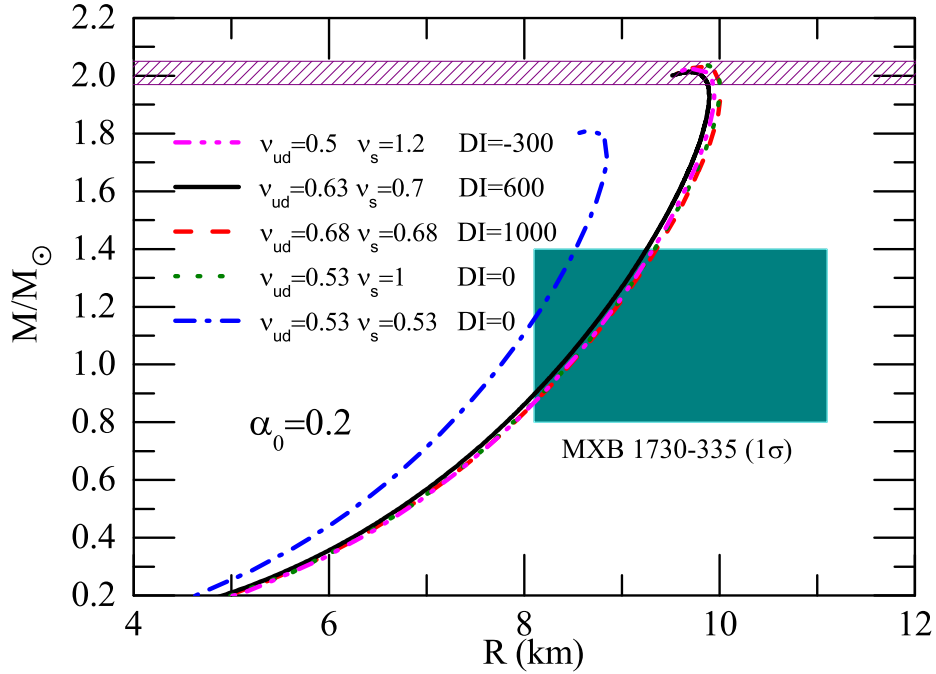


图 3-7: 不同参数情况下夸克星的质量半径关系

Figure 3-7: Mass-Radius relation within the IDCQM model with DI-300,DI-0(CQM model), DI-600 and DI-1000.

0.63, $\nu_s = 0.7$ $DI = 600$ (DI-600), $\alpha_0 = 0.2$, $\nu_{ud} = 0.68 = \nu_s$ $DI = 1000$ (DI-1000) 所能给出的最大质量的夸克星我们也在图里面绘制了出来。这四种情况所给出的夸克星的最大质量都在 $2.01 \pm 0.04 M_\odot$ 范围之内。从 DI-0 这套参数里面, 我们发现s夸克的组分夸克质量的密度相关性非常强, 进而引起奇异夸克物质性质的变化, 使得在没有同位旋效应的情况下能给出两倍太阳质量的夸克星; 对DI-600的情况, s夸克的组分夸克质量并没有随着重子数的增加而急速下降, 但是由于同位旋效应, 也使得我们能够得到两倍太阳质量的夸克星; 对于DI-1000的情况, 我们令 $\nu_{ud} = \nu_s$, 同时增加同位旋效应, 使得夸克星的最大质量达到两倍太阳质量, 大于没有同位旋效应的 $\nu_{ud} = \nu_s$ 所能给出的 $1.80 M_\odot$ 。图中蓝色的区域是通过快速分离装置MXB 1730-335探测到的中子星的质量半径区域: $M = 1.1 \pm 0.3 M_\odot$ 、 $R = 9.6 \pm 1.5 \text{ km}(1\sigma)$, 我们发现图中所有的图线都能经过。所以我们强调如果我们用原有的CQM模型($\nu_{ud} = \nu_s$)来求解夸克星的性质, 那么将很难给出两倍太阳质量的夸克星。但当我们考虑到 $\nu_{ud} \neq \nu_s$ 以及同位旋依赖性的时候, s夸克组分夸克质量的强粒子数密度相关效应和同位旋劈裂就会出现, 并且影响到奇异夸克物质的物态方程和所能给出的夸克星的最大质量。



3.3 本章小结

在这一章的工作里，我们扩展了CQM模型，在组分夸克质量里面考虑了同位旋相关性。基于新的IDCQM模型，我们研究了夸克物质的对称能，奇异夸克物质的稳定区域，夸克星的质量半径关系。我们发现如果加入了同位旋效应，组分夸克质量会出现ud夸克组分夸克质量劈裂；其次如果我们考虑令s夸克的组分夸克质量的粒子数密度相关性不同于ud夸克，那么s夸克的组分夸克质量会有很大的改变。我们发现夸克物质的对称能和物态方程会随着同位旋效应的增加而变化。u夸克的组分夸克质量会在同位旋非对称度和DI很大的时候提前减小至流夸克质量，这说明我们会在丰d夸克物质里面观测到在低粒子数密度情况下u夸克的手征恢复。最后我们发现即使CQM模型无法描述 PSR J1614.2230 和PSR J0348+0432 这两个星体为夸克星，但是通过加入同位旋效应或者改变s夸克的粒子数密度相关性或者两者都考虑都会给出两倍太阳质量的夸克星。

参考文献

- [1] Fukushima K. & Hatsuda T., “The phase diagram of dense quantum chromodynamics”, RPP, 2011, **74**(014001).
- [2] Barbour I. et al, “Problems with finite density simulations of lattice quantum chromodynamics”, NPB, 1986, **275**(296).
- [3] Lattimer J.M. & Prakash M., “The physics of neutron stars”, Science, 2004, **304**(536).
- [4] Steiner A.W. et al, “Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars”, Physics Report, 2005, **410**(325).
- [5] Bombaci I., Parenti I., & Vidana I., “Quark deconfinement and implications for the radius and the limiting mass of compact stars”, APJ, 2004, **614**(314).
- [6] Staff J., Ouyed R., & Bagch M., “A three stage model for the inner engine of gamma ray burst: Prompt emission and early afterglow”, APJ, 2007, **667**(340).
- [7] Herzog M. & Ropke F.K., “Three dimensional hydrodynamic simulations of the combustion of a neutron star into a quark star”, PRD, 2011, **84**(083002).



- [8] Kapoor R.C. & Shukre C.S., “Are radio pulsars strange stars ?”, *A & A*, 2001, **375**(405).
- [9] Ivanenko D. & Kurdgelaidze D.F., “Remarks on quark stars”, *NCL*, 1969, **2**(13).
- [10] Itoh N., “Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars”, *PTP*, 1970, **44**(291).
- [11] Bodmer A.R., “Collapsed nuclei”, *PRD*, 1971, **4**(1601).
- [12] Witten E., “Cosmic separation of phases”, *PRD*, 1984, **30**(272).
- [13] Farhi E. & Jaffe R.L., “Strange matter”, *PRD*, 1984, **30**(2379).
- [14] Alcock C. et al, “Distillation and survival of strange quark matter droplets in ultrarelativistic heavy ion collisions”, *APJ*, 1986, **310**(261).
- [15] Weber F., “Strange quark matter and compact stars”, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2005, **54**(193).
- [16] Demorest P. et al, “A two solar mass neutron star measured using shapiro delay”, *Nature*, 2010, **467**(1081).
- [17] Antoniadis J. et al, “A massive pulsar in a compact relativistic binary”, *Science*, 2013, **340**(6131).
- [18] Chu P.C. & Chen L.W., “Quark matter symmetry energy and quark star”, *APJ*, 2014, **780**(4), 135.
- [19] Fowler G.N., Raha S., & Weiner R.M., “Confinement and phase transitions”, *ZPC*, 1981, **9**(271).
- [20] Chakrabarty S. et al, “Strange quark matter and the mechanism of confinement”, *PLB*, 1989, **229**(112).
- [21] Chakrabarty S., “Equation of state of strange quark matter and strange star”, *PRD*, 1991, **43**(627).
- [22] Chakrabarty S., “Stability of strange quark matter”, *PRD*, 1993, **48**(1409).
- [23] Chakrabarty S., “Quark matter in a strong magnetic field”, *PRD*, 1996, **54**(1306).



-
- [24] Benvenuto O.G. & Lugones G., “Strange matter equation of state in the quark mass density dependent model”, PRD, 1995, **51**(1), 1989.
- [25] Peng G.X. et al, “Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the brueckner theory with three body forces and a quark model with chiral mass scaling”, PRC, 1999, **61**(6), 015201.
- [26] Peng G.X. et al, “Charge and critical density of strange quark matter”, PRC, 2000, **62**(025801).
- [27] Peng G.X. et al, “Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the brueckner theory with three body forces and a quark model with chiral mass scaling”, PRC, 2008, **77**(065807).
- [28] Zhang Y. & Su R.K., “Quark mass density- and temperature-dependent model for bulk strange quark matter”, PRC, 2002, **65**(035202).
- [29] Wen X.J. et al., “Thermodynamics with density and temperature dependent particle masses and properties of bulk strange quark matter and strangelets”, PRC, 2005, **72**(015204).
- [30] Mao H. et al., “Soliton solutions of an improved quark mass density dependent model at finite temperature”, PRC, 2006, **74**(055204).
- [31] Wu C. et al., “Improved density dependent quark mass model with quark meson and quark meson couplings”, PRC, 2008, **77**(015203).
- [32] Yin S.Y. & Su R.K., “Consistent thermodynamic treatment for a quark-mass density-dependent model”, PRC, 2008, **77**(055204).
- [33] Richardson J.L., “The heavy quark potential and the systems”, PLB, 1979, **82**(272).
- [34] Dey M. et al, “Strange stars with realistic quark vector interaction and phenomenological density dependent scalar potential”, PLB, 1998, **438**(123).
- [35] Dey M. et al., “Strange stars with realistic quark vector interaction and phenomenological density dependent scalar potential”, PLB, 1999, **447**(352).



- [36] Dey M. et al., “Erratum to strange stars with realistic quark vector interaction and density dependent scalar potential”, PLB, 1999, **467**(303).
- [37] Dey M. et al., “Role of quark mass in cold and dense perturbative quantum chromodynamics”, J. Phys. B, 1999, **73**(377).
- [38] Son D.T. & Stephanov M., “Quantum chromodynamics at finite isospin density”, PRL, 2001, **86**(592).
- [39] Frank M., Buballa M., & Oertel M., “Flavor-mixing effects on the quantum chromodynamics phase diagram at non-vanishing isospin chemical potential: one or two phase transitions?”, PLB, 2003, **562**(221).
- [40] Toublan D. et al., “Isospin chemical potential and the quantum chromodynamics phase diagram at nonzero temperature and baryon chemical potential”, PLB, 2003, **564**(212).
- [41] He L. & Zhuang P., “Phase structure of nambu jona lasinio model at finite isospin density”, PLB, 2005, **615**(93).
- [42] Toro D. et al, “Testing deconfinement at high isospin density”, NPA, 2006, **775**(102).
- [43] Pagliara G. & J.S.B., “Hadron quark phase transition at nonzero isospin density: The effect of quark pairing”, PRD, 2010, **81**(4), 094024.
- [44] Shao G.Y. et al., “Influence of vector interactions on the hadron-quark/gluon phase transition”, PRD, 2012, **85**(114017).
- [45] Chen L.W. et al., “Probing isospin and momentum dependent nuclear effective interactions in neutron rich matter”, EPJA, 2014, **50**(29).
- [46] Li B.A. et al., “Constraining the neutron proton effective mass splitting using empirical constraints on the density dependence of nuclear symmetry energy around normal density”, PLB, 2014, **727**(276).
- [47] Hatsuda T. Kunihiro T., “Quantum chromodynamics phenomenology based on a chiral effective lagrangian”, Phys. Rep., 1994, **247**(221).



-
- [48] Di Toro M. et al, “Probing the nuclear symmetry energy with heavy-ion collisions”,
JPG, 2010, **37**(083101).
- [49] Kapusta J., “Behaviour of gluons at high temperature”, PRD, 1979, **20**(989).

第四章 基于CIDDM模型强磁场下的夸克物质与夸克星

4.1 引言

这一章，我们研究了强磁场下的奇异夸克物质和夸克星的一些性质，采用的唯象模型是第二章讨论的同位旋质量密度相关模型（CIDDM）。我们自洽地给出了常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程，并且发现了垂直于磁场方向上的压强的值要高于平行于磁场方向的压强值。推广所得：磁化的夸克星的性质一般依赖于分布于星体内部的磁场的强度和方向。我们引入了一个密度相关的磁场情况来模拟静态球对称的夸克星的性质，其中假定了磁场方向取向的两种极端情况：一种是颗粒化后的磁场局域的方向和星体半径方向同向，另一种是在半径垂直的平面上随机分布的磁场。我们的结果指出，考虑了沿径向（垂直方向）的磁场可以很大程度上地减小（增加）夸克星的最大质量——也就是说，致密星体内部磁场的方向对于致密星体的性质具有很大的影响。

致密星体可以给极端条件下的自然物质的探索提供一种天文上的检验手段^[1,2]。中子星处于宇宙中最重的致密星体的阶层，里面的重子数密度可以达到正常核物质的六倍以上，并且其中包含超子和介子的凝聚，甚至有可能在内部出现夸克物质。中子星的研究可以给我们提供丰中子物质物态方程的很多重要信息^[3,4]。理论上，中子星可以转化成（奇异）夸克星，这一种（夸克星）星体是由退禁闭的 u, d, s 夸克物质和一些轻子按照 β 稳定电中性条件的奇异夸克物质所组成的^[5-7]。夸克星的存在问题是现代天文学的一个非常重要和引人遐想的论题。在高密强相互作用物质里，夸克星的研究也显得尤为重要，因为夸克星的结构是由奇异夸克物质的性质决定的。在地球上的实验室里面，奇异夸克物质的性质可以通过重离子碰撞来探索。举些例子：相对论重离子碰撞（RHIC）里面的能量束探测计划和GSI的反质子离子研究装置（FAIR）的计划的实验以及JINR的离子对撞机（NICA），这些实验的目标是给出QCD相图结构的细节，特别是QCD相变点的定位问题。这些奇异夸克物质的研究已经是现在的核物理，天文学和宇宙学的基本论题之一。

理论上来说，基于Bodmer-Witten-Terazawa的假设^[8-10]，奇异夸克物质有可能是QCD物质（强相互作用物质）的真正基态，并且是绝对稳定的。夸克物质里面的奇异夸克物质的性质并不能从格点QCD（*ab initio* Lattice QCD）和微扰QCD



(PQCD) 直接计算而得, 这是因为化学势取值有限而且能量尺度比较低, 所以很多唯象模型就提了出来, 比如MIT袋模型, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型^[11-14], 微扰QCD的拓展^[15-18], Dyson-Schwinger 方法^[19-21], 质量密度相关模型 (CDDM)^[22-29], 以及准粒子模型^[30,31]. 通过第二章里面我们对质量密度相关模型进行了同位旋相关性的拓展, 我们得到了同位旋质量密度相关模型 (CIDDM)^[32], 这里面我们把夸克物质的禁闭的属性和粒子数密度相关, 并且写在了同位旋相关的夸克质量里面。最近的工作表明, 夸克星是一个非常好的能够“开采”奇异夸克物质的性质(特别是对称能)的“实验室”。

在之前的工作里面^[32], 我们做了个假定, 忽视了夸克星里面的磁场效应。然而, 在致密星体的研究中, 一个很重要的论题就是致密星体可以被磁场包围。而且在致密星体表面处能够估算得到很大的磁场 $B \sim 10^{14}$ G^[33-35]。而在致密星体的内部核心区域, 估算得到的磁场甚至能够达到 $B \sim 10^{18}$ G。在 Ferrer的工作里^[36], 自洽算得的夸克星的核心里面的磁场可以达到 10^{20} G。如此巨大的磁场强度下, 空间旋转对称性($O(3)$)将要被破坏, 所以我们必须要考虑系统压强的非各向同性的性质^[36,37]。更进一步讲, 为了能够描述致密星体内部磁场强度的空间分布人们已经陆陆续续做了一些工作^[38]。因此, 对致密星体内部的磁场大小和方向的空间分布的研究就十分吸引人。这些研究所用的模型可以通过和天体观测中的致密星体的性质对比来给出很多重要的性质(比如物态方程)。在现在的理论框架下, 关于磁场对致密星体质量的影响的分析还是一个很难定论的事情, 无法明确肯定地说明致密星体的质量是变大还是缩小^[38-47]。现在我们的工作的最主要的动机就是探测强磁场下奇异夸克物质和夸克星的性质。我们需要描绘出夸克星内部的磁场强度的大小和方向的分布, 这个是夸克星的一个非常重要的性质, 能够改变致密星体的质量大小。

4.2 理论公式推导

4.2.1 磁场下的CIDDM模型的研究

同位旋质量密度相关模型^[32]是质量密度相关模型^[22-29]的一个推广, 其中在夸克物质的有效质量里面加入了同位旋相关性。在CIDDM模型里面, 夸克禁闭是通过赋予有效质量粒子数密度和同位旋相关来实现的。特别是在非对称夸克物质里面,



可以把有效质量的表达式通过重子数密度 n_B 和同位旋非对称度 δ 来描述出来:

$$\begin{aligned} m_q &= m_{q0} + m_I + m_{iso} \\ &= m_{q0} + \frac{D}{n_B^z} - \tau_q \delta D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里面 m_{q0} 是夸克物质的流夸克质量, $m_I = \frac{D}{n_B^z}$ 体现出夸克物质里面的味无关的相互作用, $m_{iso} = -\tau_q \delta D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B}$ 给出来夸克物质内部同位旋相关的相互作用。对于 $m_I = \frac{D}{n_B^z}$, 常数 z 是夸克质量的标度参数, 常数 D 是由奇异夸克物质的稳定性条件决定的参数。对于 $m_{iso} = -\tau_q \delta D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B}$, 常数 D_I , α 和 β 是决定夸克物质有效相互作用的同位旋相关性的参数, τ_q 代表同位旋量子数。我们令 $\tau_q = 1$ 当 $q = u$ (u 夸克)的时候, $\tau_q = -1$ 在 $q = d$ (d 夸克)的时候, 和 $\tau_q = 0$ 选取 $q = s$ (s 夸克)时。习惯上定义同位旋非对称度^[48-51]的表达式为:

$$\delta = 3 \frac{n_d - n_u}{n_d + n_u}, \quad (4.2)$$

从方程(4.1)可以看出, 如果 $z > 0$ 、 $\alpha \geq 0$, 就能给出夸克物质的禁闭性质 $\lim_{n_B \rightarrow 0} m_q = \infty$ 。更进一步说, 如果 $\beta > 0$, 我们就能够得到 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_{iso} = 0$ 并且能够实现渐近自由 $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = m_{q0}$ 。对于两味 u - d 夸克物质, 如果我们忽略 u 、 d 的流夸克质量, 我们就能得到手征对称性的恢复: $\lim_{n_B \rightarrow \infty} m_q = 0$ 。另外, 在方程(4.1)里面的有效夸克质量也满足 u 、 d 夸克的交换对称性, 这个性质是由强相互作用下的同位旋对称性的性质决定的。因此方程(4.1)的同位旋相关的有效夸克质量的参数化形式就符合了QCD的最基本的性质, 具有了普适性。

在文章^[32]的工作中, 夸克物质的对称能和奇异夸克物质以及夸克星的性质会因为同位旋相关质量项 m_{iso} 的加入产生非常大的变化, 于是如果我们令纯 u - d 夸克物质的对称能足够大, 并且夸克质量的标度参数能恰当选取的话, 最新的大质量脉冲星 PSR J0348+0432 (质量为 $2.01 \pm 0.04 M_\odot$) 就能够用CIDDM模型来描述为夸克星。比如基于 DI-85 ($z = 1.8$)这套参数下 ($D_I = 85 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{3\alpha}$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.1 \text{ fm}^3$, $D = 22.922 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3z}$, $z = 1.8$, $m_{u0} = m_{d0} = 5.5 \text{ MeV}$ and $m_{s0} = 80 \text{ MeV}$), 就能够给出一个 $2.01 M_\odot$ 质量的夸克星, 刚好能达到 PSR J0348+0432的实验中心值, 同时在第二章的工作我们也能看出可以给出比较合理的对称能的取值。在本章工作中, 我们将会研究强磁场下的基于CIDDM模型的奇异夸克物质和夸克星的性质, 选取的参数是DI-85 ($z = 1.8$)。



4.2.2 常数磁场下夸克物质的理论推导

费米子（例如：夸克和电子）在外加磁场 B 下的色散关系能谱可以写为^[52]

$$E_{p,i} = \sqrt{p_z^2 + 2\nu|q_i|B + m_i^2}, \quad (4.3)$$

这里 p_z 是沿着 z 方向的动量 (磁场方向假定 z 方向), m_i 是粒子的质量, $\nu = n + \frac{1}{2} - \frac{q_i}{|q_i|} \frac{s}{2}$ 代表着朗道能级, 量子数取值为 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $s = \pm 1$ 代表着自旋的取值 (“+1”代表自旋向上, “-1”代表自旋向下)。和前人的工作一样^[37], 我们没有考虑反常磁矩的贡献, 这是因为夸克物质里面的反常磁矩并没有清楚的认识, 同时电子的反常磁矩非常小, 可以忽略^[53]。

下面, 我们将研究一下CIDDM模型奇异夸克物质零温下的热力学性质。场数磁场 B 下的奇异夸克物质的热力学势可以写为:

$$\Omega = \sum_{i=u,d,s,l} \Omega_i, \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_i &= - \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} \frac{g_i(|q_i|B)}{4\pi^2} \alpha_\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp_z [\mu_i^* - E_{p,i}] \\ &= - \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} \frac{g_i(|q_i|B)}{2\pi^2} \alpha_\nu \left\{ \frac{1}{2} \mu_i^* \sqrt{\mu_i^{*2} - s_i(\nu, B)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s_i(\nu, B)^2}{2} \ln \left[\frac{\mu_i^* + \sqrt{\mu_i^{*2} - s_i(\nu, B)^2}}{s_i(\nu, B)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ω_i 代表着每一味夸克的热力学势的贡献, i 是对所有味的夸克和轻子进行求和, $\alpha_\nu = 2 - \delta_{\nu,0}$ 。夸克的简并度 $g_i = 3$, 对于轻子则 $g_i = 1$, 于是我们能够得出轻子和夸克的费米能量:

$$\mu_i^* = \sqrt{k_{F,\nu}^i{}^2 + s_i(\nu, B)^2}, \quad (4.6)$$

这里面 $k_{F,\nu}^i$ 是费米动量, 其中 $s_i(\nu, B) = \sqrt{m_i^2 + 2\nu|q_i|B}$ 。最高朗道能级为:

$$\nu_{max}^i \equiv \text{int} \left[\frac{\mu_i^{*2} - m_i^2}{2|q_i|B} \right], \quad (4.7)$$



其中 $\text{int}[\dots]$ 是取整函数。于是可以给出系统的总能量密度：

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{tot} &= \Omega + \sum_{i=u,d,s,l} \mu_i^* n_i \\
&= \sum_{i=u,d,s,l} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} \frac{g_i(|q_i|B)}{4\pi^2} \alpha_\nu \int_{-\infty}^{\infty} dp_z E_{p,i} + \frac{B^2}{2} \\
&= \sum_{i=u,d,s,l} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} \frac{g_i(|q_i|B)}{4\pi^2} \alpha_\nu \left\{ \mu_i^* \sqrt{\mu_i^{*2} - s_i(\nu, B)^2} \right. \\
&\quad \left. + s_i(\nu, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_i^* + \sqrt{\mu_i^{*2} - s_i(\nu, B)^2}}{s_i(\nu, B)} \right] \right\} + \frac{B^2}{2}, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

这里面 $B^2/2$ 是电磁场能量密度的贡献，夸克物质和轻子的粒子数密度 n_i 的表达式为：

$$n_i = \frac{g_i |q_i| B}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} (2 - \delta_{\nu,0}) k_{F,\nu}^i. \tag{4.9}$$

