

申请上海交通大学硕士学位论文

CKM 矩阵新的参数化方法和 B 介子衰变的研究

论文作者 徐 栋

学 号 1120729014

指导教师 何小刚 教授

专 业 物理学

答辩日期 2014 年 12 月 27 日

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Master
in Physics

Studies on new method to parameterize CKM matrix and B meson decays

Dong Xu

Supervisor

Prof. Xiao-Gang He

Department of Physics and Astronomy
Shanghai Jiao Tong University
Shanghai, P.R.China

December. 27th, 2014

上海交通大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日 期：_____年 ____月 ____日

上海交通大学 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名： _____

指导教师签名： _____

日 期： _____年 ____月 ____日

日 期： _____年 ____月 ____日

CKM 矩阵新的参数化方法和 B 介子衰变的研究

摘 要

粒子物理的标准模型是描述夸克轻子等基本粒子的基础理论，实验数据也证明了标准模型的巨大成功。本文在粒子物理标准模型的框架下研究了夸克味道混合矩阵的参数化的问题，以及从 $SU(3)$ 夸克味道对称性角度研究了 B^\pm 带电三体非轻衰变的问题。

在夸克味道混合矩阵的参数化研究中，在介绍了之前研究中选取三个夸克混合角和一个 CP 破坏相角作为参数的九种参数化方法之后，指出了在这九种方法中，参数值具有参数化依赖的问题。在本文新建立的参数化方法中，选取三个 CKM 矩阵元模值和么正三角形三个内角 α , β , 和 γ 之一作为参数的方法，解决了参数值的参数化依赖问题。并证明了新建立的 12 种参数化方法的等价性。最后给出了对应新的 12 种参数化方法的类似 Wolfenstein 参数化的近似展开的方法。

在 B^\pm 介子带电三体衰变研究中，从 $SU(3)$ 味对称性出发系统地构建了 B 介子衰变到 $\pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$, $K^+K^+K^-$ 末态的四个衰变的振幅，同时考虑了由于夸克质量之差导致的对称性的破坏以及对末态粒子场求导数导致的动量依赖的振幅贡献。通过数值计算分析发现，只有考虑了较大的对称性破坏效应才可以很好的解释实验数据。最后把从 $SU(3)$ 味对称性的分析方法用到 B^+ , B_d^0 , B_s^0 的衰变中。在考虑全对称的衰变振幅的情况下，找出了不同的衰变道之间衰变振幅的一些线性的关系，并且在分别考虑了 $SU(3)$ 和同位旋对称破坏时，找出了不受对称性破坏影响的衰变振幅之间的线性关系。

关键词： CKM 矩阵参数化 夸克味道混合 味对称性 CP 破坏

Studies on new method to parameterize CKM matrix and B meson decays

ABSTRACT

The Standard Model is a fundamental theory describing the elementary particles such as quarks and leptons, whose great success is confirmed by the experimental data. We studied the new ways to parameterize the CKM matrix, which describes the quark flavor mixing. And we also studied the charged three-body decays of B^\pm meson in terms of quark $SU(3)$ flavor symmetry.

In the study of new parametrization of CKM matrix, after introducing nine kinds of equivalent parametrization with three quark flavor mixing angles and one CP phase as the independent parameters, we pointed out that the values of parameters would depend on the parametrization ways. We constructed new methods to parameterize the CKM matrix using three absolute values of CKM matrix elements and one of α , β , or γ angles defined by the unitary property of CKM matrix, which resolved the problem that the values of parametrization will depend on the chosen parametrization. Consequently, we demonstrated that these 12 kinds of new ways of parametrization are equivalent between each other. Then, we showed the way how to develop the Wolfenstein-like expression of these 12 new parametrizations.

In the study of charged three-body B^\pm meson decays, under the $SU(3)$ flavor symmetry, we constructed the decay amplitudes systematically for the decay modes: $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$, $K^+K^+K^-$. Meanwhile, we also considered the momentum dependent part of the decay amplitudes resulted from derivatives of independent terms and the flavor symmetry breaking effects resulted from mass difference between different quarks. After carrying out the numerical analysis, we found that it was necessary to take the large flavor symmetry breaking effects into consideration in order to explain the corresponding experimental data well. At last, we extend the

analysis from $SU(3)$ flavor symmetry to the decays of B^+ , B_d^0 , B_s^0 mesons, and found the linear relations between different decay modes in terms of their fully-symmetric decay amplitudes. We also identified the linear relations that still hold when the flavor $SU(3)$ and isospin symmetry breaking effects were taken into account.

KEY WORDS: Quark Flavor Mixing, CP-Violation, Flavor Symmetry, B^\pm Decay

目 录

摘要	i
ABSTRACT	iii
目录	v
插图索引	ix
表格索引	ix
第一章 绪论	1
1.1 粒子物理标准模型	1
1.1.1 标准模型的拉氏量	1
第二章 参数化 CKM 矩阵的新方法	7
2.1 CKM 矩阵的不同参数化方式	7
2.1.1 夸克味混合角和 CP 相角的 CKM 矩阵的参数化选择依赖	11
2.2 α, β, γ 作为相角参数化 CKM 矩阵的新方法	13
2.2.1 α, β, γ 参数化方式	13
2.2.2 α, β, γ 作为相角的不同参数化方式之间的等价关系	19
2.2.3 类似 Wolfenstein 参数化的近似展开	20
2.3 本章小结	22
第三章 从 $SU(3)$ 味对称性的角度分析 B 介子的三体衰变	23
3.1 B 介子衰变的背景介绍	23
3.2 从 $SU(3)$ 味对称性来分析 B_{\pm} 三体衰变到带电的赝标介子	24
3.2.1 在 $SU(3)$ 对称性下不变且不依赖于末态粒子动量的衰变振幅	25

3.2.2	夸克质量带来的 $SU(3)$ 对称性破坏的振幅贡献	30
3.