在我们考虑的奇异夸克物质的所有情况里面， μ 子不会出现，这是因为电子的化学势过小。奇异夸克物质的电中性条件可以写为：

$$\frac{2}{3} n_u = \frac{1}{3} n_d + \frac{1}{3} n_s + n_e. \tag{4.10}$$

奇异夸克物质的 β 稳定条件如下：

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s, \tag{4.11}$$

其中 μ_i ($i = u, d, s, e^-$) 代表着粒子的化学势。对于夸克物质，奇异夸克物质的化学势表达式如下：

$$\mu_i = \frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dn_i} = \mu_i^* + \sum_{j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \tag{4.12}$$

我们可以从方程4.12看出，由于有效夸克质量的粒子数密度相关性，化学势的表达式里面会比费米气体的化学势的情况多出一些项出来。因此，奇异夸克物质里面



的 u 、 d 、 s 夸克的化学势的表达式为:

$$\mu_u = \mu_u^* + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left[\frac{\partial \Omega_u}{\partial m_u} - \frac{\partial \Omega_d}{\partial m_d} \right] \frac{6n_d}{(n_u + n_d)^2} + \mu_{den}, \quad (4.13)$$

$$\mu_d = \mu_d^* + D_I n_B^\alpha e^{-\beta n_B} \left[\frac{\partial \Omega_d}{\partial m_d} - \frac{\partial \Omega_u}{\partial m_u} \right] \frac{6n_u}{(n_u + n_d)^2} + \mu_{den}, \quad (4.14)$$

$$\mu_s = \mu_s^* + \mu_{den}, \quad (4.15)$$

其中

$$\frac{\partial \Omega_f}{\partial m_f} = \frac{3}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^f} \alpha_\nu (|q_f| B m_f) \times \ln \left[\frac{k_{F,\nu}^f + \sqrt{k_{F,\nu}^f{}^2 + 2\nu|q_f|B + m_f^2}}{\sqrt{2\nu|q_f|B + m_f^2}} \right], \quad (4.16)$$

并且

$$\mu_{den} = \frac{1}{3} \sum_{j=u,d,s} \frac{3}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^j} \alpha_\nu (|q_j| B) m_j \times \ln \left[\frac{k_{F,\nu}^j + \sqrt{k_{F,\nu}^j{}^2 + 2\nu|q_j|B + m_j^2}}{\sqrt{2\nu|q_j|B + m_j^2}} \right] \times \left\{ -\frac{zD}{n_B^{(1+z)}} - \tau_j D_I \delta [\alpha n_B^{\alpha-1} - \beta n_B^\alpha] e^{-\beta n_B} \right\}. \quad (4.17)$$

轻子的化学势我们也可以写出:

$$\mu_l = \sqrt{k_{F,\nu}^l{}^2 + s_l(\nu, B)^2}. \quad (4.18)$$

对于常数磁场下的奇异夸克物质, $\mathcal{O}(3)$ 旋转对称性会被打破, 同时系统的压强会出现各向异性, 也就是说, 压强会产生劈裂: P_{\parallel} 为平行于磁场方向上的压强, P_{\perp} 为



垂直于磁场方向的压强。 P_{\parallel} 和 P_{\perp} 在磁化后的费米子系统的表达式如下所示： [36]

$$P_{\parallel} = \sum_i \mu_i n_i - \mathcal{E}_{tot}, \quad (4.19)$$

$$P_{\perp} = \sum_i \mu_i n_i - \mathcal{E}_{tot} + B^2 - MB, \quad (4.20)$$

这里面 M 是系统的磁化率。纵向压强 P_{\parallel} 能满足 Hugenholtz-Van Hove (HVH) 定理 [54]；横向压强 P_{\perp} 会多出来一个磁场的额外贡献。这个特征会给出平行压强 P_{\parallel} 的零压点会和每核子能量的最低点所对应的粒子数密度重合，垂直压强 P_{\perp} 不重合，后文会表。

在CIDDM模型里面，常数磁场下系统纵向和横向的压强可以分别表示如下：

$$P_{\parallel} = - \sum_{i=u,d,s,l} \Omega_i + \sum_{i,j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i} n_i - \frac{B^2}{2}, \quad (4.21)$$

$$P_{\perp} = - \sum_{i=u,d,s,l} \Omega_i + \sum_{i,j=u,d,s} \frac{\partial \Omega_j}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i} n_i + \frac{B^2}{2} - MB, \quad (4.22)$$

系统的磁化率 M 为

$$M = -\partial \Omega / \partial B = \sum_{i=u,d,s,l} M_i, \quad (4.23)$$

其中

$$M_i = -\frac{g_i |q_i|}{2\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}^i} (2 - \delta_{\nu 0}) \int_0^{k_{F,\nu}^i} \left[\frac{\nu |q_i| B}{\epsilon_{\nu}^i} + \epsilon_{\nu}^i - \mu_i^* \right] dk_z, \quad (4.24)$$

并且 $\epsilon_{\nu}^i = \sqrt{k_z^2 + m_i^2 + 2\nu |q_i| B}$ 。我们应该指出方程 (4.21) 和 (4.22) 里面纵向和横向压强包括了磁场的贡献，特别是我们能看出来磁场对于纵向和横向的压强的贡献是相反的，这将会在强磁场下导致纵向和横向压强的巨大差异。

4.2.3 密度相关磁场下夸克物质的理论推导

人们一般认为致密星体内部的磁场强度会比表面处的磁场强度大很多，所以前人的工作里面给出了一个密度相关磁场来描述致密星体内部磁场的分布 [38]。在这一



章的工作里面，我们遵循了这一个假定，并且按照主流的参数化方法来给出夸克星内部密度相关磁场的分布情况。^[38-41]

$$B = B_{surf} + B_0[1 - \exp(-\beta_0(n_B/n_0)^\gamma)], \quad (4.25)$$

这里面 B_{surf} 是致密星体表面的磁场强度，我们把磁场固定在 $B_{surf} = 10^{15}\text{G}$ ，其中 $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ 是正常核物质的饱和密度， B_0 是核心磁场， β_0 和 γ 是两个无量纲的参数，可以调节具体从表面到核心的夸克星的磁场分布情况。

除了致密星体内部的磁场强度的分布之外，磁场的方向对于致密星体的结构也是起到了很重要的作用。这是因为磁场下的强相互作用物质压强（考虑了磁场的贡献之后）可能会具有非常大的各向异性的程度。因此，磁星内部由于压强的各向异性，引力场不再球对称。此外，Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程^[55]也不能用来求解磁星，这是由于此方程只能用于球对称的致密星体。

因为致密星体内部的磁场方向人们没有清楚地认知，这一章的工作里我们假设了两个非常极端的致密星体内部磁场方向取向的特殊情况：一种情况是局域磁场方向沿着半径方向的磁场方向（我们标注为“径向方向”），另一种是局域磁场方向在垂直于半径方向的平面内部（标注为“横向方向”）随机分布。我们还应该注意到，径向方向的情况里，磁场的方向都是穿过内部的星球中心的。在这两种极端情况里，静止的致密星体内部的压强的分布应该是球对称的，并且引力场也会球对称。对于这两种极端的情况，我们可以通过以下的TOV方程来进行静止的磁化致密星体的结构的求解：

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r), \quad (4.26)$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi p(r)r^3}{M(r)}\right] \times \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}, \quad (4.27)$$

这里 $M(r)$ 是半径 r 处的球壳质量， $\epsilon(r)$ 是相应的能量密度（已经包含了磁场的贡献）， $p(r)$ 是相应的径向压强（包含了磁场的贡献）， G 是牛顿引力常数。

我们指出致密星体内部的磁场方向可以分为径向方向和横向方向，但是外部的方向就有可能是非球对称的了。另一方面，在致密星体的表面，磁场强度非常



低($\sim 10^{15}$ G), 压强也很小, 因此夸克星表面磁场的性质可以不考虑。对于更多的磁化的非球对称致密星体内部的磁场的方向和分布的情况, 应该用爱因斯坦方程对致密星体的结构进行自洽地求解, 在本章工作里面不作详谈。

4.3 结果与讨论

4.3.1 常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程

我们首先给出常数磁场下的奇异夸克物质的性质。我们使用了CIDDM模型里的DI-85 ($z=1.8$)这套参数, 我们给出图4-1: 每核子能量和相应的纵向和横向的压强随着常数磁场 $B = 1 \times 10^{18}$ G, 2×10^{18} G 和 3×10^{18} G下的重子数密度的变化关系图。我们能够看出, 对于所有的三种常数磁场 B 的取值, 每核子能量的最低点所对应的粒子数密度恰好和纵向压强 P_{\parallel} 的零压点的粒子数密度重合, 此情况符合HVH定理(见方程(4.19)), 并且和没有磁场的热力学自洽性一致^[32]。更深入地说, 我们能够

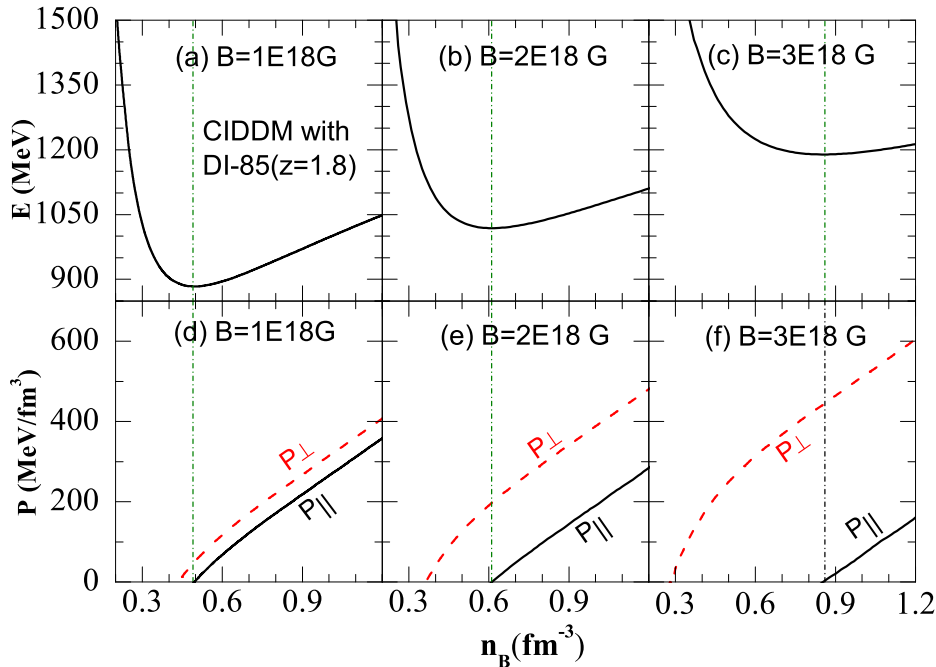


图 4-1: 常数磁场 $B = 1 \times 10^{18}$ G, 2×10^{18} G 和 3×10^{18} G下奇异夸克物质的每核子能量以及纵向压强随着重子数密度的变化, 使用的是 CIDDM模型的 DI-85 ($z=1.8$)参数^[56]。

Figure 4-1: Energy per baryon and the corresponding longitudinal and transverse pressures as functions of the baryon density for SQM under constant magnetic fields with strengthes of $B = 1 \times 10^{18}$ G, 2×10^{18} G and 3×10^{18} G within the CIDDM model with DI-85 ($z=1.8$)^[56].



发现每核子能量最低点所对应的粒子数密度会随着磁场强度的增加而增加，从 0.49 fm^{-3} 到 0.61 fm^{-3} 再到 0.86 fm^{-3} ，对应的磁场 B 也就从 $1 \times 10^{18} \text{ G}$ 变化至 $2 \times 10^{18} \text{ G}$ 最终达到 $3 \times 10^{18} \text{ G}$ 。

另外，我们也能够从图4-1看出，对于固定的粒子数密度且当磁场 B 增加时，横向压强 P_{\perp} 会随着平行压强 P_{\parallel} 的减小而增加，会导致常数磁场下 P_{\perp} 和 P_{\parallel} 出现一个劈裂，并且这个劈裂会随着磁场 B 的增加而迅速变大。常数磁场下压强的各向异性的原因是由于磁场能量引入的附加项 B^2 以及 P_{\perp} 在方程(4.19)和(4.20)里面出现的系统的总的磁化率。

为了能够定量描述强磁场下压强的各向异性行为，我们可以定义一个正规化的压强劈裂因子：

$$\delta_p = \frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{(P_{\perp} + P_{\parallel})/2}. \quad (4.28)$$

根据定义，如果 P_{\perp} 和 P_{\parallel} 之间没有劈裂，那么 $\delta_p = 0$ ；如果对于极端情况 $P_{\parallel} = 0$ ，那么 $\delta_p = 2$ 。在图4-2里，我们给出了奇异夸克物质的横向纵向压强以及压强劈裂因子 δ_p 随着磁场强度 B 的变化关系。这里面我们选取了三种粒子数密度 $n_B = 3\rho_0$ ， $5\rho_0$ ，以及 $7\rho_0$ ，采用的参数为CIDDM模型的DI-85 ($z=1.8$)。为了对比，我们还加入了 $B = 0$ 情况下所对应的压强。在夸克星内部，其中心密度一般是 $7\rho_0$ ， $n_B = 3\rho_0$ 和 $5\rho_0$ 是夸克星内部的两种典型的粒子数密度。

在图4-2里面，我们给出了一个磁场强度 B_m ，如果磁场强度低于此值，那么所对应的磁场对压强的影响基本可以忽略($\delta_p \leq 5\%$)，当磁场强度比 B_m 大的时候，横向压强 P_{\perp} 会随着径向压强 P_{\parallel} 的减小而快速增大，此时磁场也在增加这时候会给出一个快速增大的 δ_p 。当磁场强度 B 继续增大并达到临界点 B_c 时，平行压强 P_{\parallel} 减小到零点(此时 $\delta_p = 2$)。当磁场强度大于 B_c 的时候，压强 P_{\parallel} 将会出现负值，并且系统开始变得不稳定。所以 B_c 是稳定的奇异夸克物质所能承受的最大的磁场强度。另外，我们也能从图4-2看出 B_m 和 B_c 的取值和重子数密度有关。我们能从图上的到如下信息：对于重子数密度为 $n_B = 3\rho_0$ ，有 $B_m \approx 1.5 \times 10^{17} \text{ G}$ 以及 $B_c \approx 7.30 \times 10^{17} \text{ G}$ ；同样当 $n_B = 5\rho_0$ ，有 $B_m \approx 4.5 \times 10^{17} \text{ G}$ 以及 $B_c \approx 2.80 \times 10^{18} \text{ G}$ ；最后 $n_B = 7\rho_0$ 时， $B_m \approx 6.0 \times 10^{17} \text{ G}$ 且 $B_c \approx 3.74 \times 10^{18} \text{ G}$ 。对于一个磁化的致密星体，必须要先确定致密星体内部的磁场满足 $B < B_c$ 。

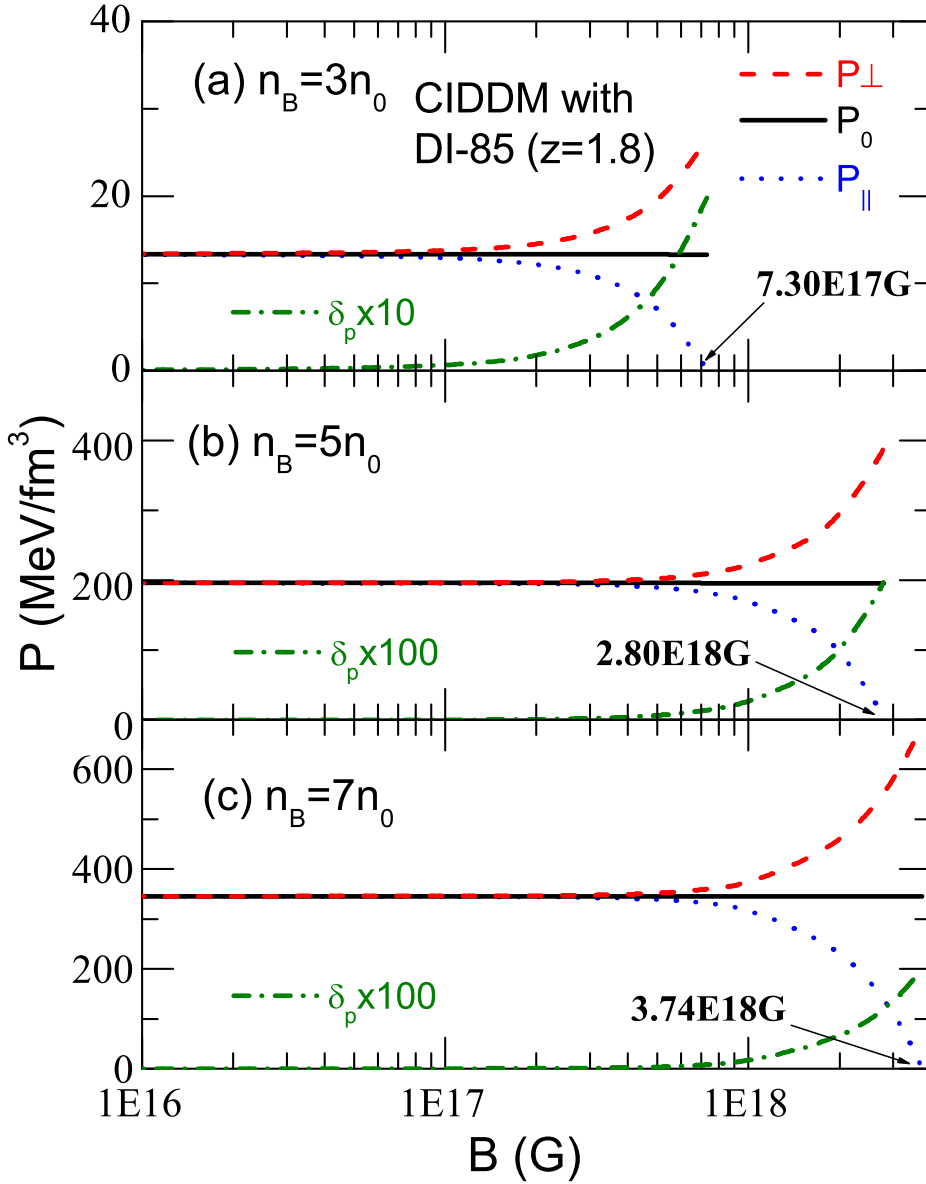


图 4-2: 横纵向压强以及它们的压强劈裂因子 δ_p 在粒子数密度为 $n_B = 3\rho_0$ 、 $5\rho_0$ 和 $7\rho_0$ 的时候随着磁场 B 的变化, 这里我们采用了CIDDM模型的DI-85这套参数, 并且考虑奇异夸克物质的情况 [56]。

Figure 4-2: Transverse and longitudinal pressures together with the pressure splitting factor δ_p as functions of the magnetic field strength B for SQM at baryon number densities of $n_B = 3\rho_0$, $5\rho_0$, and $7\rho_0$ within the CIDDM model with DI-85 ($z=1.8$). The corresponding pressures at $B = 0$ (P_0) are also included for comparison [56].

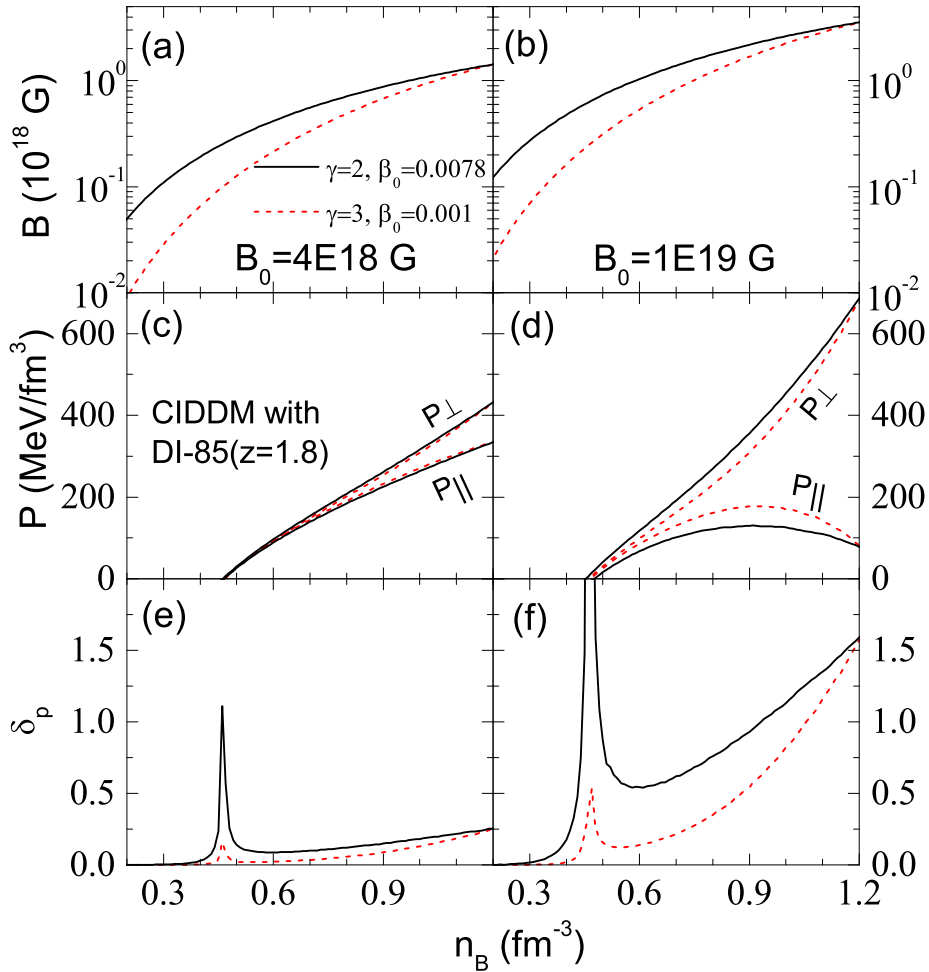


图 4-3: 在磁场缓慢和快速变化的情况里, 我们给出了夸克星内的奇异夸克物质的密度相关磁场 B 和横纵向压强以及压强非对称度 δ_p 的重子数依赖情况, 采用的是CIDDM模型里面的DI-85这套参数, 并且使用了两种不同的常数磁场 $B_0 = 4 \times 10^{18}$ G (左图), 1×10^{19} G (右图)^[56]。

Figure 4-3: Baryon density dependence of the magnetic field strength B , longitudinal and transverse pressures as well as the pressure splitting factor δ_p for SQM in QSs using the slow B-profile (solid lines) and fast B-profile (dashed lines) within the CIDDM model with DI-85 ($z=1.8$). $B_0 = 4 \times 10^{18}$ G (left panels) and 1×10^{19} G (right panels) are considered^[56].

4.3.2 重子数密度相关磁场下的夸克星

之前我们说过, 在磁化的致密星体内部磁场强度的大小一般认为是会发生改变的, 所以方程(4.25)就给出了一个密度相关磁场的情况来描述星体中的磁场强度的分布。因为我们关于星体内磁场强度的分布所知甚少, 所以我们在这一章的工作里面考虑了两维参数 β_0 和 γ , 也就是说, 变化很快的磁场我们用 $\gamma = 3$ 和 $\beta_0 = 0.001$ (定义为“快速磁场情况”); 慢磁场的情况为 $\gamma = 2$ 以及 $\beta_0 = 0.0078$ (定义为“慢速磁



场情况”)。使用了两种不同的磁场情况，我们从图4-3可以得到磁场的密度相关性， $B_0 = 4 \times 10^{18}$ G 和 $B_0 = 1 \times 10^{19}$ G 下奇异夸克物质的纵向横向压强以及相应的压强劈裂因子 δ_p ，采用的参数为 DI-85 ($z=1.8$)。

从图4-3里可以看出，快速磁场情况与慢速磁场情况相比，给出了一个更强的磁场强度密度相关性，也就是说，从高密度（致密星体的核心）到低密度（致密星体表面）的一个快速递减过程。对于 B_0 比较小的情况 ($B_0 = 4 \times 10^{18}$ G)，我们能看出 P_{\perp} 在高密度的时候取值要大于 P_{\parallel} ，并且它们基本上具有相同的零压点 0.46 fm^{-3} 。对于这种 B_0 比较小的情况， P_{\perp} 和 P_{\parallel} 之间的压强劈裂并不大，在粒子数密度等于 1.2 fm^{-3} 时，有 $\delta_p = 0.25$ (也就是说， $P_{\parallel}/P_{\perp} = 0.78$)。 δ_p 的峰值会在 0.46 fm^{-3} 处出现，这是因为 P_{\parallel} 在这个密度为零，也就是夸克星表面的情况。我们还能够看出，在 $B_0 = 4 \times 10^{18}$ G 下，奇异夸克物质的快速磁场情况和慢速磁场情况的物态方程的差距并不大。另外，对于 $B_0 = 1 \times 10^{19}$ G 的情况，我们能够发现 P_{\perp} 比 P_{\parallel} 的取值要大很多，并且当 $n_B \geq 0.9 \text{ fm}^{-3}$ 时，垂直磁场压强总是随着重子数增大而增大，平行磁场压强会随着重子数密度的增大而减小，会引起一个在高粒子数密度处的非常大的横纵向压强劈裂，换言之，此时的 $\delta_p = 1.6$ (也就是在 1.2 fm^{-3} 下，相应的压强比率为： $P_{\parallel}/P_{\perp} = 1/9$)。因此，压强在 $B_0 = 1 \times 10^{19}$ G 下，夸克星的核心内的各向同性度会非常大。更进一步地说， B_0 取值很大的时候(也就是说， $B_0 = 1 \times 10^{19}$ G)，我们能从图4-3看出，不同的磁场的情况会对横纵向压强和它们的劈裂有着非常大的影响。强磁场下的压强的非各向同性效应说明了夸克星内部的磁场方向的分布对于夸克星的结构起到了非常大的作用。在图4-4里面，是在CIDDM模型里面基于 DI-85 ($z=1.8$)这套参数的在快速磁场和慢速磁场的两种情况下横向径向磁场下的夸克星的最大静止质量随着 B_0 的变化关系图。很有意思的是，静止夸克星的最大质量在横向磁场的情况下会随着 B_0 的增大而增大，同时在径向磁场的情况下会随着 B_0 的增大而减小，特别是在 B_0 大于 3×10^{18} G 之后，这个效应会很明显。同样的我们也能从慢速磁场的情况中发现这些效应。

对于快速磁场的情况，我们能够从图4-4(a)中看出，在横向（径向）磁场方向上静止夸克星的最大质量可以达到 $2.13M_{\odot}$ ($1.57M_{\odot}$) 于 $B_0 \approx 1.28 \times 10^{19}$ G，这个磁场的取值也就是磁场 B_0 的上限值，如果再增加此项的取值，夸克星内部的纵向磁场就会出现负值。为了能看到夸克星的最大质量如何受到磁场方向的影响，我们定义了一个夸克星的最大质量的非对称度 δ_m ：

$$\delta_m = \frac{M_{\perp} - M_{\parallel}}{(M_{\perp} + M_{\parallel})/2}, \quad (4.29)$$

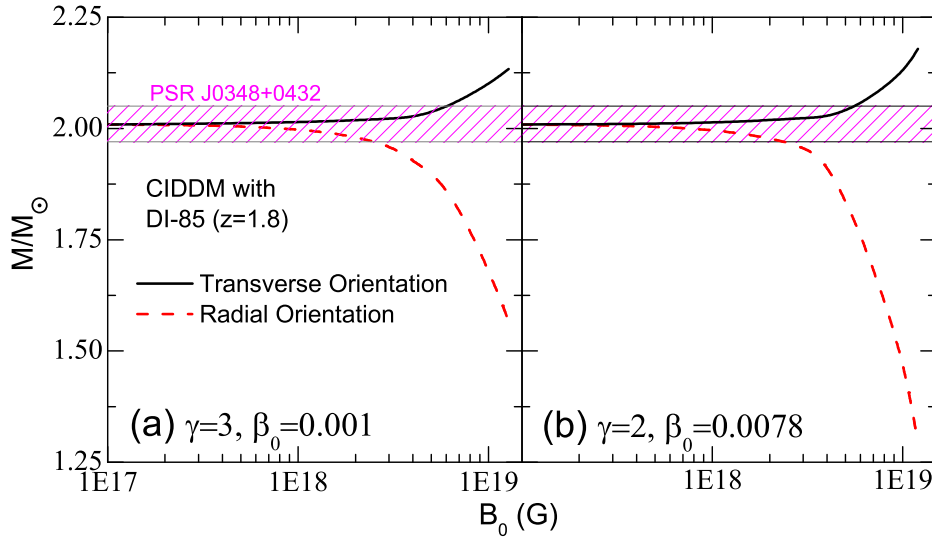


图 4-4: 在磁场快速变化和慢速变化的情况下分别使用了横向和径向方向的磁场的夸克星的最大质量随着 B_0 的变化, 这里使用CIDDM模型里面的DI-85这套参数, 阴影区域是 PSR J0348+0432 [57]给出的 $2.01 \pm 0.04M_\odot$ 的脉冲星质量 [56]。

Figure 4-4: Maximum mass of static QSs using the transverse and radial orientations of the magnetic fields as a function of B_0 with the fast B-profile (a) and the slow B-profile (b) within the CIDDM model with DI-85($z=1.8$). The shaded band represents the pulsar mass of $2.01 \pm 0.04M_\odot$ from PSR J0348+0432 [57].

其中 M_\perp (M_\parallel)表示夸克星在横向 (纵向) 磁场下的最大质量.从图4-4 (a)可以看出质量非对称度可以在 $B_0 = 1.28 \times 10^{19}$ 下达到 $\delta_m = 30\%$ 。

另外, 对于慢速磁场情况, 我们能够从图4-4(b)看出横 (纵) 方向磁场下静止夸克星的最大质量可以达到 $2.18M_\odot$ ($1.29M_\odot$) 于磁场 $B_0 = 1.20 \times 10^{19}$ G 下, 此时的 B_0 就是磁场的上限值, 如果磁场取值比它偏大, 夸克星核心的纵向压强就会取负值此时的最大的质量非对称度为 $\delta_m = 51\%$ 于磁场 $B_0 = 1.20 \times 10^{19}$ G. 因此我们的结果指出磁化夸克星的最大质量是依赖于夸克星内部磁场的取值和方向的。

4.4 本章总结

我们通过使用同位旋密度相关夸克质量模型来研究了强磁场下奇异夸克物质和夸克星的性质。我们自洽地计算了常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程并且发现系统的压强会在强磁场下按照垂直于磁场和平行于磁场两个方向各向异性, 前者要比后者通常意义下来得大。系统的压强在磁场强度非常大的时候可能会出现非常明显的各向异性, 因此磁化的夸克星的性质可能和星体内的磁场方向有关。



通过使用密度相关磁场的情况来模拟星体内部磁场的分布，我们研究了静止球对称夸克星的性质，采用了两种星体内磁场方向的假设：局域磁场沿着半径方向的径向方向以及局域磁场在垂直于径向方向的平面随机分布的横向方向。基于这两种极端的磁场方向情况，我们发现静止的磁化的夸克星的最大质量可能很大程度上依赖于星体内的磁场方向，并且径向（横向）磁场方向可以很大程度上减小（增大）夸克星的最大质量。静止的磁化的夸克星的最大质量通过研究也发现依赖于密度相关磁场的具体分布。

由上，我们现在的结果指出，强磁场下的夸克星的性质不仅和磁场强度分布有关，还要考虑磁场方向的分布情况，而且加入磁场后致密星体的质量增大还是减小也依赖于星体内的磁场方向。

参考文献

- [1] Glendenning N.K., “Compact stars”, 2nd edition, Springer-Verlag New York, 2000.
- [2] Weber F., “Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics”, IOP Publishing Ltd, 1999.
- [3] Lattimer J.M. & Prakash M., “The physics of neutron stars”, Science, 2004, **304**(1), 536.
- [4] Steiner A.W. et al, “Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars”, Phys. Rep., 2005, **410**(5), 325.
- [5] Bombaci I. et al, “Quark deconfinement and implications for the radius and the limiting mass of compact stars”, APJ, 2004, **614**(10), 314.
- [6] Staff J. et al, “A three stage model for the inner engine of gamma ray burst: Prompt emission and early afterglow”, APJ, 2007, **667**(3), 340.
- [7] Herzog M. & Röpke F.K., “Three dimensional hydrodynamic simulations of the combustion of a neutron star into a quark star”, PRD, 2011, **84**(4), 083002.
- [8] Bodmer A.R., “Collapsed nuclei”, PRD, 1971, **4**(1601).
- [9] Terazawa H., “Algebra of subquark charges”, INS-Report, 1979, **336**(7).



- [10] Witten E., “Cosmic separation of phases”, PRD, 1984, **30**(2), 272.
- [11] Rehberg P. et al, “Hadronization in the su(3) nambu jona lasinio model”, PRC, 1996, **53**(18), 410.
- [12] Hanauske M. et al, “Strange quark stars within the nambu jona lasinio model”, PRD, 2001, **64**(12), 043005.
- [13] Rüstler S.B. & Rischke D.H., “Effect of color superconductivity on the mass and radius of a quark star”, PRD, 2004, **69**(1), 045011.
- [14] Menezes D.P. et al, “Quark stars within relativistic models”, JPG, 2006, **32**(1), 1081.
- [15] Freedman B.A. & McLerran L.D., “Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. i. formal techniques”, PRD, 1977, **16**(3), 1169.
- [16] Fraga E.S. et al, “Hydrodynamical instabilities in an expanding quark gluon plasma”, 2001.
- [17] Fraga E.S. & Romatschke P., “Role of quark mass in cold and dense perturbative quantum chromo dynamics”, PRD, 2005, **71**(105014).
- [18] Kurkela A. et al, “Cold quark matter”, PRD, 2010, **81**(105021).
- [19] Roberts C.D. & Williams A.G., “Dyson schwinger equations and their application to hadronic physics”, Prog. Part. Nucl. Phys., 1994, **33**(2), 477.
- [20] Zong H.S. et al, “New approach for calculating the dressed quark propagator at finite chemical potential”, PRC, 2005, **71**(5), 015205.
- [21] Qin S.X. et al, “Phase diagram and critical end point for strongly interacting quarks”, PRL, 2011, **106**(172301).
- [22] Fowler G.N. et al, “Confinement and phase transitions”, PRC, 1981, **9**(10), 271.
- [23] Chakrabarty S. et al, “Strange quark matter and the mechanism of confinement”, PLB, 1989, **229**(18), 112.



-
- [24] Chakrabarty S., *Equation of state of strange quark matter and strange star*, volume 43, 1991, 627.
- [25] Benvenuto O.G. & Lugones G., “Strange matter equation of state in the quark mass density dependent model”, PRD, 1995, **51**(1), 1989.
- [26] Peng G.X. et al, “Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the brueckner theory with three body forces and a quark model with chiral mass scaling”, PRC, 1999, **61**(6), 015201.
- [27] Peng G.X. et al, “Charge and critical density of strange quark matter”, PRC, 2000, **62**(025801).
- [28] Peng G.X. et al, “Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the brueckner theory with three body forces and a quark model with chiral mass scaling”, PRC, 2008, **77**(065807).
- [29] Li A. et al, “Strange stars with different quark mass scalings”, Research Astron. Astrophys., 2011, **11**(5), 482.
- [30] Schertler K. et al, “Medium effects in strange quark matter and strange stars”, NPA, 1997, **616**(12), 659.
- [31] Schertler K. et al, “The influence of medium effects on the gross structure of hybrid stars”, NPA, 1998, **637**(1), 451.
- [32] Chu P.C. & Chen L.W., “Quark matter symmetry energy and quark star”, APJ, 2014, **780**(4), 135.
- [33] Woltjer L., “X rays and type i supernova remnants.”, APJ, 1964, **140**(1309).
- [34] Mihara T.A., “New observations of the cyclotron absorption feature in hercules x1”, Nature, 1990, **346**(2), 250.
- [35] Chanmugam G., “Magnetic fields of degenerate stars”, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 1992, **30**(143).
- [36] Ferrer E.J. et al, “Equation of state of a dense and magnetized fermion system”, PRC, 2010, **82**(4), 065802.



- [37] Isayev A.A. & Yang J., “Anisotropic pressure in dense neutron matter under the presence of a strong magnetic field”, *PLB*, 2012, **707**(3-4), 2176.
- [38] Bandyopadhyay D. et al, “Dense nuclear matter in a strong magnetic field”, *JPG*, 1998, **24**(4), 1647.
- [39] Menezes D.P. et al, “Quark matter under strong magnetic fields in the nambu jona lasinio model”, *PRC*, 2009, **79**(3-4), 035807.
- [40] Ryu C.Y. et al, “Medium effects of magnetic moments of baryons on neutron stars under strong magnetic fields”, *PRC*, 2010, **82**(4), 025804.
- [41] Ryu C.Y. et al, “Qhd description of the instability in strongly magnetized neutron stars”, *Astropart. Phys.*, 2012, **38**(3-4), 25.
- [42] Broderick A. et al, “The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields”, *APJ*, 2000, **537**(4), 351.
- [43] Cardall C.Y. et al, “Effects of strong magnetic fields on neutron star structure”, *APJ*, 2001, **554**(3-4), 322.
- [44] Paulucci L. et al, “Equation of state for the magnetic color flavor locked phase and its implications for compact star models”, *PRD*, 2011, **83**(4), 043009.
- [45] Dexheimer V. et al, “The influence of strong magnetic fields on proto quark stars”, *JPG*, 2014, **41**(3-4), 015203.
- [46] Casali R.H. et al, “Hadronic and hybrid stars subject to density dependent magnetic fields”, *PRC*, 2014, **89**(4), 015805.
- [47] Hou J.X. et al, “Magnetized strange quark matter in a mass density and dependent model”, arXiv:1403. 1143, 2014.
- [48] Di Toro M. et al, “Testing deconfinement at high isospin density”, *NPA*, 2006, **775**(3-4), 102.
- [49] Pagliara G. & Bielich J., “Hadron quark phase transition at nonzero isospin density: The effect of quark pairing”, *PRD*, 2010, **81**(4), 094024.



-
- [50] Toro M.D. et al, “Probing the nuclear symmetry energy with heavy collisions”, JPG, 2010, **37**(3-4), 083101.
- [51] Shao G.Y. et al, “Influence of vector interactions on the hadron quark/gluon phase transition”, PRD, 2012, **85**(4), 114017.
- [52] Landau L.D. & Lifshitz E.M., “Quantum mechanics”, 1965.
- [53] Duncan R.C., “Strongly magnetized neutron star matter in the extended zimanyi moszkowski model”, arXiv:astro-ph/0002442, 2000.
- [54] Hugenholtz N.M. & Van Hove L., “A theorem on the single particle energy in a fermi gas with interaction”, Physica, 1958, **24**(4), 363.
- [55] Oppenheimer J.R. & Volkoff G.M., “On massive neutron cores”, Phys. Rev, 1939, **33**(3-4), 374.
- [56] Chu P.C., Chen L.W., & Wang X., “Quark stars under strong magnetic fields”, PRD, 2014, **90**(4), 063013.
- [57] Antoniadis J. et al, “A massive pulsar in a compact relativistic binary”, Science, 2013, **340**(3-4), 6131.

第五章 基于NJL模型的强磁场下夸克物质与夸克星

5.1 引言

强相互作用的核物质的性质，一直以来都是核物理、天体物理和宇宙学的基本问题之一。研究核物质的物态方程，可以更好地理解强相互作用核物质的性质。一般来说，致密星体可以给出一种给出高粒子数密度和低温度的强项相互作用的核物质的性质的方法。中子星可以给出丰中子核物质的重要信息^[1,2]。在中子星的内部，物质密度可以比正常核物质的饱和密度要高出好几倍，所以中子星内部可以存在非常致密的物质，比如：超子、介子的凝聚，甚至可能还有奇异夸克物质。实际上，奇异夸克物质一直以来都被称之为是QCD的真正基态^[3,4]。所以人们已经给出了中子星和夸克星的设想，这里面的夸克星基本上是由奇异夸克物质和轻子构成^[5-8]。还有一些混合星的假设，这里面就是将致密星体里面的物质看成从核物质到夸克物质的一个相变过程，已经有很多作者提出了混合星的相变的工作^[9-15]。

我们知道，致密星体是孕育在强磁场下的，这是一个很重要的问题。中子星表面的强磁场的强度一般认为是 $10^9 \sim 10^{15} \text{G}$ 。这些孕育在强磁场下的星体，我们称之为磁星并且人们发现磁星的内核的磁场强度甚至可能达到 10^{19}G ^[16-21]。基于这种现象，致密星体的磁场强度可已采用致密星体半径磁场强度相关的方法来处理，也就是密度相关磁场的方法，进而求得致密星体物质磁场下的物态方程以及其他性质^[22-24]。

要给出夸克星的性质，首先我们应该先给出夸克星物质的物态方程。我们知道，格点QCD不能解决有限化学势下的夸克星物质的问题，这是因为会出现所谓的符号问题；其次，微扰QCD也不能给出低密度夸克物质的性质——所以，我们要提出来唯像模型来给出夸克星物质的物态方程来。这一章，我们采用了Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型来给出奇异夸克物质的物态方程。这个模型能够很容易地给出QCD的一个全局的对称性。NJL模型也能很清晰地描述手征对称性的自发破缺。人们已经做了很多关于强磁场下的NJL模型的夸克物质的性质，并且能够通过SU(3)NJL模型给出磁星的性质，这里面用的NJL模型包括标量-赝标量同位旋标量道和t'Hooft项。在这一章里，我们想要加入矢量-同位旋矢量道和矢量-同位旋标量道来得到SU(3)NJL模型的物态方程并且给出密度相关磁场下的磁星。我们放置



矢量道在拉氏密度里面的原因是，矢量道的相互作用对于决定有限温度奇异夸克物质的性质有很重要的作用，并且矢量介子也能在实验测量中找到^[25,26]。矢量道常数 G_v 在真空中可以通过测量矢量介子谱来估计到^[27-29]。但是在有限粒子数密度的情况，我们把 $G_v, G_{I,V}$ 作为可调参数，给出磁场下奇异夸克星物质的性质。最新发现的致密星体PSRJ0348+0432的质量可以达到 $2.01 \pm 0.04 M_\odot$ ，可以给出脉冲星最新的最大质量。所以如果我们考虑把矢量-同位旋矢量和矢量-同位旋标量道考虑在里面的NJL模型，如果在强磁场下我们能够给出最新的PSR J0348+0432脉冲星，那么这将是很有趣的结果。

众所周知，NJL模型在压强里仅仅考虑了夸克的贡献，因此NJL模型给出的压强要比格点QCD零化学势高温所给出的压强的取值要小。为了能够给出压强里面胶子部分贡献，NJL模型的Polyakov-loop势能在这个工作里最早提出^[30]并且在这个工作进行发展^[31]，这个势能是温度相关的。PNJL模型能够很好地符合Lattice QCD计算得到的高温状态下的物态方程的结果。然而，对于有限化学势的情况，上述的Polyakov-loop势能就变得无能为力了。为了能够利用PNJL模型来描述中子星，Polyakov势能被改推广为进成化学势相关的势能^[32]。为了能够准确地描述磁星的性质，我们还应该考虑磁化胶子的贡献，现在的工作中并没有涉及到磁场下的Polyakov势能的推广，所以在这一章的工作，我们给出了一个描述磁化胶子势能的方法。

5.2 SU(3)NJL模型的理论推导

我们要研究 β 稳定条件下考虑了外磁场 A_μ^{ext} 的SU(3)NJL模型的夸克物质的性质，首先给出拉氏密度表达式如下：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_e - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

这里 $\mathcal{L}_q, \mathcal{L}_e$ 分别是夸克和电子的拉氏密度。 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{ext} - \partial_\nu A_\mu^{ext}$ 是外磁场的电磁场张量。磁场 B 是沿着z方向的静磁场 $A_\mu^{ext} = \delta_{\mu 2} x_1 B$ 。这个工作里没有考虑反常磁矩的贡献，是因为夸克物质的反常磁矩的研究依然是一片迷雾，而且电子的反常磁矩非常小^[21]。

电子的拉氏密度可以写成：

$$\mathcal{L}_e = \bar{e}[(i\partial_\mu - eA_{ext}^\mu)\gamma^\mu]e. \quad (5.2)$$



我们可以写出三味夸克NJL模型的拉氏密度来:

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_f [\gamma_\mu (i\partial^\mu - q_f A_{ext}^\mu) - \hat{m}_c] \psi_f + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6, \quad (5.3)$$

这里 \mathcal{L}_4 是具有 $SU(3)_{color} \otimes SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 对称性的四费米子相互作用, \mathcal{L}_6 是破坏 $U(1)_A$ 对称性的六费米子相互作用。 $\psi = (u, d, s)^T$ 给出了三味夸克的夸克场。 $\hat{m}_c = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ 是流夸克质量矩阵, 并且 q_f 代表了夸克的带电荷数。包含了标量、赝标量、矢量、轴矢量的四点相互作用的拉氏密度为:

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_{I,V}. \quad (5.4)$$

标量部分的形式为:

$$\mathcal{L}_S = G_S \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}_f \lambda_a \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \lambda_a \psi_f)^2], \quad (5.5)$$

矢量部分的表达式为:

$$\mathcal{L}_V = -G_V \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_a \psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma^\mu \gamma_5 \lambda_a \psi)^2]. \quad (5.6)$$

这里 G_S 和 G_V 是标量道和矢量道的耦合常数。 $\lambda_a (a = 1, \dots, 8)$ λ_a 是盖尔曼矩阵, 并且是 $SU(3)$ 群的生成元。其中 $\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$, I 是 3×3 的单位矩阵。一个方便的表达形式是把 $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ 转化为 $\{\lambda_0, \lambda_1^\pm, \lambda_3, \lambda_4^\pm, \lambda_6^\pm, \lambda_8\}$, 其中

$$\begin{aligned} \lambda_1^\pm &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \\ \lambda_4^\pm &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \\ \lambda_6^\pm &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7). \end{aligned}$$

这个方法会很容易地来描写包含标量、赝标量、矢量、轴矢量的九重相互作用。为了区分同位旋标量和同位旋矢量的效应, 我们增加了一个矢量-同位旋矢量道:

$$\mathcal{L}_{IV} = -G_{IV} [(\bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi)^2 + (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \vec{\tau} \psi)^2]. \quad (5.7)$$



矢量-同位旋标量的耦合常数为 $G_V^\omega = G_V$ ，矢量-同位旋矢量的耦合常数是 $G_V^\rho = G_V + G_{IV}$ 。六费米子相互作用 \mathcal{L}_6 ，也就是 't Hooft 项的表达式为：

$$\mathcal{L}_{det} = -K \{ \det_f [\bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \psi_f] + \det_f [\bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \psi_f] \}, \quad (5.8)$$

这个会破坏 $U(1)_A$ 对称性。

5.2.1 夸克部分压强的贡献

对物理学家而言，获得夸克物质性质的最好的途径就是计算夸克物质的物态方程。为了能描述夸克物质的压强和能量密度，我们首先应该计算夸克物质的热力学势密度 Ω_f 。一般来说我们可以通过平均场近似下的有限温度场论来计算热力学量，于是平均场近似下的拉氏密度如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \bar{\psi}_f [\gamma_\mu (i\partial^\mu - q_f A_{ext}^\mu) - \hat{M} - 2G_{IV}\gamma_0\tau_{3f}n_f] \psi_f \\ & - 2G_S(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s - 4G_V\gamma_0\hat{\rho} \\ & + 2G_V(n_u^2 + n_d^2 + n_s^2) + G_{IV}(n_u - n_d)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.9)$$

这里有 $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} n_u & 0 & 0 \\ 0 & n_d & 0 \\ 0 & 0 & n_s \end{pmatrix}$

并且 $\hat{M} = \begin{pmatrix} M_u & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 \\ 0 & 0 & M_s \end{pmatrix}$ 。

组分夸克质量可以计算得到：

$$M_f = m_f - 4G_S\sigma_f + 2K\sigma_j\sigma_k, \quad (5.10)$$

这里 $f, j, k = u, d, s$ ，手征凝聚的表达式如下：

$$\sigma_f = \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{(\not{p} - M_f + i\epsilon)}. \quad (5.11)$$



经过朗道量子化（附录里面会介绍）以及一些有限温度场论的路径积分的计算，我们能够得到磁场下夸克物质的热力学势表达式 Ω_q 。零温下压强的表达式为 $p_q = -\Omega_q$ ，于是我们可以给出：

$$\begin{aligned} p_q &= -2G_S(\sigma_u^2 + \sigma_d^2 + \sigma_s^2) + 4K\sigma_u\sigma_d\sigma_s \\ &+ 2G_V(n_u^2 + n_d^2 + n_s^2) + G_{IV}(n_u - n_d)^2 \\ &+ (\theta_u + \theta_d + \theta_s) \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中：

$$\theta_f = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left\{ \frac{1}{T} [\not{p} - \hat{M}_f + \gamma_0 \tilde{\mu}_f] \right\}, \quad (5.13)$$

这里面有

$$\tilde{\mu}_f = \mu_f - 4G_V n_f - 2G_{IV}(n_u - n_d), \quad (5.14)$$

并且 μ_f 是每一味夸克物质的化学势。

从前人的工作^[33]里面，我们能够得到夸克物质的凝聚和压强的表达式。热力学势中的对数贡献如下：

$$\theta_f = \theta_f^{vac} + \theta_f^{mag} + \theta_f^{med}. \quad (5.15)$$

第一项是真空贡献：

$$\theta_f^{vac} = -\frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ M_f^4 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M_f} \right] - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right\}, \quad (5.16)$$

这里面有 $\epsilon_\Lambda^2 = \Lambda^2 + M_f^2$ ， Λ 是动量截断。磁场的贡献如下：

$$\begin{aligned} \theta_f^{mag} &= \frac{N_c}{2\pi^2} (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{4} + \zeta'(-1, x_f) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln(x_f) \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

这里 $\zeta(z, x)$ 是Riemann-Hurwitz函数，其导数为：

$$\zeta'(-1, x_f) = d\zeta(z, x)/dz|_{z=-1} \quad (5.18)$$



并且 $x_f = \frac{M_f^2}{2|q_f|B}$. 介质贡献项的表达式为:

$$\begin{aligned} \theta_f^{med} &= \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{(|q_f|BN_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2} \right. \\ &\quad \left. - s_f(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

这里有

$$s_f(k, B) = \sqrt{M^2 + 2|q_f|Bk}, \quad (5.20)$$

并且

$$k_{fmax} = \frac{\mu_f^2 - M^2}{2|q_f|B} = \frac{p_{f,F}^2}{2|q_f|B}, \quad (5.21)$$

是朗道能级的上限, 并且有 $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$. 于是我们能够给出每一味夸克的凝聚的表达式:

$$\sigma_f = \sigma_f^{vac} + \sigma_f^{mag} + \sigma_f^{med} \quad (5.22)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_f^{vac} &= -\frac{M_f N_c}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_f^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2})^2}{(M_f^2)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^{mag} &= -\frac{M_f N_c}{2\pi^2} (|q_f|B) \left\{ \ln[\Gamma(x_f)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\ln(x_f)}{2} - x_f \ln(x_f) \right\}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^{med} &= \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{M_f |q_f| B N_c}{\pi^2} \\ &\quad \left\{ \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.2.2 轻子的压强贡献

对于奇异夸克物质, 我们假设其中没有中微子, 是由 u, d, s 夸克和 e^- 来构成电



中性和化学平衡的系统。弱相互作用平衡方程如下：

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s, \quad (5.26)$$

这里 μ_i ($i = u, d, s, e^-$) 是奇异夸克物质的各种粒子的化学势，电中性条件如下：

$$\frac{2}{3}n_u = \frac{1}{3}n_d + \frac{1}{3}n_s + n_e. \quad (5.27)$$

这里

$$n_f = \sum_{k=0}^{k_f, max} \alpha_k \frac{|q_f| B N_c}{2\pi^2} k_{F,f} \quad (5.28)$$

是每一味夸克的粒子数密度， $k_{F,f} = \sqrt{\tilde{\mu}_f^2 - s_f(k, B)^2}$ 是夸克物质的费米动量。我们有

$$n_l = \sum_{k=0}^{k_l, max} \alpha_k \frac{|q_l| B}{2\pi^2} k_{F,l}. \quad (5.29)$$

作为电子的粒子数密度。

我们也能写出压强中轻子的贡献如下：

$$p_l = \sum_{k=0}^{k_l, max} \alpha_k \frac{(|q_l| B N_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_l \sqrt{\mu_l^2 - s_l(k, B)^2} - s_l(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_l + \sqrt{\mu_l^2 - s_l(k, B)^2}}{s_l(k, B)} \right] \right\}. \quad (5.30)$$

5.2.3 磁化胶子产生的压强

众所周知NJL模型仅仅在压强里面考虑了夸克的贡献，所以得到的压强要小于高温零化学势的格点QCD计算的结果。在强磁场的条件下，不仅仅是夸克会被磁场极化，胶子也会通过夸克圈而被极化。现在还没有关于计算磁化胶子对压强贡献的工作。

现在考虑压强中的胶子的贡献：一方面Polyakov-loop势能在^[30,31]被考虑在NJL模型里面，这个势能是温度相关的。PNJL能够符合格点QCD高温情况下的物态方程。然而，对于有限化学势的情况，上述的Polyakov-loop势能就变得无能为力了。为了能够利用PNJL模型来描述中子星，Polyakov势能被改推广为进成化学势相关的势能^[32]。



另一方面，很多工作都阐述了利用微扰理论和硬密环（HDL）计算高温有限密度情况下强相互作用物质的物态方程。在高温情况，最近的关于三圈硬热圈的计算和300MeV温度下的格点QCD的结果相一致^[34]。

夸克和胶子的理想气体压强的表达式为：

$$p^{SB} = p_q^{SB} + p_g^{SB}, \quad (5.31)$$

$$p_q^{SB} = N_c N_f \left(\frac{7\pi^2 T^4}{180} + \frac{\mu^2 T^2}{6} + \frac{\mu^4}{12\pi^2} \right), \quad (5.32)$$

$$p_g^{SB} = (N_c^2 - 1) \frac{\pi^2 T^4}{90}. \quad (5.33)$$

注意到胶子的理想气体的压强只和温度相关，与化学势无关。胶子的屏蔽质量的表达式为：

$$m_g^2 = \frac{1}{6} \left[(N_c + \frac{1}{2} N_f) T^2 + \frac{3}{2\pi^2} \sum_f \mu_f^2 \right] g_{eff}^2, \quad (5.34)$$

单圈微扰计算胶子压强的表达式为：

$$p_g^{PT} = p_g^{SB} - N_g \frac{g_{eff}^2}{32} \left[\frac{5}{9} T^4 + \frac{2}{\pi^2} \mu^2 T^2 + \frac{1}{\pi^4} \mu^4 \right], \quad (5.35)$$

此时胶子产生的压强与化学势相关，并且 μ^4 之前的系数非常小。强磁场下，胶子的传播子的纵向(1+1)分量会产生一个共振 $\sim g\sqrt{eB}$ ^[35]。相应的零温有限密度纵向胶子场 $A_{||}$ 相应的屏蔽质量为：

$$m_g^2(eB) = \sum_f |q_f| \frac{g_{eff}^2}{4\pi^2} |eB|, \quad (5.36)$$

人们可以猜测在非零温的纵向胶子场的屏蔽质量的表达式为：

$$m_g^2(T, \mu, eB) = g^2 (aT^2 + b\mu^2 + ceB) \quad (5.37)$$

这里 a, b, c 是常数。如果考虑横向胶子，磁化胶子所产生的压强可以近似地写作：

$$p_g(T, \mu; eB) = a_0 \mu^2 eB + b_0 \mu^4 + c_0 T^2 eB + d_0 T^4 + e_0 \mu^2 T^2, \quad (5.38)$$



这里 a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 是自由的参数，零温情况下有：

$$p_g(T = 0, \mu; eB) = a_0 \mu^2 eB + b_0 \mu^4. \quad (5.39)$$

更进一步说，对于胶子的屏蔽质量，考虑到 eB 和 μ^2 的项前系数基本同量级，为了简化数值计算，我们给出了磁化胶子压强的表达式的假设：

$$p_g(T = 0, \mu; eB) = a_0 (\mu^2 eB + \mu^4). \quad (5.40)$$

如果我们直接把Eq.(5.35)里面的微扰胶子压强扩展到非微扰的情况，那么胶子压强在零温和有限密度的情况下应该为负值。然而在一般的密度区域，非微扰的胶子特征起到了非常重要的作用。一般密度区域下的系统可以视作由NJL模型和准胶子来描述的准夸克系统。为了能够补充NJL模型压强里面的准夸克的贡献，我们考虑压强里准胶子贡献为正的情况。在我们的数值计算中，我们考虑 $a_0 > 0$ 的情况，并且也计算了 $a_0 < 0$ 作为参考。

5.3 数值计算和结果讨论

在这一部分我们将要计算强磁场下 β 稳定夸克物质的性质。对于强磁场下的奇异夸克物质， $O(3)$ 旋转对称性会破缺，奇异夸克物质的压强会产生各向异性，会使得压强分裂成为平行于磁场方向的压强 P_{\parallel} 和垂直于磁场方向的压强 P_{\perp} 。纵向和横向压强的表达式为：

$$P_{\parallel} = -\Omega - \frac{1}{2} B^2 = p_q + p_l + p_g + \Omega_0 - \frac{1}{2} B^2, \quad (5.41)$$

$$P_{\perp} = p_q + p_l + p_g + \Omega_0 + \frac{1}{2} B^2 - MB \quad (5.42)$$

这里 Ω 是奇异夸克物质的总的热力学势密度， Ω_0 保证在真空中 $\Omega = 0$ 。 M 是系统的磁化率，表达式为：

$$M = -\partial\Omega/\partial B = \sum_{i=u,d,s,l} M_i, \quad (5.43)$$



奇异夸克物质的能量密度的表达式为:

$$\epsilon = -p_q - p_g - p_l - \Omega_0 + \sum_{i=u,d,s,l} \mu_i n_i + \frac{1}{2} B^2 \quad (5.44)$$

我们能够发现纵向压强 P_{\parallel} 满足 Hugenholtz-Van Hove(HVH) 定理^[36], 而横向压强不满足, 这是因为磁场的加入会导致一个附加项的产生。我们能够发现磁场能量密度 $B^2/2$ 对横向和纵向压强贡献相反, 如果磁场强度很大的话, 就会引起的各向异性就会很大。

在我们的数值计算里面, 我们使用的参数是: $\Lambda = 631.4\text{MeV}$, $m_u = m_d = 5.5\text{MeV}$, $m_s = 135.7\text{MeV}$, $G\Lambda^2 = 1.835$, $K\Lambda^5 = 9.29$ 。

5.3.1 磁场下矢量-同位旋矢量以及矢量-同位旋标量相互作用的效应

首先, 我们分析一下矢量-同位旋矢量以及矢量-同位旋标量相互作用对物态方程的影响。从图5-1中我们绘制了压强随着能量密度的变化情况, 我们考虑了三种情形: 1) $G_V = G_{IV} = 0$, 2) $G_V = 0.8G_S, G_{IV} = 0$, 3) $G_V = G_{IV} = 0.8G_S$. 对比前两种情况: 1) $G_V = G_{IV} = 0$, 2) $G_V = 0.8G_S, G_{IV} = 0$, 我们能够发现排斥的矢量-同位旋矢量相互作用 G_V 可以给出一个很硬的物态方程。然而对比后两种情况: 2) $G_V = 0.8G_S, G_{IV} = 0$, 3) $G_V = G_{IV} = 0.8G_S$, 能够看出这两种情况的物态方程基本一致, 这说明在奇异夸克物质里面矢量-同位旋矢量道作用十分微弱。我们能够从方程 5.12发现同位旋矢量-矢量道的效果主要体现在同位旋非对称度($n_u - n_d$)以及耦合常数 G_{IV} 。上面。由于奇异夸克物质里面的同位旋非对称度很小, 所以矢量-同位旋矢量的作用在参数 $G_V = G_{IV} = 0.8G_S$ 下就变得十分之小。因此在接下来的数值计算里, 我们令 $G_{IV} = 0$ 。

在图5-2左边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19}G$ 同时 $G_V = 0$, $G_V = 0.8G_S$ 情况下的奇异夸克物质下u夸克的组分夸克质量随着重子数密度的变化。我们发现排斥的矢量相互作用对u夸克的组分夸克质量影响很小。加入了磁场之后, 因为朗道振荡的关系, 图线会出现不平滑的起伏。图5-2右边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19}G$ 同时 $G_V = 0$, $G_V = 0.8G_S$ 情况下s夸克的组分夸克质量随着重子数的变化。可以看出排斥的矢量相互作用可以使得s夸克的组分夸克质量减小地更快, 这是由于s夸克的粒子数密度在加入了矢量道之后会先出现。同时我们发现, 加入了磁场之后, s夸克的组分夸克质量同样出现了不平滑的现象, 同时在两幅

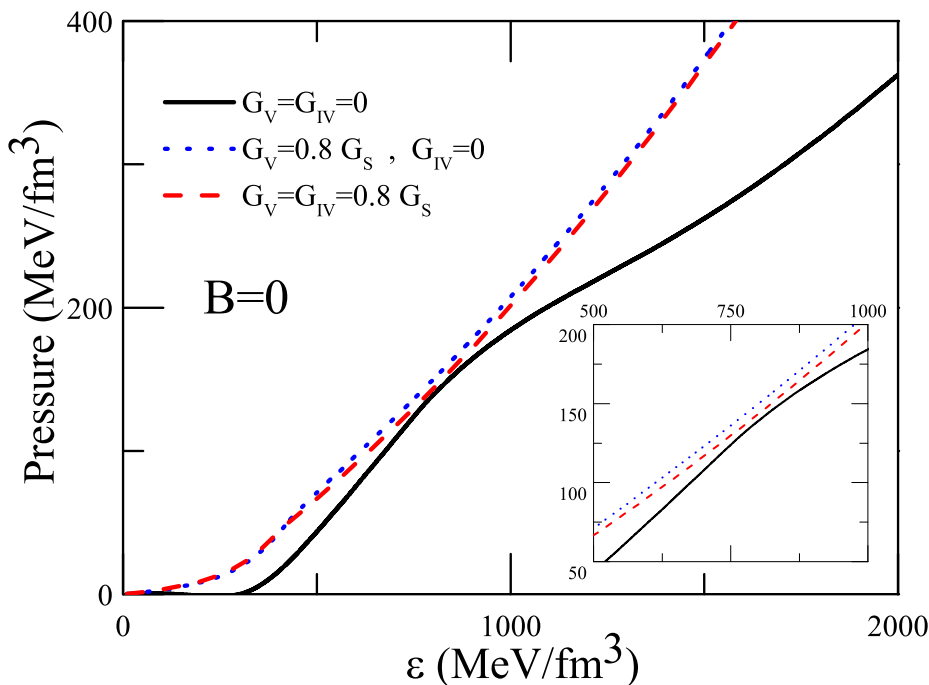


图 5-1: 不同参数下奇异夸克物质的压强随着能量密度的变化, 磁场为零^[37]。

Figure 5-1: The pressure of SQM as a function of energy density under zero magnetic field with three cases: $G_V = G_{IV} = 0$, $G_V = 0.8G_S, G_{IV} = 0$ and $G_V = G_{IV} = 0.8G_S$ ^[37].

图里面我们都能看出, 加入了磁场之后的真空夸克质量会增加。在图5-2中, 磁场强度 $B = 2 \times 10^{19}G$ 并不会很大程度影响组分夸克质量。在图5-3里面, 我们计算了奇异夸克物质uds夸克真空组分夸克质量随着磁场强度变化的图线。可以看出在磁场强度小于 $10^{19}G$ 的时候, 所有的夸克的真空质量并不怎么改变; 一旦磁场强度大于 $3 \times 10^{19}G$ 的时候, u, d 真空夸克质量会显著地提升, 产生了磁催化现象。可以看出来s夸克的真空组分夸克质量增加的速度要小于u夸克的情况。图5-4里展示了奇异夸克物质里 $G_V = 0$ 和 $G_V = 0.8G_S$ 情况下uds夸克的化学势随着磁场的变化, 重子数密度固定在 $10\rho_0$ 。可以看出每一味夸克的化学势在加入了矢量相互作用的情况下都要比 $G_V = 0$ 的情况来得高, 这也暗示了排斥的矢量相互作用有可能给出更硬的夸克物质的物态方程。我们还能看出来, 对于每一味的夸克的化学势的取值随着磁场的升高而降低。

5.3.2 物态方程、声速和夸克星的讨论

现在我们开始准备研究奇异夸克物质磁星的性质。众所周知, 致密星体内部的磁场强度可能比星体表面的磁场强度要大很多, 所以人们一般利用粒子数密度相关

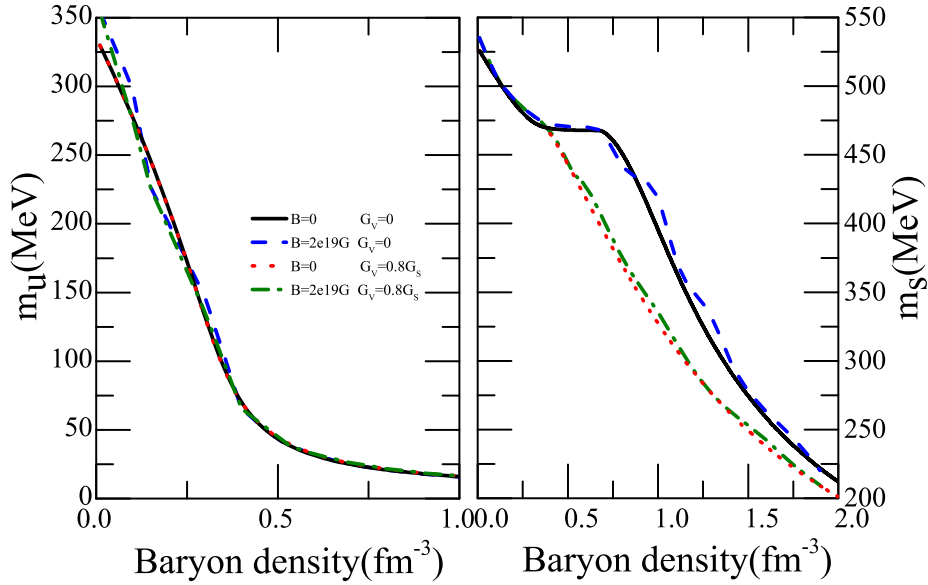


图 5-2: 在左边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19} \text{G}$ 同时 $G_V = 0, G_V = 0.8G_s$ 的奇异夸克物质下 u 夸克的组分夸克质量随着重子数密度的变化; 边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19} \text{G}$ 同时 $G_V = 0, G_V = 0.8G_s$ 情况下 s 夸克的组分夸克质量随着重子数的变化 [37]。
Figure 5-2: Left figure: Constituent mass for u quark VS. u quark chemical potential in SQM for $B = 0$ and 2×10^{19} with $G_V = 0$ and $0.8 G_s$, respectively. Right figure: Constituent mass for s quark VS. s quark chemical potential in SQM for $B = 0$ and 2×10^{19} with $G_V = 0$ and $0.8 G_s$, respectively [37].

磁场来模拟这个现象。我们利用了第四章里面的磁场的参数化形式:

$$B = B_{surf} + B_0[1 - \exp(-\beta_0(n_b/n_0)^\gamma)], \quad (5.45)$$

这里 B_{surf} 是致密星体表面的磁场, 取值为 $B_{surf} = 10^{15} \text{G}$, $n_0 = 0.16 \text{fm}^{-3}$ 是正常核物质的饱和密度, B_0 是常数磁场, β_0 和 γ 是控制磁场的重子数相关性质的参数。为了能够产生低密度时比较低、高密度时比较高的磁场, 我们令 $B_0 = 4 \times 10^{18} \text{G}$, $\beta = 0.003$, $\gamma = 3$, 并且这个磁场在我们之前的工作里面已经确定是一个比较温和的磁场, 其引起的压强各向异性以及夸克星的最大质量劈裂都不大 [38]。

方程 5.41 和 5.42 里的奇异夸克物质的压强我们进行了计算, 选取的参数为 $B_0 = 0, B_0 = 4 \times 10^{18} \text{G}$, $a_0 = -0.01, 0, 0.01$, $G_V = 0, G_V = 0.4G_s, G_V = 0.8G_s, G_V = 1.1G_s$ 。我们在图 5-5 和图 5-6 分别计算了横向压强和纵向压强的情况

我们可以从图 5-5 看出: 1) 固定 G_V 和 a_0 , $B_0 = 4 \times 10^{18} \text{G}$ 的横向压强的值要大于 $B_0 = 0$ 的情况; 2) 固定 G_V , 取 $a_0 = 0.01$, $B_0 = 4 \times 10^{18} \text{G}$ 的情况下能给出

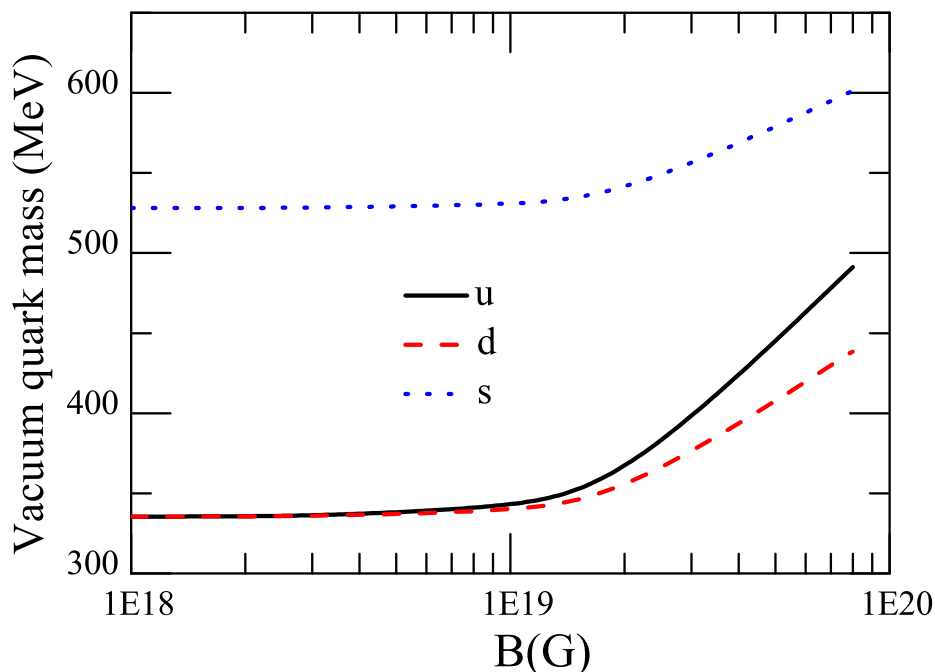


图 5-3: 奇异夸克物质uds夸克真空组分夸克质量随着磁场强度变化 [37]

Figure 5-3: Vacuum constituent masses for u, d and s quarks as functions of the magnetic field in SQM [37].

最硬的夸克物质的物态方程，而 $a_0 = -0.01$ 、 $B_0 = 0$ 的情况总是给出最软的物态方程；3) 对于 $a_0 = -0.01$ 的情况，磁场为 $B_0 = 0$ 和 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 都不敏感于 G_V ，然而对于 $a_0 = 0.01$ 的情况，磁场取 $B_0 = 0$ 和 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 都非常敏感于 G_V ；4) 当 $G_V = 0$ 的时候，物态方程内磁场的贡献就很重要，当 G_V 增加的时候，磁化胶子对物态方程的影响就越来越重要了。

图5-6给出的是相应的纵向压强的情况。从图中我们可以得到和图5-5类似的情况，这是因为压强的各向异性并不大：1) 固定 G_V 和 a_0 ， $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 的横向压强的值要大于 $B_0 = 0$ 的情况；2) 固定 G_V ，取 $a_0 = 0.01$ ，磁场为 $B_0 = 0$ 的压强可以给出最硬的物态方程， $a_0 = -0.01$ ，磁场为 $B_0 = 0$ 的情况可以给出最软的物态方程；3) 磁场为 $B_0 = 0$ 和 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 都不敏感于 G_V ，然而对于 $a_0 = 0.01$ 的情况，磁场取 $B_0 = 0$ 和 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 都非常敏感于 G_V 。对比图5-6，我们能发现纵向压强和横向压强的各向异性在 $G_V = 0.8G_S$ ， $G_V = 1.1G_S$ 且 $a_0 = 0.01$ 的时候非常小，对于 G_V 比较小且 $a_0 = -0.01$ 的情况，各向异性会增加。我们发现磁化胶子对物态方程的影响要大于磁场的影响，而且通过加入磁化胶子，我们可能给出压强各向异性不大的情况的两倍太阳质量的磁星(比如 $G_V = 0.8G_S$ ， $G_V = 1.1G_S$ ， $a_0 = 0.01$ 的

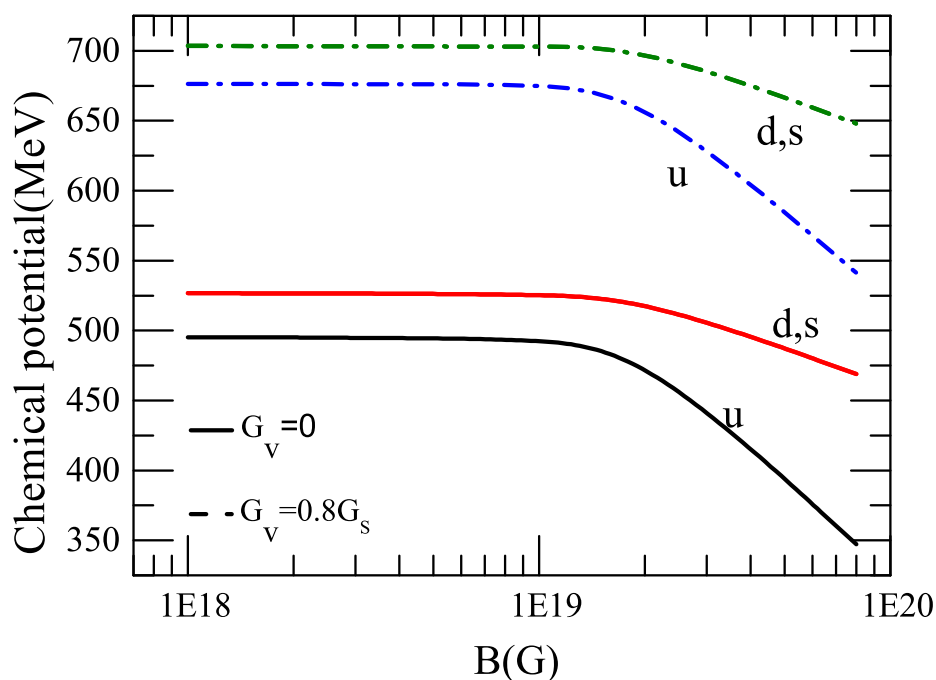


图 5-4: 奇异夸克物质里 $G_V = 0$ 和 $G_V = 0.8G_S$ 情况下 uds 夸克的化学势随着磁场的变化, 重子数密度固定在 $10\rho_0$ [37]。

Figure 5-4: Chemical potentials for u, d, s quarks as functions of magnetic field with $G_V = 0$ and $G_V = 0.8G_S$ at baryon density $n_b = 10n_0$ in SQM [37].

情况)。

最近的工作 [39] 表明, 如果混合星的最大质量要达到两倍的太阳质量, 夸克物质的声速的平方会非常大, 他们的结果显示要高于 $1/3$ 。然而对于一般的强相互作用模型, 声速的平方大部分都小于 $1/3$ 。因此我们利用现有的模型在图5-7和图5-8检验了一下奇异夸克物质的声速情况:

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon} \quad (5.46)$$

图5-7的是NJL模型下横向压强情况声速的平方随着能量密度的变化, 我们发现不考虑矢量相互作用的情况下, 令 $B_0 = 0$, 所得到的声速都小于 $1/3$, 这个和前人的计算自洽。然而当磁场等于 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 的时候, 即使 $G_V = 0$, 横向压强声速的平方最多可以达到 0.6 。在 $B_0 = 0$ 的情况, 如果加入了矢量相互作用, 横向压强声速的平方也可以超过 $1/3$ 。

另外一个增加声速的因素就是磁化胶子的贡献。如果磁化胶子对压强的贡献为正, 并且同时考虑矢量相互作用, 横向压强的声速在 $G_V = 1.1G_S$, $B_0 = 4 \times 10^{18}G$,

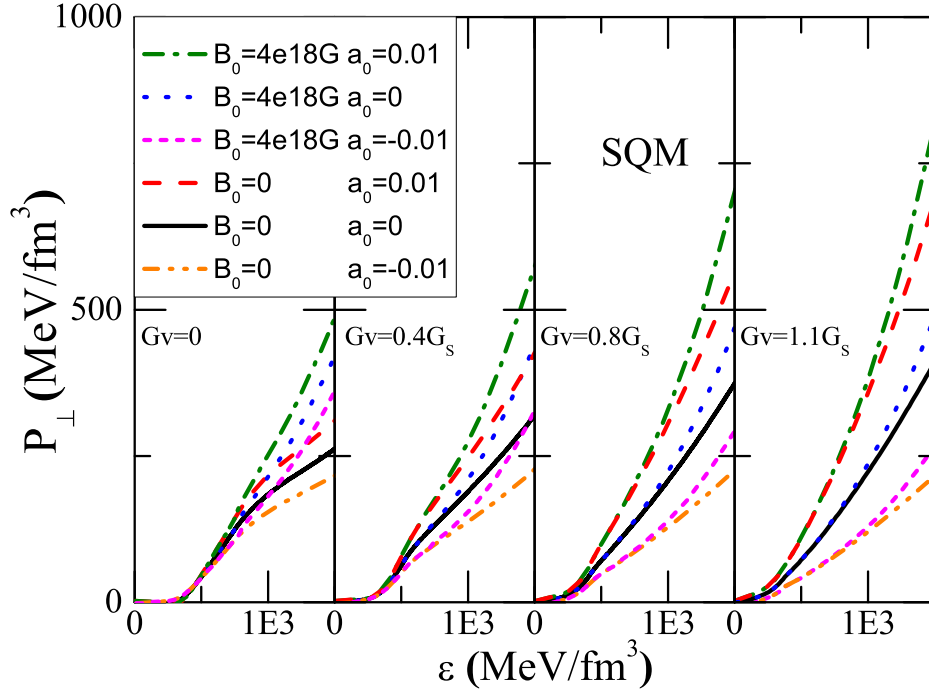


图 5-5: 不同参数下横向压强随着能量密度的变化 [37]

Figure 5-5: Transverse pressure as a function of energy density for SQM in cases of $B_0 = 0$ and $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ with $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ and $G_V = 0, G_V = 0.4G_S, G_V = 0.8G_S$ and $G_V = 1.1G_S$, respectively [37].

$a_0 = 0.01$ 的情况下可以超过1，也就是发生超光速的情况，这是非物理的，所以我们要求物态方程计算出来的 $c_s^2 < 1$ 。

对于纵向压强声速平方的情况可以从图5-8给出，我们能够发现 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 情况下，不同的 G_v 和 a_0 所给出的声速的平方都要比相应的横向压强的情况要来的小，这实际上与图5-5和图5-6自洽，并且我们能发现纵向压强的情况所给出的声速的平方都小于1。

既然我们已经计算了奇异夸克物质在 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$, $\beta_0 = 0.003$, $\gamma = 3$ 考虑了磁化胶子的贡献之后的压强的各向异性很小，我们可以近似地使用纵向或者横向压强的情况来构建密度相关磁场下的夸克星。首先我们介绍利用各向同性压强计算夸克星的TOV方程 [40]：

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r), \quad (5.47)$$

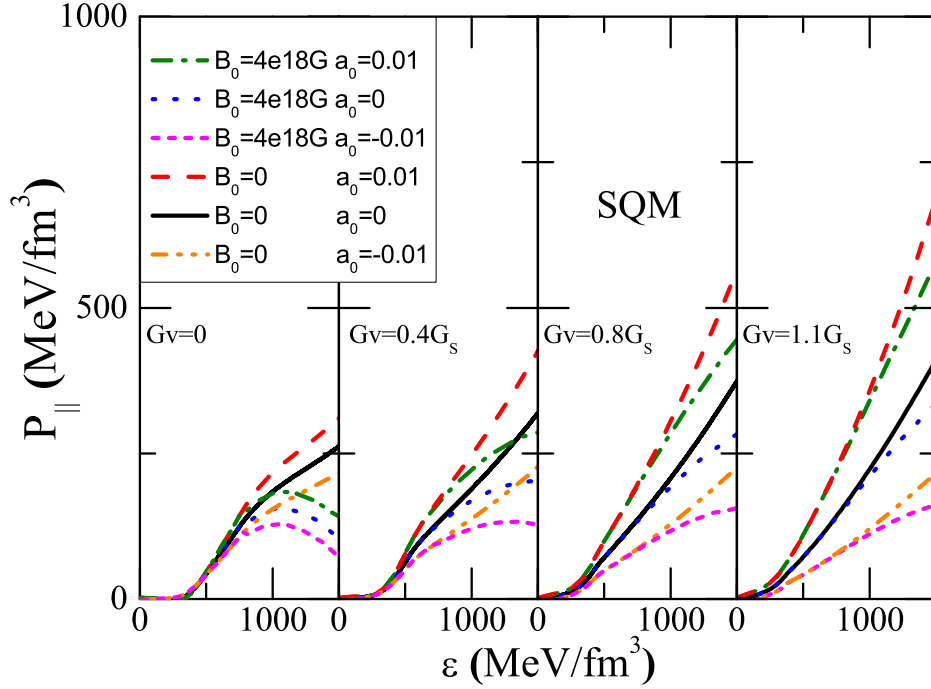


图 5-6: 在不同参数下纵向压强随着能量密度的变化 [37]

Figure 5-6: Longitudinal pressure as a function of energy density SQM in cases of $B_0 = 0$ and $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ with $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ and $G_V = 0, G_V = 0.4G_S, G_V = 0.8G_S$ and $G_V = 1.1G_S$, respectively [37].

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi p(r)r^3}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (5.48)$$

在图5-9里我们使用了横向和纵向压强来计算磁星的质量半径关系，对于横向压强的情况，我们令 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$, $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ 并且 $G_V = 0, G_V = 0.4G_S, G_V = 0.8G_S, G_V = 1.1G_S$ ；对于纵向压强，我们令 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$, $a_0 = 0.01$ 并且 $G_V = 0.8G_S, G_V = 1.1G_S$ 。从图5-9可以看出：1) 在 $B_0 = 0$ 和 $G_V = 0$ 时，三味NJL模型给出的夸克星的最大质量只有 $1.4M_\odot$ ；2) 在 $B_0 = 0$ 时增大 G_V ，在 $G_V = 1.1G_S$ 时给出的夸克星的最大质量为 $1.75M_\odot$ ；3) 在 $G_V = 0$ 时，考虑密度相关磁场效应，横向压强所能给出的夸克磁星的最大质量为 $1.65M_\odot$ ，如果加上了磁化胶子的正向贡献，也就是 $a_0 = 0.01$ 时，最大质量可以达到 $1.8M_\odot$ ；4) 对于 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$, $G_V = 0.8G_S$, $a_0 = 0.01$ 的情况，横向压强的声速的平方可以达到 0.9 ，此时磁星的最大质量为 $2.17M_\odot$ ，相应的纵向压强所给出的最大质量为 $2.01M_\odot$ ，和最近发现的最大

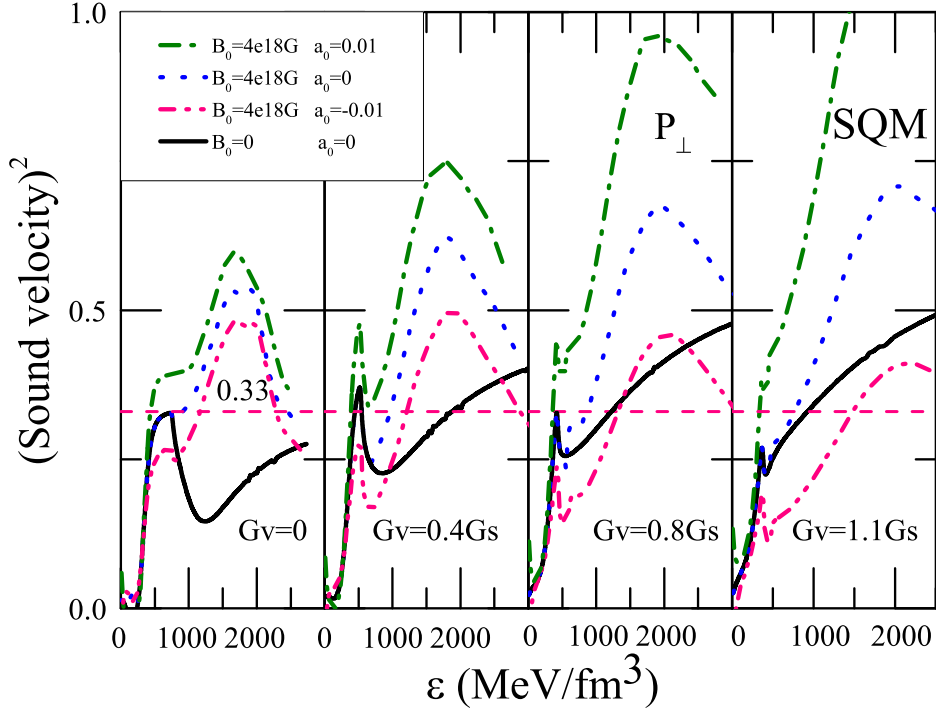


图 5-7: 在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化^[37]

Figure 5-7: The sound velocity square for transverse pressure as a function of energy density for SQM in cases of $B_0 = 0$ and $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ with $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ and $G_V = 0, G_V = 0.8G_S$ and $G_V = 1.1G_S$ ^[37]

质量的脉冲星的结果 J0348+0432 $(2.01 \pm 0.04)M_\odot$ 相一致。此时我们引入夸克星的质量非对称度概念:

$$\delta_m = \frac{M_\perp - M_\parallel}{(M_\perp + M_\parallel)/2}, \quad (5.49)$$

这里 M_\perp (M_\parallel) 代表了横向 (纵向) 压强方向的情况。我们计算得到, 在 $G_V = 0.8G_S$, $a_0 = 0.01$ 磁场为 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 的时候, 质量非对称度仅仅为 $\delta_m = 7.65\%$, 这也说明了此时所对应的压强非对称度也很小, 这也就是我们为什么可以用各向同性的 TOV 方程的原因。我们还发现, 对于 $G_V = 1.1G_S$, $a_0 = 0.01$ 磁场为 $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ 的情况, 横向压强给出的夸克星的最大质量为 $2.30M_\odot$, 纵向压强给出的最大质量为 $2.20M_\odot$, 对应的质量非对称度为 $\delta_m = 4.44\%$, 此时的非对称度比 $G_V = 0.8G_S$ 的情况还小。因此我们的结论说明我们能够通过加入矢量道、磁场、磁化胶子贡献来使得物态方程变硬。因为密度相关磁场下的压强各向异性比较小, 所以我们可以近似使用 TOV 方程来计算磁星, 并且我们发现磁星的质量劈裂也非常小。

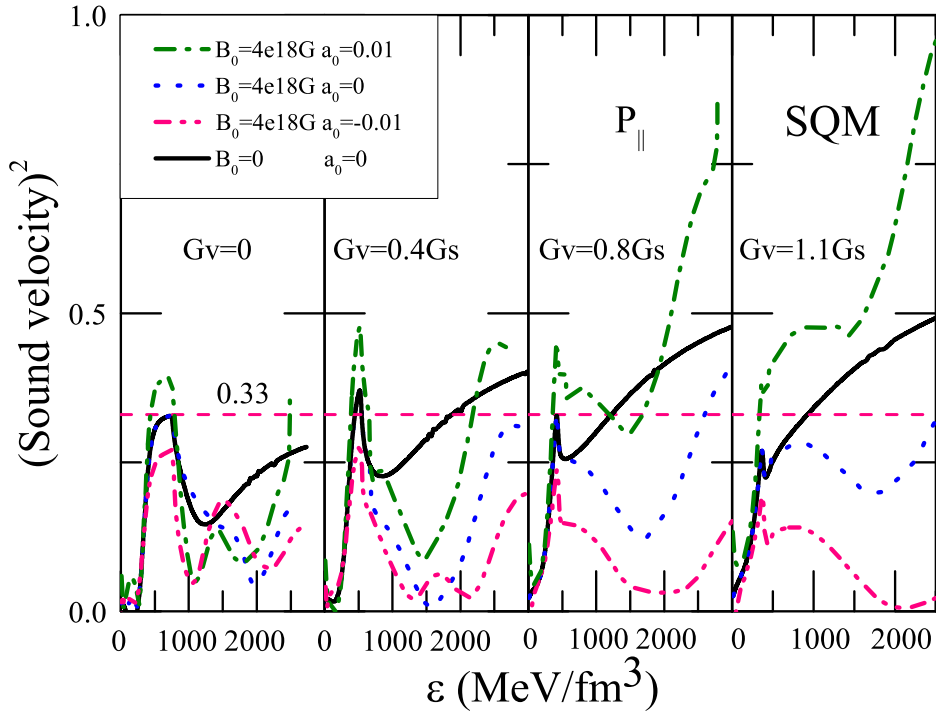


图 5-8: NJL模型下横向压强情况声速的平方随着能量密度的变化 [37]

Figure 5-8: The sound velocity square for longitudinal pressure as a function of energy density for SQM in cases of $B_0 = 0$ and $B_0 = 4 \times 10^{18} G$ with $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ and $G_V = 0, G_V = 0.8G_S$ and $G_V = 1.1G_S$ [37]

在图5-10中，我们给出了 a_0 和 G_V 的函数关系图，我们想讨论在密度相关磁场下 $B_0 = 4 \times 10^{18} G$ ，横向压强和纵向压强所能给出两倍太阳质量时对应的 a_0 和 G_V 的范围。从图中我们可以看出，纵向压强的图线比横向压强的图线要高，而且 G_V 增大的时候，两条线的距离会逐渐减小，这反映了矢量道的效应。

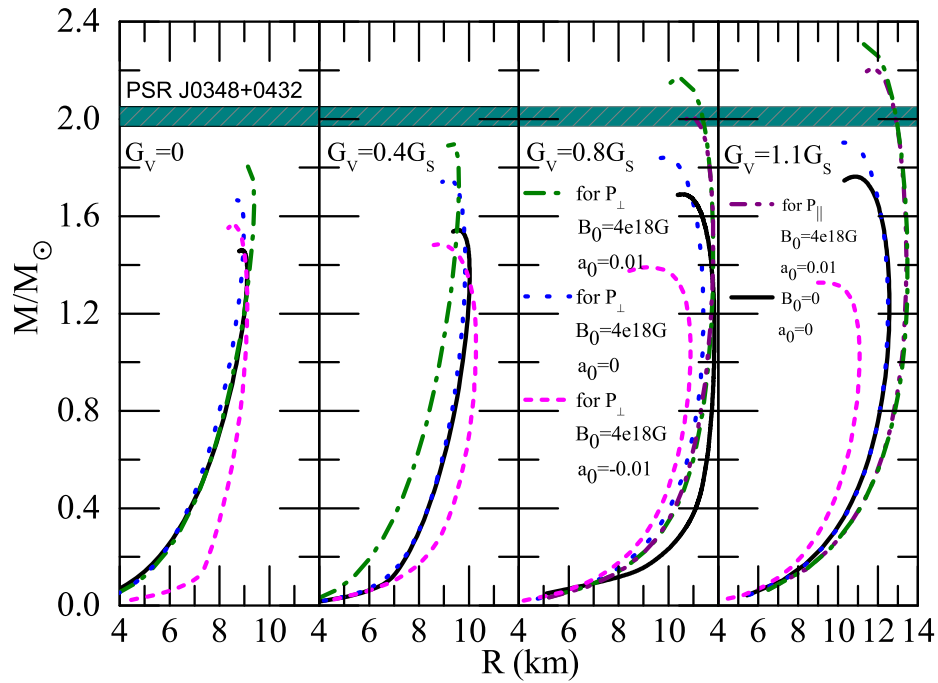


图 5-9: 在不同参数下使用横向和纵向压强来计算磁星的质量半径关系^[37]

Figure 5-9: Maximum mass - radius relation for quark star for transverse and longitudinal pressure cases within $B_0 = 0$ and $B_0 = 4 \times 10^{18}G$ with $a_0 = 0, 0.01, -0.01$ and $G_V = 0, G_V = 0.4G_S, G_V = 0.8G_S$ and $G_V = 1.1G_S$, respectively^[37].

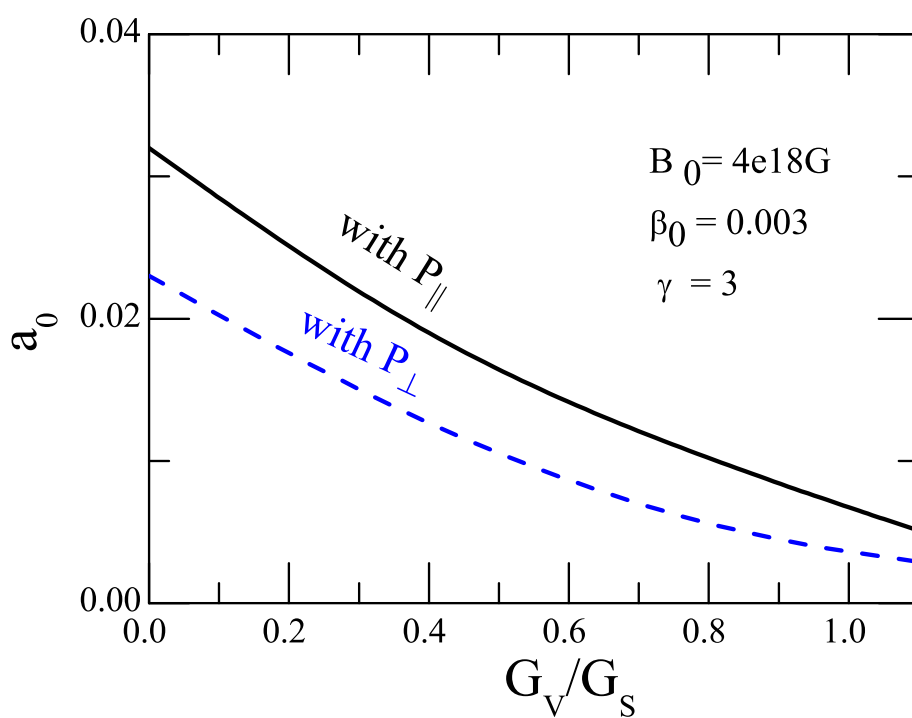


图 5-10: 在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化^[37]
Figure 5-10: a_0 as a function of G_V for longitudinal pressure and transverse pressure within $B_0 = 4 \times 10^{18}G$. The parameter sets including a_0 and G_V on this two lines can describe 2 solar mass QSs^[37].



5.4 本章小结

在这一章的工作里，我们利用加入排斥的矢量相互作用的SU(3)NJL模型来计算强磁场下夸克物质的性质以及夸克星。我们研究了矢量-同位旋标量和矢量-同位旋矢量在夸克物质的物态方程里的影响，并且发现矢量-同位旋矢量相互作用对奇异夸克物质的物态方程影响甚微，而排斥的矢量-同位旋矢量相互作用会给出一个变硬的奇异夸克物质的物态方程。

考虑到磁场的加入，系统的压强会在垂直于磁场以及平行于磁场的方向上出现各项异性的情况。胶子也会因为夸克圈的磁化而变成磁化胶子，我们于是考虑了磁化胶子对奇异夸克物质压强的贡献情况。一般来说NJL模型仅仅考虑夸克部分对压强的贡献，而我们的工作的目的就是考虑了磁化胶子对压强的贡献以后，奇异夸克物质物态方程的变化情况。我们发现，磁化的夸克和胶子会给出比较硬的物态方程。

声速的平方式热密物质的一个基本属性。NJL模型在不考虑矢量相互作用和磁场的时候，声速的平方小于1/3。如果我们考虑了矢量相互作用时，声速的平方可以超过1/3，并且在强磁场的情况下，声速的平方也会有很大程度的改变。考虑了磁化胶子的贡献以及磁场和矢量相互作用之后，横向压强情况下的奇异夸克物质的声速的平方可以超过1，这是非物理的情况。

经过计算我们得知，这一章选取的密度相关磁场所引起的压强各向异性很小，我们可以近似的用TOV方程来处理密度相关磁场下的夸克星的性质。我们发现夸克星在密度相关磁场下的质量非对称度也很小，并且夸克星的最大质量可以由磁场、矢量相互作用以及磁化胶子的贡献来提高。我们在密度相关磁场下对能达到两倍太阳质量的 a_0 和 G_V 这两个参数也进行了讨论。

参考文献

- [1] Lattimer J.M. & Prakash M., “The physics of neutron stars”, *Science*, 2004, **304**(536).
- [2] Steiner A.W. et al, “Isospin asymmetry in nuclei and neutron stars”, *Phys. Rep.*, 2005, **410**(5), 325.
- [3] Witten E., “Cosmic separation of phases”, *PRD*, 1984, **30**(2), 272.



- [4] Farhi E. & Jaffe R.L., “Strange matter”, PRD, 1984, **30**(3-5), 2379.
- [5] Bombaci I. et al, “Quark deconfinement and implications for the radius and the limiting mass of compact stars”, APJ, 2004, **614**(314).
- [6] Staff J. et al, “A three stage model for the inner engine of gamma ray burst: Prompt emission and early afterglow”, APJ, 2007, **667**(340).
- [7] Herzog M. & Ropke F.K., “Three-dimensional hydrodynamic simulations of the combustion of a neutron star into a quark star”, PRD, 2011, **84**(083002).
- [8] Chodos A. et al, “New extended model of hadrons”, PRD, 1974, **9**, 3471.
- [9] Collins J.C. & Perry M.J., “Superdense matter, neutrons and asymptotically free quarks”, PRL, 1975, **34**, 1353.
- [10] Baym G. & Chin S.A., “Can a neutron star be a giant mit bag”, PLB, 1976, **62**, 241.
- [11] Freedman B.A. et al., “Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. iii. the ground-state energy of a relativistic quark gas”, PRD, 1978, **17**, 1109.
- [12] Drago A. & Hjorth-Jensen M., “Massive quarks in neutron stars”, PLB, 1996, **380**, 13.
- [13] Glendenning N.K., “First order phase transitions with more than one conserved charge, consequences for neutron stars”, PRD, 1992, **46**, 1274.
- [14] Prakash M. & Lattimer J.M., “Quark-hadron phase transition in protoneutron stars”, PRD, 1995, **52**, 661.
- [15] Muller H. & Serot B.D., “Relativistic mean-field theory and the high-density nuclear equation of state”, NPA, 1996, **606**, 508.
- [16] Woltjer C., “X rays and type i supernova remnants”, APJ, 1964, **140**, 1309.
- [17] Mihaeet T.A., “New extended model of quarks”, Nature, 1990, **346**, 250.



-
- [18] Mihara T.A., “Magnetic fields of degenerate stars”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 1992, **30**, 143.
- [19] Thompson C. & Duncan R.C., “The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars”, *APJ*, 1996, **473**, 322.
- [20] Ibrahim A.I. et al., “Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater sgr 180620”, *APJL*, 2002, **574**, 51.
- [21] Duncan R.C., “Strongly magnetized neutron star matter in the extended zimanyi moszkowski model”, arXiv:astro-ph/0002442, 2000.
- [22] Lai D. Shapiro .S.L., “Cold equation of state in a strong magnetic field effects of inverse beta decay”, *APJ*, 1991, **383**(9), 745.
- [23] Bandyopadhyay D. et al, “Dense nuclear matter in a strong magnetic field”, *JPG*, 1998, **24**(4), 1647.
- [24] Menezes D.P. et al, “Quark matter under strong magnetic fields in the nambu jona lasinio model”, *PRC*, 2009, **79**(3-4), 035807.
- [25] Nasseripour R. et al, “Search for medium modifications of the meson”, *PRL*, 2007, **99**, 262302.
- [26] Naruki M. et al., “Experimental signature of medium modifications for mesons in the 12 gev reactions”, *PRL*, 2006, **96**, 092301.
- [27] Antoniadis J. et al, “A massive pulsar in a compact relativistic binary”, *Science*, 2013, **340**(3-4), 6131.
- [28] Fukushima K., “Critical surface in hot and dense quantum chromo dynamics with the vector interaction”, *PRD*, 2008, **78**(114019).
- [29] Fukushima K., “Phase diagrams in the three-flavor nambu jona lasinio model with the polyakov loop”, *PRD*, 2008, **78**(039902).
- [30] Fukushima K., “Chiral effective model with the polyakov loop”, *PLB*, 2004, **591**, 277.



- [31] Ratti C. et al., “Phases of quantum chromo dynamics lattice thermodynamics and a field theoretical model”, PRD, 2006, **73**(014109), 745.
- [32] Dexheimer V. A. & Schramm S., “Chiral symmetry restoration and deconfinement to quark matter in neutron stars”, Nucl. Phys. Proc. Suppl., 2010, **199**(319), 745.
- [33] Menezes D. P. et al., “Quark matter under strong magnetic fields in the nambu-jona-lasinio model”, PRC, 2009, **79**, 035807.
- [34] Haque N. et al., “Three loop htlpt thermodynamics at finite temperature and chemical potential”, JHEP, 2014, **1405**, 027.
- [35] Miransky V. A. & Shovkovy I. A., “Magnetic catalysis and anisotropic confinement in quantum chromo dynamics”, PRD, 2002, **66**(045006), 745.
- [36] Hugenholtz N.M. & L.V.H., “A theorem on the single particle energy in a fermi gas with interaction”, Physica, 1958, **24**(4), 363.
- [37] Chu P.C. et al., “Quark magnetar in three-flavor njl model with vector interaction and magnetized gluon potential”, arXiv:1409. 6154, 2014.
- [38] Chu P.C. & Chen L.W., “Quark matter symmetry energy and quark star”, APJ, 2014, **780**(4), 135.
- [39] Alford M. G. et al, “Generic conditions for stable hybrid stars”, PRD, 2013, **88**(8), 083013.
- [40] Oppenheimer J.R. Volkoff .G.M., “On massive neutron cores”, Phys. Rev, 1939, **33**(3-4), 374.

第六章 结论与展望

6.1 结论

本论文基于夸克物质的唯象模型对夸克物质的对称能、奇异夸克物质的性质、强磁场下夸克物质的性质以及夸克星和磁星的性质进行了讨论。我们的研究主要有以下结论：

1. 对于质量密度相关模型我们进行了拓展，把禁闭的质量密度相关模型（CDDM）扩展到同位旋质量密度相关模型(CIDDM)。我们发现，如果我们考虑了夸克物质的有效质量的同位旋相关性，夸克物质的对称能，奇异夸克物质的性质和夸克星的性质会有非常大程度的改变。最近的PSR J1614-2230的实验研究不能通过CDDM模型来描述实验上给出的 $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ 的夸克星，但通过CIDDM 模型可以给出符合实验数据的夸克星。如果质量密度相关模型的标度参数 z 固定在 $z=1/3$ 的（考虑了手征凝聚一阶展开和线性禁闭），在描述PSR J1614-2230的夸克星时夸克物质的有效质量会有非常大的同位旋依赖，这个会使得两味u-d夸克物质的对称能非常大。通过改变夸克物质有效质量的标度参数 z ，我们可以在较小的对称能下给出PSR J1614-2230所对应的两倍太阳质量夸克星。
2. 我们扩展了禁闭夸克模型，在组分夸克质量里考虑了同位旋相关性。基于新的IDCQM模型，我们研究了夸克物质的对称能，奇异夸克物质的稳定区域，夸克星的质量半径关系。我们发现如果加入了同位旋效应，组分夸克质量会出现ud夸克组分夸克质量劈裂，其次如果我们考虑令s夸克的组分夸克质量的粒子数密度相关性不同于ud夸克，那么s夸克的组分夸克质量会有很大的改变。我们发现夸克物质的对称能和物态方程会随着同位旋效应的增加而变化。u夸克的组分夸克质量会在同位旋非对称度和DI很大的时候提前减小至流夸克质量，这说明我们会在丰d夸克物质里面观测到在低粒子数密度情况下u夸克的手征恢复。最后我们发现即使CQM 模型无法描述 PSR J1614.2230 和PSR J0348+0432 这两个星体为夸克星，但是通过加入同位旋效应或者改变s 夸克的粒子数密度相关性或者两者都考虑都会给出两倍太阳质量的夸克星。



3. 我们使用同位旋密度相关夸克质量模型研究了强磁场下奇异夸克物质和夸克星的性质。我们自洽地计算了常数磁场下的奇异夸克物质的物态方程并且发现系统的压强会在强磁场下按照垂直于磁场和平行于磁场两个方向各向异性，前者要比后者通常意义下来得大。系统的压强在磁场强度非常大的时候可能会出现非常明显的各向异性，因此磁化的夸克星的性质可能和星体内的磁场方向有关。通过使用密度相关磁场的情况来模拟星体内部磁场的分布，我们研究了静止球对称夸克星的性质，采用了两种星体内磁场方向的假设：局域磁场沿着半径方向的径向方向以及局域磁场在垂直于径向方向的平面随机分布的横向方向。基于这两种极端的磁场方向情况，我们发现静止的磁化的夸克星的最大质量可能很大程度上依赖于星体内的磁场方向，并且径向（横向）磁场方向可以很大程度上减小（增大）夸克星的最大质量。静止的磁化的夸克星的最大质量通过研究也发现依赖于密度相关磁场的具体分布。由上，我们现在的结果指出，强磁场下的夸克星的性质不仅和磁场强度分布有关，还要考虑磁场方向的分布情况，而且加入磁场后致密星体的质量增大还是减小也依赖于星体内的磁场方向。
4. 我们利用加入排斥的矢量相互作用的SU(3)NJL模型来计算强磁场下夸克物质的性质以及夸克星。我们研究了矢量-同位旋标量和矢量-同位旋矢量在夸克物质的物态方程里的影响，并且发现矢量-同位旋矢量相互作用对奇异夸克物质的物态方程影响甚微，而排斥的矢量-同位旋矢量相互作用会给出一个变硬的奇异夸克物质的物态方程。考虑到磁场的加入，系统的压强会在垂直于磁场以及平行于磁场的方向上出现各项异性的情况。胶子也会因为夸克圈的磁化而变成磁化胶子，我们于是考虑了磁化胶子对奇异夸克物质压强的贡献情况。一般来说NJL模型仅仅考虑夸克部分对压强的贡献，而我们的工作的目的就是考虑了磁化胶子对压强的贡献以后，奇异夸克物质物态方程的变化情况。我们发现，磁化的夸克和胶子会给出比较硬的物态方程。声速的平方是热密物质的一个基本属性。NJL模型在不考虑矢量相互作用和磁场的时候，声速的平方小于1/3。如果我们考虑了矢量相互作用时，声速的平方可以超过1/3，并且在强磁场的情况下，声速的平方也会有很大程度的改变。考虑了磁化胶子的贡献以及磁场和矢量相互作用之后，横向压强情况下的奇异夸克物质的声速的平方可以超过1，这是非物理的情况。



6.2 展望

在本论文我们对零温夸克物质进行了讨论和分析，并取得了一些结论。对于有限温度的夸克物质的性质分析以及关于磁化胶子描述的PNJL模型的讨论我们并没有着重笔墨。文章里所讨论的仅仅是QCD相图内的夸克相的问题，如果我们考虑核子-夸克一阶相变，那么关于混合星的讨论以及强子化的问题都可以进行求解。我们的展望分为以下几个部分：

1. 对于磁场下NJL模型的研究，我们可以通过引入化学势和磁场相关的Polyakov-loop势能来更好地描述夸克物质。所用的有效势能为 $\mathcal{U}(\phi[A], \bar{\phi}[A]; T)$ 这里面包括了Polyakov-loop的迹 $\phi = (\text{Tr}_c L)/N_c$ 和其复共轭 $\bar{\phi}$ 。Polyakov圈 L 可以在色空间里定义为：

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right] \quad (6.1)$$

这里 $\beta = 1/T$, $A_4 = iA_0 = ig\mathcal{A}_0^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}$.

其中的有效势能我们是从标准的PNJL模型修改出来的，可以描述化学势和磁场相关的PNJL模型。

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\phi; T, \mu, B) &= (a_0 T^2 eB + b_0 \mu^2 eB) \phi^2 \\ &+ (aT^4 + b\mu^2 T^2 + c\mu^4) \phi^2 \\ &+ a_2 T_0^4 \ln(1 - 6\phi^2 + 8\phi^3 - 3\phi^4), \end{aligned} \quad (6.2)$$

这里有 $a = -1.85$, $b = -0.08$, $c = -1.44 \times 10^{-3}$ and $a_2 = -0.4$ ，这是通过拟合Lattice QCD的结果定下的参数。

基于此类化学势磁场相关的PNJL模型，我们可以计算强磁场下以及有限化学势下的夸克物质的相图或者奇异夸克物质的性质，这是我们将来工作的一个课题。

2. 致密星体主要分为三类：中子星、夸克星以及混合星。所谓的混合星外壳为核子构成，内壳为夸克，二者形成核子-夸克一阶相变。基于这个相变机制，我们可以通过给出不同的核子和夸克物质的模型来构成一阶相变，随着重子数密度的增加依次出现核子相、核子夸克混合相以及夸克相。计算混合星时，如果核子相与核子夸克混合相的相变点发生在核子相所能给出中子星所能达到的最大质量的中心密度之前，那么就会出现混合星的情况，反之则给出此致密星体



不含有夸克相。如果核子夸克混合相与夸克相的相变点发生在核子相所能给出的中子星最大质量对应的中心密度之前，那么混合星内会含有退禁闭的只有夸克物质构成的夸克内核，反之则没有夸克内核。今后我们的工作可以在此相变理论上加入磁场以及有限温度的情况来处理磁星抑或原生致密星体的性质，同时也可以给出相图里面关于核子夸克相变的信息。这是我们今后的一个重要的课题。

附录 A 零温NJL模型的推导讨论

A.0.1 强磁场下SU(2)对称性NJL模型的推导

首先，为了给出强磁场下的夸克物质的性质，首先我们考虑处于 β -稳定条件的两味夸克物质，可以定义拉氏密度为：

$$\mathcal{L}_{\beta f} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_l - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (\text{A}\cdot 1)$$

用NJL model来给出夸克部分加了磁场的拉氏量：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - q_f A^\mu) - m_c]\psi + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2] \quad (\text{A}\cdot 2)$$

现在只研究夸克物质部分，不考虑轻子和磁场的效应（磁场在后来的动量空间的积分里面可以加入，拉氏密度里面先不做有关磁场的变换，之后的朗道量子化可以给出考虑磁场效应的拉氏密度的变化），可以得到 $B=0$ 的情形：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - m_c)\psi + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2] \quad (\text{A}\cdot 3)$$

利用平均场近似 $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2 \approx -\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle^2 + 2(\bar{\psi}\Gamma\psi)\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ （其中 Γ 是任意矩阵，于是可以得到平均场近似下的拉氏量）：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f(i\partial)\psi_f - \bar{\psi}_f(\sigma' + i\gamma_5 \vec{\tau}\vec{\pi})\psi_f - \frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \quad (\text{A}\cdot 4)$$

其中 $\sigma' = \sigma + m_c$ ， m_c 是流夸克质量， $\sigma = -\frac{\lambda}{N_c}\bar{\psi}_f\psi_f = -2G(\bar{\psi}_f\psi_f)$ ，还有 $\vec{\pi} = -2Gi\bar{\psi}_f\gamma_5\vec{\tau}\psi_f$ 。

之后就可以给出有效势能 F_f （朗道自由能量密度），然后如下地进行计算：



$$\begin{aligned}
\int F_f d^4x &= i \ln Z = i \ln \left\{ \int D\bar{\psi} D\psi \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_f) \right\} \\
&= \ln \left\{ \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ i \int d^4x [\bar{\psi}_f (i\cancel{\partial} - \sigma' - i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi}) \psi_f - \frac{N_c}{2\lambda} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)] \right\} \right\} \\
&= i \int \frac{N_c}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) d^4x + i \ln [\det(i\cancel{\partial} - \sigma' - i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi})] \tag{A.5}
\end{aligned}$$

这是实时路径积分，去掉 $\int d^4x$ ，取密度，可以得到：

$$F_f = \frac{N_c(\sigma^2 + \pi^2)}{2\lambda} + i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln [\cancel{p} - (\sigma' + i\gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi})] \tag{A.6}$$

手征极限下， $m_c \approx 0$ ，令 $\chi^2 = \sigma^2 + \pi^2$ ，

可以得到：

$$F_f = \frac{N_c \chi^2}{2\lambda} + \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln [-p^2 + \chi^2] \tag{A.7}$$

考虑到平均场近似，我们令 $\vec{\pi} = 0$ ，并且只考虑到 σ 的方向，此时考虑平均场基态最稳定这个条件，我们有：

$$\frac{d\mathcal{F}_f}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\langle\sigma\rangle} = 0 \tag{A.8}$$

此时，我们可以得到：

$$\langle\sigma\rangle = -\langle\sigma\rangle \frac{\lambda}{N_c} \text{tr} \int i \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + \langle\sigma\rangle^2} \tag{A.9}$$

如果 $\langle\sigma\rangle \neq 0$ ，那么手征对称性就会被破坏。由于 $\langle\sigma\rangle = -2G\langle\bar{\psi}_f\psi_f\rangle$ ，夸克凝聚就不为零，破坏了手征对称性。并且， $\langle\sigma\rangle$ 正好是我们近似下的夸克自能，所以我们可以把它写在有效质量里面去： $M = m_c + \langle\sigma\rangle$ 。之后，我们令 $\Omega_f = \mathcal{F}_f(\langle\sigma\rangle)$ ，并且我们早就可以从热力学里面得知 $\Omega_f = \mathcal{P}_f$ 。所以，我们可以给出夸克物质的压强来：

$$P_f = -\frac{(M - m_c)^2}{4G} - \frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + M^2) \tag{A.10}$$



现在，我们如果继续进行下去的话，就可以计算一般两味u-d夸克物质的NJL模型下的物态方程和所有的性质了，但是，我们在这里想要考虑有磁场的情况，所以我们要在拉氏密度里面加上磁场的情况，并且考虑磁场在夸克物质里面的作用和如何影响热力学量的，于是我们就把磁场放在我们的模型里面去！

现在我们考虑磁场沿着z方向，也就是 $\vec{B} = B\vec{z}$ 。由于 $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = (0, 0, B)$ ，我们可以给出 $A^\mu = (0, -By, 0, 0)$ （尝试解）。

对于带电量为q的一个标量场，我们可以给出它的场方程：

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \rightarrow \partial_\mu + iq \frac{A_\mu}{c}$$

然后我们还可以给出哈密顿量： $\hat{H} = \frac{1}{2m}[(\hat{p}_x - \frac{|e|B}{c}y)^2 + p_y^2 + p_z^2]$ ，从而给出薛定谔方程来：

$$\frac{1}{2m}[(\hat{p}_x - \frac{|e|B}{c}y)^2 + p_y^2 + p_z^2]\phi(x, y, z) = E\phi(x, y, z) \quad (\text{A}\cdot 11)$$

由此，我们继续把标量场 ϕ 进行傅立叶展开： $\phi(x, y, z) = e^{i(p_x x + p_z z)}\chi(y)$ ，这里面如此构造波函数是因为 H, p_x and p_z 是力学量完全集，y方向上动量和H不对易，将之代入后，有：

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} \chi(y) + \frac{p_z^2}{2m} \chi(y) + \frac{1}{2m} \left(\frac{eB}{c}\right)^2 \left(y - \frac{p_x}{eB}\right)^2 \chi(y) = E \chi(y) \quad (\text{A}\cdot 12)$$

所以有

$$\chi''(y) + 2m \left[E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2m} \left(\frac{eB}{c}\right)^2 \left(y - \frac{p_x}{eB}\right)^2 \right] \chi(y) = E \chi(y) \quad (\text{A}\cdot 13)$$

之后就是常规的本征值计算，可以得到本征值为 $E'_n(p_z) = (n + 1/2)\hbar\omega_c$ ， $E_n = E - \frac{p_z^2}{2m}$ ， $\omega_c = \frac{|e|B}{mc}$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ ，

对于玻色子，由方程3.10可以得到 $(-p_0^2 + p_z^2 + p_y^2 + (Bqy + p_x)^2 + m^2)e^{i(p_x x + p_z z)}\phi(y) = 0$

所以，

$$\phi''(y) + 2m \left[\left(\frac{p_0^2 - p_z^2 - m^2}{2m}\right) - \frac{q^2 B^2}{2m} \left(y + \frac{p_x}{qB}\right)^2 \right] \phi(y) = 0 \quad (\text{A}\cdot 14)$$



这个可以和我们之前给出的薛定谔方程给出的结果进行比较，然后可以得到：

$$\frac{p_0^2 - p_z^2 - m^2}{2m} = (n + 1/2)\omega_c; \omega_c = |e|B/m.$$

所以有 $p_0^2 = p_z^2 + m^2 + (2n + 1)|q|B$ ，这个就是磁场下玻色子的色散关系表达式。

对于费米子，首先写出狄拉克场方程来： $(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\phi = 0$ ， $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iq\frac{A_\mu}{c}$ 。

同样的，参照刚才进行的玻色子的分析，我们可以得到费米子此时的波函数满足的运动方程：

$$u''(y) + 2m\left[\left(\frac{p_0^2 - p_z^2 - m^2 + qB\sigma}{2m}\right) - \frac{q^2B^2}{2m}\left(y + \frac{p_x}{qB}\right)^2\right]u(y) = 0 \quad (\text{A.15})$$

然后我们进行求解久期方程，得到本征值，最后可以求得色散关系： $p_0^2 = p_z^2 + m^2 + (2n + 1 - \sigma)|q|B$ ， $\sigma = s = \pm 1$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

如是，我们就已经把拉氏密度里面加入了电磁场的协变微分的情况求解完毕，给出了色散关系，但是实际计算里面，仍然会有一些比较难处理的方法，比如求解物理量例如压强或者热力学势密度的时候会牵扯到四维积分，对于四维积分，一般我们都是采用降维数的方法，一般利用路径积分的一些知识。

要想在磁场中去掉四维积分，或者是降低维数，可以考虑路径积分里面加入Matsubara frequencies,也就是松原函数的方法： $\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ ， $p_0 \rightarrow i\pi T(2n + 1) + \mu$

这里面我们还要注意一些细节：

注意：1. $2n + 1 - \sigma$ 这个数，可以用 $2k$ 代替,且对 k 的求和也是从 0 到正无穷，和 n 一样。

2. z 方向上有磁场 B ， xy 平面能量量子化，最小单位为 $2qB$ 。

3. xy 平面处粒子由洛伦兹力驱动，作圆周运动。

4. 在动量空间里， k_x, k_y 在以 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 为半径的圆周上。这是因为洛伦兹力的缘故，所以在垂直磁场方向的平面量子化

动量空间里，有

$$\frac{S}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y = \frac{S}{(2\pi)^2} \Delta(\pi k)^2 = \frac{S\pi}{(2\pi)^2} \Delta(k_x^2 + k_y^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S\pi \cdot 2qB}{(2\pi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{SqB}{2\pi} \quad (\text{A.16})$$



其中, S 是面积, Δk^2 是动量空间里面的积分面元, 这个等式实际上是一个粒子数守恒的等式, 中间还利用了色散关系和量子化的最小单位。可以这么看:

$$p_0^2 = p_z^2 + m^2 + (2n + 1 - \sigma)|q|B, \quad \sigma = s = \pm 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A}\cdot 17)$$

这是色散关系, 积分面元可以看出来正好等于 $2qB$, 所以这就是个粒子数守恒。

现在, 我就开始降维数, 利用松原函数和刚才引入的朗道量子化, 我们可以得到: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{T|q_f|B}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{2\pi}$, 这个就把四维积分转化为一维积分了, 但是里面多了两个无穷级数求和。

$$\begin{aligned} \text{所以, 我们可以得到 } P_f &= -\frac{(M-m_c)^2}{4G} - \frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + M^2). \\ &= -\frac{(M-m_c)^2}{4G} + \frac{1}{2} \frac{|q|BT}{2\pi} \text{tr} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \ln[(\omega_\nu - i\mu)^2 + E_p^2], \end{aligned}$$

其中, 对于 $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2]$ 的求解, 可以通过路径积分来求解。此时, $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ 。

经过一系列推导, 可以给出

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln[(\omega_\mu - i\mu)^2 + E_p^2] &= \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \ln[\omega_\mu^2 + (E_p - \mu)^2] + \ln[\omega_\mu^2 + (E_p + \mu)^2] \} \\ &= E_p + T \ln(1 + e^{-(E_p + \mu)/T}) + T \ln(1 + e^{-(E_p - \mu)/T}) \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 18)$$

如果 $T \rightarrow 0$, 原式等于 $= E_p + [\mu - E_p]\theta(\mu - E_p) = \max[E_p, \mu]$, 这恰好和统计力学给出的结果自洽。

所以

$$\begin{aligned} P_f &= -\frac{(M - m_c)^2}{4G} + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} E_p(B) \\ &\quad + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} \{ T \ln[1 + e^{-[E_p(B) + \mu_f]/T}] + T \ln[1 + e^{-[E_p(B) - \mu_f]/T}] \} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 19)$$



这里面有, $E_p = \sqrt{p_z^2 + (2n + 1 - s)|q_f|B + M^2} = \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2}$ 。

下面分析一下 $T \rightarrow 0$, $\sum_s \sum_n$ 与 \sum_k 的求和个数对应关系:

$\sum_s \sum_n$	\sum_k	$m = 2n + 1 - s = 2k$
S=1,n=0 一种情况	k=0	m=0,此时s,n求和有一种情况, k求和也一种
S=1,n=1 S=-1,n=0 两种情况	k=1	m=2,此时s,n求和有两种情况, k求和一种
S=1,n=2 S=-1,n=1 两种情况	k=2	m=4,此时s,n求和有两种情况, k求和一种

所以我们才能得到:

$$\sum_s \sum_n = (2 - \sigma_{k0}) \sum_k = \alpha_k \sum_k \quad (\text{A}\cdot 20)$$

由此, 可以得到压强的进一步的表达式:

$$P_f(\mu, B) = -\frac{(M - m_c)^2}{4G} + p_f^{med} + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} \quad (\text{A}\cdot 21)$$

这里面, 介质中压强的部分等于:

$$p_f^{med} = \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [\mu_f - E_{p,k(B)}] \quad (\text{A}\cdot 22)$$

这一项与费米能和介质相关, 是一项集体作用。

下面就开始计算压强中各项, 里面有发散项, 采用正规化, 从真空中取得相消项, 然后加上真空中产生的与相消项同样形式的压强, 但是采用截断正规化, 于是就相当于将压强中的无穷大归结到了真空中, 并没有修正拉氏量, 因为NJL-model里面的标量场耦合常数G的量纲是 MeV^{-2} , 量纲分析指出, 当相互作用常数的量纲为



质量量纲的零次幂的时候，费曼图阶数增长不改变发散级次；正次幂的时候，高阶图具有更低的发散级次；负次幂的时候，高阶图具有更高的发散级次。在最后一种情况下，高阶图将产生出越来越多种类的无穷大，使得理论应当添加的抵消项越来越多。由于具有无穷多参数的理论是没有意义的，这时候，NJL-model无法重正化，所以采用正规化的方法就行了！

现在计算磁场中的压强的最后一项：

$$\frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} = \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [E_{p,k} - \frac{E_{p,0}}{2}] \quad (\text{A}\cdot 23)$$

现在是1维的情况，我们采用维数正规化： $d = 1 - \epsilon$ ，得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} [q^2 + M^2]^{-A} = \frac{\Gamma[A-d/2]}{(4\pi)^{d/2} \Gamma[A] (M^2)^{A-d/2}}$$

令 $x = \frac{M^2}{2qB}$ ，所以有

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_z}{2\pi} E(p, k) &= \frac{\Gamma[-1+\epsilon/2]}{(4\pi)^{1/2-\epsilon/2} \Gamma[-1/2]} \frac{1}{(M^2+2kqB)^{-1+\epsilon/2}} \\ &= \frac{2N_c}{\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} (|q_f|B)^2 \frac{\Gamma[-1+\epsilon/2]}{(4\pi)^{1/2-\epsilon/2} \Gamma[-1/2]} \left\{ \frac{1}{(k+x)^{-1+\epsilon/2}} - \frac{1}{2x^{-1+\epsilon/2}} \right\} \end{aligned}$$

之后，我们就把这一项按 ϵ 来展开，这里我们用到了Riemann-Hurwitz zeta 函数：

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}; \quad \Gamma[\frac{1}{2} - n] = \frac{(-4)^n}{(2n)!} \sqrt{\pi}$$

所以，原式 = $\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} (|q_f|B)^2 \Gamma[-1 + \epsilon/2] [\zeta(-1 + \epsilon/2, x) - \frac{1}{2x^{-1+\epsilon/2}}]$ 。



此时，我们展开按照下面几个步骤：

$$\begin{aligned}
1. & \Gamma[-1 + \epsilon/2] = -(2/\epsilon - \gamma_E + 1), \Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\epsilon) \right], x < 0, \\
& \gamma_E = 0.5772157, \quad \epsilon = x + n, \quad n = -x \\
2. & \zeta(-1 + \frac{\epsilon}{2}, x) = \zeta(-1, x) + \zeta'(-1, x) \frac{\epsilon}{2}, \quad \zeta(-1, x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - x + x^2 \right) \\
3. & 1/(2x^{-1+\epsilon/2}) = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^\epsilon = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\ln x}{2} \epsilon \right)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

所以原式等于

$$P_1 = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\frac{x^2}{\epsilon} - \frac{x^2}{2} (\gamma_E - 1) - \frac{x \ln x}{2} - \zeta'(-1, x) \right] \tag{A.25}$$

但是这一项里面仍然包括了发散的部分，所以还是得通过截断正规化来消除发散，要引入动量截断：

$$\begin{aligned}
P_2 &= 2N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [p^2 + M^2]^{1/2} = 2N_c \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2|q_f|B)^{3/2}} \frac{[p^2 + M^2]^{1/2}}{(2|q_f|B)^{1/2}} \\
&= 2N_c \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [p^2 + x^2]^{1/2} \\
&= 2N_c \sum_{f=u}^d (2|q_f|B)^2 \frac{\Gamma[1/2 - 3/2 + \frac{\epsilon}{2}]}{(4\pi)^{3/2 - \epsilon/2} \Gamma[-\frac{1}{2}] x^{-2 + \epsilon/2}} \\
&= \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q|B)^2 \left[\frac{x^2}{\epsilon} + \frac{x^2}{2} (1 - \gamma_E) - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

这一项 P_2 就是为了消除 P_1 里面的发散项所引入的，这里面我们用 $P_2 + P_1$ 就可以得到一个没有发散项的压强：



$$P_1 + P_2 = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q|B)^2 \left[\frac{x^2}{4} + \zeta'(-1, x) - \frac{1}{2}(x^2 - x) \ln x \right] \quad (\text{A}\cdot\text{27})$$

这里面我们减去了发散的压强，但我们应该加上一个未发散且同形式的真空产生的压强，这个压强通过截断正规化来消除发散。

显然这里面我们要用真空动量截断正规化压强：

$$\begin{aligned} p_f^{vac} &= 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + M^2} = \frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 \sqrt{p^2 + M^2} dp \\ &= -\frac{N_c N_f}{8\pi^2} \left\{ M^4 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M} \right] - \epsilon_\Lambda \Lambda [\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2] \right\}, \quad \epsilon_\Lambda^2 = \Lambda^2 + M^2 \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot\text{28})$$

之前的磁场中介质给出的正规化压强是：

$$p_f^{mag} = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u}^d (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{4} + \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f \right] \quad (\text{A}\cdot\text{29})$$

其中 $\zeta'(-1, x_f) = d\zeta(z, x)/dz|_{z=-1}$ 。现在还剩一项含化学势的介质中的物态方程的项，可以利用化学势在零温时对应费米面上的能量来解决上限积分。所以有：

$$\begin{aligned} p_f^{med} &= \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [\mu_f - E_{p,k(B)}] \\ &= N_c \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \frac{\alpha_k |q_f| B N_c}{4\pi^2} 2 \int_0^{k_f} \frac{dp_z}{2\pi} [\mu_f - \sqrt{p_z^2 + 2k|q_f|B + M^2}] \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot\text{30})$$

对这个式子直接积分，我们可以得到：

$$p_f^{med} = \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{(|q_f|B N_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2} - s_f(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\} \quad (\text{A}\cdot\text{31})$$



由此，给出夸克物质中每味夸克的压强我们就都能给出来了，表达式为：

$$p_f(\mu_f, B) = -\frac{(M - m_c)^2}{4G} + [p_f^{vac} + p_f^{mag} + p_f^{med}]|_M \quad (\text{A.32})$$

现在物态方程有了，未知数里还有一个，就是有效质量的问题，因为在处理压强的时候，用的能量项里面的质量实际上是有效质量，这个有效质量体现了粒子的凝聚效应，从而产生了手征对称性破缺。

现在开始求有效质量 M ， $M = m_c + \langle \sigma \rangle$ ，所以重点是求出 σ 粒子的凝聚。对于如何求解，如果我们直接从 $\langle \sigma \rangle = -\langle \sigma \rangle \frac{\lambda}{N_c} \text{tr} \int i \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + \langle \sigma \rangle^2}$ 直接求解的话，非常困难，因为要用留数定理来处理无穷级数，而留数定理出来的数，没有办法积分。但是通过观察： $P_f = -\frac{(M-m_c)^2}{4G} - \frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + M^2)$ ，观察后面这项，令之等于，可见： $\frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \sigma \rangle} = -\frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2M}{-p^2 + M^2} = -i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{-p^2 + M^2}$

若 $m_c \ll \langle \sigma \rangle$ ，则 $\langle \sigma \rangle = \frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \sigma \rangle} \cdot 2G$ 。

这时候，我们可以用这个方法来做，对压强进行求导：

$p_{f2} = [p_f^{vac} + p_f^{mag} + p_f^{med}]|_M$ ，三个部分都要对 $\langle \sigma \rangle$ 进行求导。

先得到真空压强有关的一个式子：

$$\begin{aligned} \frac{dp_f^{vac}}{dM} \cdot 2G &= 4N_c N_f G \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{\sqrt{p^2 + M^2}} = 4N_c N_f G \int_0^\Lambda \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2 M}{\sqrt{p^2 + M^2}} \\ &= \frac{MN_c N_f G}{\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{(M^2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

对于压强中介质相关的那一项做微分：

$$\begin{aligned} 2G \frac{dp_f^{med}}{dM} &= 2G \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k (|q_f| B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left[-\frac{M}{\sqrt{M^2 + p^2}} \right] \\ &= -\sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{M |q_f| B G}{\pi^2} \left\{ \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$



最后是对真空项作微分，其中牵扯到很多细节，不在此占篇幅了，最终，可以得到夸克物质的有效质量来：

$$\begin{aligned}
M_f = m_c + \frac{MGN_cN_f}{\pi^2} & \left\{ \Lambda\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \frac{M^2}{2} \ln \frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2})^2}{M^2} \right. \\
+ \sum_{f=u}^d \frac{M|q_f|BN_cG}{\pi^2} & \left\{ \ln \Gamma[x_f] - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_f - \frac{1}{2}[2x_f - 1] \ln[x_f] \right\} \\
- \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{M|q_f|BN_cG}{\pi^2} & \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right]
\end{aligned} \tag{A.35}$$



A.0.2 强磁场下SU(2)对称性NJL模型加入同位旋矢量道的推导

现在我们仍然考虑两味 β 稳定夸克物质加上了强磁场后的情况，这里面我们先给出如同上一部分的拉氏密度来：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f(i\cancel{\partial} - m_c)\psi_f + G[(\bar{\psi}_f\psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2] - G_v(\bar{\psi}\gamma_\mu \vec{\tau}\psi_f)^2 - G_v(\bar{\psi}\gamma_\mu i\gamma_5 \vec{\tau}\psi_f)^2 \quad (\text{A}\cdot 36)$$

这里面，经过了平均场近似（我利用了 $\sigma = -\frac{\lambda}{N_c}\bar{\psi}_f\psi_f = -2G(\bar{\psi}_f\psi_f)$ ， $\vec{\pi} = -2Gi\bar{\psi}_f\gamma_5\vec{\tau}\psi_f$ ， $\vec{\rho} = 2G_v\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\tau}\psi_f$ ）

得到平均场下的拉氏密度：

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f(i\cancel{\partial})\psi_f - \bar{\psi}_f(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\pi} + \gamma^\mu\rho_{\mu,i}\tau_i)\psi_f - \frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) \quad (\text{A}\cdot 37)$$

这里面，我们仍然按照有限温度场论的一般的处理方法，引入化学势 μ ：

$$\mathcal{L}_f + \mu q^\dagger q = \bar{\psi}_f(i\cancel{\partial})\psi_f - \bar{\psi}_f(\sigma')\psi_f + \psi_f^\dagger(\mu - \rho_0^3\tau_{3f})\psi_f - \frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) \quad (\text{A}\cdot 38)$$

之后就采用路径积分，给出配分函数：

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu_i N_i)} = \int [d\pi] \int_{\text{periodic}} [d\phi] \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H} + \mu N\right)\right] \quad (\text{A}\cdot 39)$$

令 $\tilde{\mu} = \mu - \tau_{3f}\rho_0^3$ ，可以得到以下的式子：

$$\ln Z = \ln \text{Tr} \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left[i \int (\tilde{L} + \mu\psi^\dagger\psi) d^4x\right] \quad (\text{A}\cdot 40)$$

和前文一样，我们可以得到自由能密度的表达式：

$$F_f = \frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) + i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln [(i\cancel{\partial} - \sigma' + \gamma_0\tilde{\mu})] \quad (\text{A}\cdot 41)$$



经过了动量空间零分量的无穷大积分变成无穷级数的方法，可以得到：

$$P_f = -\frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} E_p(B) \\ + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{s,n,f} (|q_f|B) \int \frac{dp_z}{2\pi} \{T \ln [1 + e^{-[E_p(B)+\tilde{\mu}_f]/T}] + T \ln [1 + e^{-[E_p(B)-\tilde{\mu}_f]/T}]\} \quad (\text{A}\cdot 42)$$

当我们取零温极限情况时，可以得到：

$$P_f(\mu, B) = -\frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) + p_f^{med} + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} \quad (\text{A}\cdot 43)$$

这里面有：

$$p_f^{med} = \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [\tilde{\mu}_f - E_{p,k(B)}] \quad (\text{A}\cdot 44)$$

下面是求解 $\langle\sigma\rangle$, $\langle\rho_{30}\rangle$ and $\tilde{\mu}$ 的步骤。

从自由能密度入手，

$$F_f = \frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) + \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln [\bar{p}^2 + \sigma^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2] \quad (\text{A}\cdot 45)$$

因为是平均场的绝对稳定无穷大夸克物质，所以要求自由能对各个介子的真空期待值的情况为零也就是： $\frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial \sigma} |_{\sigma=\langle\sigma\rangle} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial \rho} |_{\rho=\langle\rho\rangle} = 0$ 。我们能够得到：

$$\langle\sigma\rangle = -\langle\sigma\rangle \frac{\lambda}{N_c} \text{tr} \int i \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{p}^2 + \langle\sigma\rangle^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2} \quad (\text{A}\cdot 46)$$

$$\langle\rho\rangle = (2G_v) \text{tr} \int i \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tau_{3f}(p_0 + \tilde{\mu})}{\bar{p}^2 + \langle\sigma\rangle^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2} \quad (\text{A}\cdot 47)$$

之后我们也能得到压强的表达式：

$$P_f(\mu, B) = -\frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 - \frac{G}{G_v}\rho^2) + p_f^{med} + \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} E_{p,k} \quad (\text{A}\cdot 48)$$



其中，介质中的压强的表达式为：

$$p_f^{med} = \frac{N_c}{2\pi} \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (|q_f|B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} [\tilde{\mu}_f - E_{p,k(B)}] \quad (\text{A}\cdot 49)$$

我们就可以进而得到：

$$P_f = -\frac{N_c}{2\lambda} (\sigma^2 - \frac{G}{G_v} \rho^2) - \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln [\vec{p}^2 + \sigma^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2] \quad (\text{A}\cdot 50)$$

后面这项我们定为 P_{f2}

$$\frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \sigma \rangle} = -\frac{i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2M}{\vec{p}^2 + \langle \sigma \rangle^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2} = -i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M}{\vec{p}^2 + \langle \sigma \rangle^2 - (p_0 + \tilde{\mu})^2} \quad (\text{A}\cdot 51)$$

这里面我们定义如果 $m_c \ll \langle \sigma \rangle$ ，则 $\langle \sigma \rangle = \frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \sigma \rangle} \cdot 2G$ ， $\langle \rho \rangle = \frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \rho \rangle} \cdot (-2G_v)$

最终我们可以给出粒子数密度的表达式：

$$\langle \rho \rangle = -\frac{\partial p_{f2}}{\partial \langle \rho \rangle} \cdot 2G_v = N_c \sum_{f=u}^d \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{(|q_f|B N_c)}{4\pi^2} \frac{4G_v}{1} (\tau_{3f} \sqrt{\tilde{\mu}^2 - M^2})$$

A.0.3 强磁场下SU(3)对称性NJL模型标量道赝标量道的推导

为了给出夸克星的性质，我们必须考虑 β 稳定夸克物质的性质，这里面我们加入了三味夸克（u,d,s）和两味轻子（e, μ ）。这里面，我们考虑了强磁场的加入，下面就是我们的三味夸克物质的拉氏密度：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} \quad (\text{A}\cdot 52)$$

这里面，有： $\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f [\gamma_\mu (i\partial^\mu - q_f A^\mu) - \hat{m}_c] \psi_f + \mathcal{L}_{sym} + \mathcal{L}_{det}$

标量道与赝标量道： $\mathcal{L}_{sym} = G \sum_{a=0} [(\bar{\psi}_f \lambda_a \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \lambda_a \psi_f)^2]$



$\psi_f = (u, d, s)^T$, 代表的是三味夸克物质的场算符。 $\hat{m}_c = \text{diag}_f(m_u, m_d, m_s)$, 就是相关的夸克物质流质量矩阵。 q_f 是夸克物质的带电荷, λ_a 代表盖尔曼矩阵(Gell-Mann matrices)。 \mathcal{L}_{det} 是 t'Hooft 的夸克味空间相互作用的行列式比如 $\psi_f = (uds)^T$ 可以给出六点相互作用:

$$\det_f \bar{\psi}_f \mathcal{O} \psi_f := \sum_{i,j,k} \epsilon_{i,j,k} (\bar{u} \mathcal{O} \psi_i) (\bar{d} \mathcal{O} \psi_j) (\bar{s} \mathcal{O} \psi_k).$$

\mathcal{L}_{sym} 可以满足 $U(N_f)_L \otimes U(N_f)_R$ 变换下的对称性, 并且和四点相互作用的 f 维味空间对应 (可以从 $U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A$ 看出)。

在QCD里面, $U(1)_A$ 对称性被破坏了, 这个可能是瞬子效应的效应。在夸克部分, 这个对称性破坏的行为, 可以通过引入六点相互作用 \mathcal{L}_{det} 来引入, 并且效应是, 破坏 $U(1)_A$ 对称性, 保持了 $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 的对称性。

并且, 经过一定的变换, 我们可以给出:

$$\mathcal{L}_{det} = -K \{ \det_f [\bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \psi_f] + \det_f [\bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \psi_f] \} \quad (\text{A.53})$$

为了给出拉氏密度在平均场下的近似, 我们定义了矩阵元 ϕ 和它的厄密共轭算符 ϕ^\dagger , 然后做了如下的定义:

$$\phi_{ij} = \bar{\psi}_j (1 - \gamma_5) \psi_i, \quad \phi_{ij}^\dagger = \bar{\psi}_j (1 + \gamma_5) \psi_i$$

我们可以很容易地得到:

$$\bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \lambda_a \psi_f = \text{tr}(\lambda_a \phi)$$

$$\bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \lambda_a \psi_f = \text{tr}(\lambda_a \phi^\dagger)$$

tr 就是味空间的求迹算符。

把上面的表达式带入拉氏密度里面去, 我们可以重新写出NJL模型的四点对称相互作用项:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sym} &= G \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}_f \lambda_a \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i \gamma_5 \lambda_a \psi_f)^2] \\
&= G \sum_{a=0}^8 \text{tr}(\lambda_a \phi) (\text{tr} \lambda_a \phi^\dagger)
\end{aligned} \tag{A.54}$$

下面我们定义一个任意的矩阵，然后把它放在三维味空间里面，并且用Gell-Mann矩阵把它展开： $A = \sum_{a=0}^8 C_a \lambda_a$

$$C_a = \frac{1}{2} \text{tr}(\lambda_a A)$$

所以，我们可以得到：

$$\mathcal{L}_{sym} = G \sum_{a=0}^8 \text{tr}(\lambda_a \phi) (\text{tr} \lambda_a \phi^\dagger) = 2G \text{tr}(\phi \phi^\dagger) \tag{A.55}$$

然后通过平均场近似，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sym} &= G \sum_{a=0}^8 \text{tr}(\lambda_a \phi) (\text{tr} \lambda_a \phi^\dagger) = 2G \text{tr}(\phi \phi^\dagger) \\
&= 2G \text{tr}(\phi \langle \phi^\dagger \rangle + \langle \phi \rangle \phi^\dagger - \langle \phi \rangle \langle \phi^\dagger \rangle) \\
&= 2G (2\bar{\psi}_i \psi_i \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle - \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle) \\
&= 4G [\phi_u \bar{u} u + \phi_d \bar{d} d + \phi_s \bar{s} s - \frac{1}{2} (\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2)]
\end{aligned} \tag{A.56}$$

现在我们开始考虑代表SU(3)味空间六点相互作用的 t'Hooft 项来进行化简。这时候还是利用平均场近似，我们可以得到：

$$\det_f \bar{\psi}_f \mathcal{O} \psi_f := \sum_{i,j,k} \epsilon_{i,j,k} (\bar{u} \mathcal{O} \psi_i) (\bar{d} \mathcal{O} \psi_j) (\bar{s} \mathcal{O} \psi_k) \tag{A.57}$$

所以，可以给出：



$$\mathcal{L}_{det} = -2K(\phi_d\phi_s\bar{u}u + \phi_u\phi_d\bar{d}d + \phi_u\phi_d\bar{s}s - 2\phi_u\phi_d\phi_s)$$

最终，我们得到平均场近似后的拉氏密度：

$$\mathcal{L}_{MFA} = \bar{\psi}_f[\gamma_\mu(i\partial^\mu - q_f A^\mu) - \hat{M}]\psi_f - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s \quad (\text{A}\cdot 58)$$

这里面质量项矩阵为：

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_u - 4G\phi_u + 2K\phi_d\phi_s & 0 & 0 \\ 0 & m_d - 4G\phi_d + 2K\phi_u\phi_s & 0 \\ 0 & 0 & m_s - 4G\phi_s + 2K\phi_u\phi_d \end{pmatrix}$$

这时候我们就可以进行路径积分了，和之前几章的处理方法一样，我们可以得到：

$$p_f = -F_f = \theta_u + \theta_d + \theta_s - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s \quad (\text{A}\cdot 59)$$

这里面有：

$$\theta_i = -\frac{i}{2}\text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + \hat{M}_i^2)$$

我们仍然可以按照之前的维数正规化和截断正规化的方法，来给出压强的真空部分，介质部分，还有磁场部分，也就是：

$$P_f = (P_f^{vac} + P_f^{mag} + P_f^{med})_{M_f} \quad (\text{A}\cdot 60)$$

真空压强部分：

$$P_f^{vac} = -\frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ M_f^4 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M_f} \right] - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right\}, \quad \epsilon_\Lambda^2 = \Lambda^2 + M_f^2 \quad (\text{A}\cdot 61)$$

里面的 Λ 是动量截断。



下面是磁场的贡献:

$$p_f^{mag} = \frac{N_c}{2\pi^2} (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{4} + \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f \right] \quad (\text{A}\cdot\text{62})$$

其中 $\zeta'(-1, x_f) = d\zeta(z, x)/dz|_{z=-1}$, $x_f = \frac{M_f^2}{2|q_f|B}$

Riemann-Hurwitz zeta 函数是这么定义的: $\zeta(s, a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$;

下面是介质贡献的部分:

$$p_f^{med} = \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{(|q_f|BN_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2} - s_f(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\} \quad (\text{A}\cdot\text{63})$$

这里面, 有如下的定义: $s_f(k, B) = \sqrt{M^2 + 2|q_f|Bk}$, $k_{fmax} = \frac{\mu_f^2 - M^2}{2|q_f|B} = \frac{p_{f,F}^2}{2|q_f|B}$, 并且 $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$, 这个和以往的定义一样。

因为我们仍然还有一个未知量 ϕ_f 不确定, 所以我们要给出这个亮点解决方法, 我们可以通过这个方程来求解:

$$\phi_f = \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{(\not{p} - M_f + i\epsilon)} \quad (\text{A}\cdot\text{64})$$

经过一系列的计算, 我们最终可以给出:

$$\phi_f = (\phi_f^{vac} + \phi_f^{mag} + \phi_f^{med})_{M_f} \quad (\text{A}\cdot\text{65})$$

其中, 真空部分:

$$\phi_f^{vac} = -\frac{MN_c}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} - \frac{M_f^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2})^2}{(M_f^2)} \right] \right\} \quad (\text{A}\cdot\text{66})$$



磁场部分:

$$\phi_f^{mag} = -\frac{M_f N_c}{2\pi^2} (|q_f|B) \{ \ln\{\Gamma(x_f)\} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\ln x_f}{2} - x_f \ln x_f \} \quad (\text{A.67})$$

介质部分:

$$\phi_f^{mag} = -\frac{M_f N_c}{2\pi^2} (|q_f|B) \{ \ln\{\Gamma(x_f)\} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\ln x_f}{2} - x_f \ln x_f \} \quad (\text{A.68})$$

类似于SU(2)NJL模型我们用的方法, 可以给出夸克的粒子数密度 $\rho_f = \sum_{k=0}^{k_f, max} \alpha_k \frac{|q_f|B N_c}{2\pi^2} k_{F,f}$.

这样只含有标量, 赝标量道, 同位旋标量矢量道的NJL模型的强磁场下的SU(3)对称性下三味夸克物质的物态方程的推导, 基本结束, 下一个小章节, 我们集中处理一下加上同位旋矢量道的三味夸克物质的性质。

A.0.4 强磁场下SU(3)对称性NJL模型同位旋矢量道的推导

现在我们来研究一下强磁场下致密星体物质的性质, 这里面考虑了 β 稳定这个条件。首先, 我们先给出相关的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.69})$$

这里我们考虑了SU(3)NJL模型用来描述夸克部分, 我们加入了矢量-同位旋标量, 矢量-同位旋矢量, 标量-同位旋标量, 赝标量-同位旋标量和t'Hooft 六点相互作用项。对于夸克部分:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_f [\gamma_\mu (i\partial^\mu - q_f A^\mu) - \hat{m}_c] \psi_f + \mathcal{L}_{sym} + \mathcal{L}_{det} + \mathcal{L}_v + \mathcal{L}_{I,v} \quad (\text{A.70})$$

这里的道分别是:

$$\mathcal{L}_{sym} = G \sum_{a=0} [(\bar{\psi}_f \lambda_a \psi_f)^2 + (\bar{\psi}_f i\gamma_5 \lambda_a \psi_f)^2] \quad (\text{A.71})$$

$$\mathcal{L}_{det} = -K \{ \det_f [\bar{\psi}_f (1 + \gamma_5) \psi_f] + \det_f [\bar{\psi}_f (1 - \gamma_5) \psi_f] \} \quad (\text{A.72})$$



$$\mathcal{L}_v = -G_v \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma^\mu \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^\mu \gamma_5 \lambda^a \psi)^2] \quad (\text{A.73})$$

$$\mathcal{L}_{I,v} = -G_{I,v} [(\bar{\psi}\gamma^\mu \vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5 \gamma^\mu \vec{\tau}\psi)^2] \quad (\text{A.74})$$

在这个拉氏密度里面，夸克场仍然包含三味夸克， $\psi = \{u, d, s\}^T$ ，并且 \hat{m}_c 和 q_f 分别是流质量和夸克所带电荷。 λ_a 是盖尔曼矩阵， \mathcal{L}_{det} 这一项是 t'Hooft 项，会给出味空间的六点相互作用。 \mathcal{L}_v 代表着 $U(3)_V \otimes U(3)_A$ 引入矢量道后的不变相互作用，并且我们也给出了一个矢量-同位旋矢量道，在 $\mathcal{L}_{I,v}$ 拉氏密度里面加入了夸克物质的同位旋效应。对于外加磁场， $A_\mu = \delta_{\mu 2} x_1 B$ ， $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。在这一章，我们定义磁场方向为z方向。

A.0.5 SU(3)NJL模型的物态方程

物理学家们最关心的就是夸克物质的物态方程怎么获得。为了给出夸克物质的能量密度和压强，我们首先应该知道夸克物质的热力学势 Ω_f 。按照一般的程序，我们首先会应用有限温度场论的知识来计算热力学量，于是平均场近似下的拉氏密度可以得到：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MFA} = & \bar{\psi}_f [\gamma_\mu i \partial^\mu - \hat{M} - 4G_v \gamma_0 \hat{\rho} - 2G_{I,v} \gamma_0 \tau_{3f} \rho_f] \psi_f \\ & - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K \phi_u \phi_d \phi_s \\ & + 2G_v(\rho_u^2 + \rho_d^2 + \rho_s^2) + G_{I,v}(\rho_u - \rho_d)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

这里面有：

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_u & 0 & 0 \\ 0 & \rho_d & 0 \\ 0 & 0 & \rho_s \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} M_u & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 \\ 0 & 0 & M_s \end{pmatrix}$$

其中：

$$M_i = m_i - 4G\phi_i + 2K\phi_j\phi_k, \quad \phi_f = \langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{1}{(p - M_f + i\epsilon)}$$



之后我们引入了朗道量子化的推导，并且经过了一些路径积分的计算，我们可以得到强磁场下的夸克物质所拥有的所有的热力学量：

$$p_f = -F_f = \theta_u + \theta_d + \theta_s - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G_v(\rho_u^2 + \rho_d^2 + \rho_s^2) + G_{I,v}(\rho_u - \rho_d)^2 \quad (\text{A.76})$$

这里有

$$\theta_i = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_{i=u,d,s} \text{tr} \ln \left\{ \frac{1}{T} [\not{p} - \hat{M}_i + \gamma_0 \tilde{\mu}_i] \right\}$$

here, $\tilde{\mu}_f = \mu_f - 4G_v\rho_f - 2g_v(\rho_u + \rho_d + \rho_s) - 2G_{I,v}\tau_{3f}(\rho_u - \rho_d)$, and μ_f 是每一味夸克的化学势。

首先我们先按照以前的方法来求出夸克凝聚和压强：

$$P_f = P_f^{vac} + P_f^{mag} + P_f^{med} - 2G(\phi_u^2 + \phi_d^2 + \phi_s^2) + 4K\phi_u\phi_d\phi_s + 2G_v(\rho_u^2 + \rho_d^2 + \rho_s^2) + G_{I,v}(\rho_u - \rho_d)^2 \quad (\text{A.77})$$

第一项就是真空的贡献：

$$P_f^{vac} = -\frac{N_c}{8\pi^2} \left\{ M_f^4 \ln \left[\frac{\Lambda + \epsilon_\Lambda}{M_f} \right] - \epsilon_\Lambda \Lambda (\Lambda^2 + \epsilon_\Lambda^2) \right\} \quad (\text{A.78})$$

这里面 $\epsilon_\Lambda^2 = \Lambda^2 + M_f^2$, Λ 是真空截断。

磁场贡献的压强：

$$P_f^{mag} = \frac{N_c}{2\pi^2} (|q_f|B)^2 \left[\frac{x_f^2}{4} + \zeta'(-1, x_f) - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f) \ln x_f \right] \quad (\text{A.79})$$



这里 $\zeta'(-1, x_f) = d\zeta(z, x)/dz|_{z=-1}$, $x_f = \frac{M_f^2}{2|q_f|B}$. $\zeta(z, x)$ 是 Riemann-Hurwitz 函数.

介质的贡献可以给出:

$$p_f^{med} = \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{(|q_f|BN_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2} - s_f(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\} \quad (\text{A}\cdot 80)$$

这里有:

$s_f(k, B) = \sqrt{M^2 + 2|q_f|Bk}$, $k_{fmax} = \frac{\mu_f^2 - M^2}{2|q_f|B} = \frac{p_{f,F}^2}{2|q_f|B}$, $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$. k_{fmax} 是朗道能级.

于是我们可以给出每一味夸克的凝聚:

$$\phi_f = (\phi_f^{vac} + \phi_f^{mag} + \phi_f^{med})_{M_f} \quad (\text{A}\cdot 81)$$

这里有

$$\begin{aligned} \phi_f^{vac} &= - \frac{MN_c}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2} - \frac{M_f^2}{2} \ln \left[\frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M_f^2})^2}{(M_f^2)} \right] \right\} \\ \phi_f^{mag} &= - \frac{M_f N_c}{2\pi^2} (|q_f|B) \{ \ln \{ \Gamma(x_f) \} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{\ln x_f}{2} - x_f \ln x_f \} \\ \phi_f^{med} &= \sum_{k=0}^{k_{fmax}} \alpha_k \frac{M_f |q_f| B N_c}{\pi^2} \left\{ \ln \left[\frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - s_f(k, B)^2}}{s_f(k, B)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 82)$$



我们用的参数的值是: $\Lambda = 631.4\text{MeV}$, $m_u = m_d = 5.5\text{MeV}$, $m_s = 135.7\text{MeV}$, $G\lambda^2 = 1.835$, $K\Lambda^5 = 9.29$.

我们也能给出轻子的贡献:

$$\begin{aligned}
 p_l^{med} &= \sum_{k=0}^{k_{lmax}} \alpha_k \frac{(|q_l|BN_c)}{4\pi^2} \left\{ \mu_l \sqrt{\mu_l^2 - s_l(k, B)^2} \right. \\
 &\quad \left. - s_l(k, B)^2 \ln \left[\frac{\mu_l + \sqrt{\mu_l^2 - s_l(k, B)^2}}{s_l(k, B)} \right] \right\} \quad (\text{A.83})
 \end{aligned}$$

插图索引

1-1	质量密度相关模型的自治性分析	8
1-2	无相互作用ud夸克物质的对称能，其中夸克质量为流夸克质量	10
1-3	NJL模型SU(2)对称性下的两味夸克物质的对称能	11
1-4	基于准粒子袋模型的两味夸克物质的对称能	13
1-5	基于质量密度相关模型的两味夸克物质的对称能	14
2-1	CIDDM模型里面给出，基于三套不同的参数：DI-0, DI-300, DI-2500，夸克物质的对称能随重子数密度变化的情况。两味ud 夸克物质 ($n_s = 0$) 的情况见左图；右图是u-d-s 夸克物质的情况，这里面 $n_s = n_B$ 。我们还选取了相对论平均场 (Relativistic mean field theory (RMF)) 里面的 NL $\rho\delta$ 相互作用来进行比较。我们发现，对于DI-2500这套参数，对称能的取值大约是核物质对称能的三十倍，而DI-0的情况大约是核物质对称能的五分之一 ^[79] 。	30
2-2	每核子能量和相应的压强对于奇异夸克物质和两位u-d 夸克物质随着重子数密度变化关系图，这里面考虑了CIDDM 模型里面的beta 稳定条件，参数选取是DI-0, DI-300, and DI-2500 ^[79]	32
2-3	CIDDM模型里面的奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化 ^[79]	33
2-4	CIDDM模型下，考虑奇异夸克物质条件，有效夸克质量随着重子数密度的变化。考虑三组参数DI-0, DI-300, DI-2500 ^[79]	34
2-5	考虑三组参数DI-0, DI-300, DI-2500的情况下，CIDDM模型里面的静止夸克星的质量半径关系。我们还给出了考虑了旋转周期3.15ms 的夸克星的结果，这里面我们的半径取赤道半径。覆盖的区域带表示出了PSR J1614-2230的夸克星的质量范围 $1.97 \pm 0.04M_\odot$ ^[79]	35



2-6	左图: CIDD M模型里面 $z=1.8$ 的静止的夸克星的最大质量的 D_I 的依赖性。在不同的 DI 下的 D 参数的取值可以使得夸克星的最大质量变得最大; 右图: 两味 $u-d$ 夸克物质的对称能随着重子数密度的变化关系, 这里面包括 $DI-70$ ($z = 1.8$) 和 $DI-85$ ($z = 1.8$)在CIDD M模型里。这些结果里面还包括着 $DI=0$ 的情况和NJL模型以及自由费米夸克气体的对称能 [79]。	38
2-7	这张图和图2-6类似但是 DI 更大。同时在右图也包括相对论平均场 $NL\rho\delta$ 相互作用给出的核物质对称能。 $DI-2000$ ($z = 1.8$) 和 $DI-3500$ ($z = 1.8$)分别在原来的对称能的取值上除了30和100 [79]	41
2-8	CIDD M模型下两味 $u-d$ 夸克物质对称能的密度相关性, 我们选取 $z = 1.8$, $D_I = 3500 \text{ MeV}\cdot\text{fm}^{3\alpha}$, α 和 β 分别取不同的值 [79]	42
2-9	CIDD M模型下 u 夸克有效质量质量随着不对称度的变化 [79]	43
2-10	不同温度下CIDD M模型 $z=1/3$ 情况下奇异夸克物质的每核子自由能和压强随着重子数密度变化的关系。	49
2-11	不同温度下CIDD M模型 $z=1.8$ 情况下奇异夸克物质的每核子自由能和压强随着重子数密度变化的关系。	50
2-12	不同温度情况下CIDD M模型 $z=1/3$ 时奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化	51
2-13	不同温度情况下CIDD M模型 $z=1.8$ 时奇异夸克物质的夸克组分随着重子数密度的变化	52
2-14	不同阶段下CIDD M模型 $z=1/3$, $z=1.8$ 时夸克星的最大质量随着半径的变化关系	53
3-1	在不同参数下奇异夸克物质的绝对稳定区间	70
3-2	在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化	71
3-3	IDCQM夸克物质的对称能随着重子数密度的变化	72
3-4	不同参数下夸克物质的组分随着重子数密度的变化	73



3-5	奇异夸克物质的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系	74
3-6	ud夸克的组分夸克质量随着重子数密度变化的关系	75
3-7	不同参数情况下夸克星的质量半径关系	76
4-1	常数磁场 $B = 1 \times 10^{18} \text{ G}$, $2 \times 10^{18} \text{ G}$ 和 $3 \times 10^{18} \text{ G}$ 下奇异夸克物质的每核子能量以及横纵向磁场随着重子数密度的变化, 使用的是CIDDM模型的DI-85 ($z=1.8$)参数 ^[56]	91
4-2	横纵向压强以及它们的压强劈裂因子 δ_p 在粒子数密度为 $n_B = 3\rho_0$ 、 $5\rho_0$ 和 $7\rho_0$ 的时候随着磁场 B 的变化, 这里我们采用了CIDDM模型的DI-85这套参数, 并且考虑奇异夸克物质的情况 ^[56]	93
4-3	在磁场缓慢和快速变化的情况里, 我们给出了夸克星内的奇异夸克物质的密度相关磁场 B 和横纵向压强以及压强非对称度 δ_p 的重子数依赖情况, 采用的是CIDDM模型里面的DI-85这套参数, 并且使用了两种不同的常数磁场 $B_0 = 4 \times 10^{18} \text{ G}$ (左图), $1 \times 10^{19} \text{ G}$ (右图) ^[56]	94
4-4	在磁场快速变化和慢速变化的情况下分别使用了横向和径向方向的磁场的夸克星的最大质量随着 B_0 的变化, 这里使用CIDDM模型里面的DI-85这套参数, 阴影区域是 PSR J0348+0432 [57]给出的 $2.01 \pm 0.04M_\odot$ 的脉冲星质量 ^[56]	96
5-1	不同参数下奇异夸克物质的压强随着能量密度的变化, 磁场为零 ^[37]	113
5-2	左边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19} \text{ G}$ 同时 $G_V = 0, G_V = 0.8G_S$ 的奇异夸克物质下u夸克的组分夸克质量随着重子数密度的变化; 边的部分我们给出了 $B = 0$ 和 $B = 2 \times 10^{19} \text{ G}$ 同时 $G_V = 0, G_V = 0.8G_S$ 情况下s夸克的组分夸克质量随着重子数的变化 ^[37]	114
5-3	奇异夸克物质uds夸克真空组分夸克质量随着磁场强度变化 ^[37]	115
5-4	奇异夸克物质里 $G_V = 0$ 和 $G_V = 0.8G_S$ 情况下uds夸克的化学势随着磁场的变化, 重子数密度固定在 $10\rho_0$ ^[37]	116
5-5	不同参数下横向压强随着能量密度的变化 ^[37]	117



5-6	不同参数下纵向压强随着能量密度的变化 ^[37]	118
5-7	在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化 ^[37]	119
5-8	NJL模型下横向压强情况声速的平方随着能量密度的变化 ^[37]	120
5-9	在不同参数下使用横向和纵向压强来计算磁星的质量半径关系 ^[37]	121
5-10	在不同参数下奇异夸克物质的每核子能量和相应的压强随着重子数密度的变化 ^[37]	122

致 谢

五年光阴匆匆，白驹过隙、戎马倥偬——青春与热情、懵懂与迷惘、坚毅与韧性、自信与激昂，都谱进这时光曲中。朝晖夕阴，筚路蓝缕，踽踽独行，心怀赤诚；层峦耸翠，俊采星驰，言传身教，余受益匪浅。博士期间的所见所闻、所学所悟，让我明确了前进的方向，也懂得了许多为人处世的道理。感谢我的导师陈列文教授五年多来孜孜不倦的教诲，您以身作则，在科研道路日夜兼程，从未间断，每次学生们在您办公室门口走过，映入眼底的都是您专心致志、伏案提笔的样子；您对学生无论在科研还是在生活都关怀备至，在陈老师的麾下，学到的不仅是先进的知识、严谨的治学、细致的剖析、灵活的变通，更能学到对科学的虔诚、对旁人的友爱、对生活的积极向上——感谢陈老师给予我向您学习的机会，我将受益终身！感谢黄梅老师，您对我的悉心教导，让我拨开了挡在前路的迷雾。感谢您的无私帮助与关怀，我铭记在心！！感谢王欣老师一直以来的照顾，您对我亦师亦友：您的时常点拨，让我在学习还是生活上，都保持了积极乐观的态度，感谢王老师的鼓励与关照，学生永不忘！感谢赵玉民老师、孙扬老师、刘江来老师、倪凯旋老师、杨海军老师、王斌老师、符长波老师、顾佩洪老师、邢向军老师、董兵老师、刘当波老师、孙弘老师、马红儒老师、戴德昌老师、刘湘老师、何小刚老师、张涛老师、贺刚老师、童伟莲老师、薛颖老师、张洋老师一直以来的关心和帮助。感谢杨招、朱之乾、任博、金华、巢静宜、李小华、魏月环、陈骁、陈曦、曾敏、黄健、韩志浩、孙启超、蔡宝军、张振、郭刚、祝林、李高嵩、蒲波宇、孙开佳、郑皓、高飞、顾文强、谢鹏伟、李冠楠、徐少锋、王睿、周颖、李冰、陈融、徐栋、鲁文斌、王韩奎、吴新义、王旭明、陈芳祁、徐晓冬、况小梅、傅冠健、赵勇、邹德成、肖翔、肖梦姣、林箐、龚昊伟、胡捷、杨俊、沈冬屹、郝永亮、温超、余兴、刘珩睿、戴仲易、李文君、姚小良、仰志斌、张腾鹏、张卓月、韩金、李明华、李丹凝、秦斌、冯宇、万露萍、周也铃、李林、吴小刚、代建平、徐虢、薛超、袁鑫、伊晓龙、孙岩斌、禹君、张禛龙、张影一直以来的交流与照顾。

最后感谢我的父亲初曰邦、母亲王勤，你们是我的港湾，我永远爱你们！

初鹏程

2014年9月

于上海交通大学

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] **Peng-Cheng Chu and Lie-Wen Chen**, “Quark matter symmetry energy and quark stars”, The Astrophysical Journal 780:135 (2014).
- [2] **Jingyi Chao, Pengcheng Chu and Mei Huang**, “Inverse magnetic catalysis induced by sphalerons”, Physical Review D 88, 0540099 (2013).
- [3] **Peng-Cheng Chu, Lie-Wen Chen and Xin Wang**, “Quark stars in strong magnetic fields”, Physical Review D, 90, 063013 (2014).

已投稿和正在准备的学术论文:

- [4] **Peng-Cheng Chu, Xin Wang, Lie-Wen Chen and Mei Huang**, “Quark magnetar in three-flavor Nambu - Jona-Lasinio model with vector interaction and magnetized gluon potential”, arXiv:1409.6154, (2014).
- [5] **Peng-Cheng Chu and Lie-Wen Chen**, “Isospin- and density-dependent constituent quark mass and quark stars”.
- [6] **Peng-Cheng Chu and Lie-Wen Chen**, “Proto quark stars within confined isospin-density-dependent quark model”.
- [7] **Peng-Cheng Chu and Lie-Wen Chen**, “Quark matter symmetry energy within PQCD”.
- [8] **Peng-Cheng Chu and Lie-Wen Chen**, “Chiral phase transition within SU(3) PNJL model under strong magnetic fields”.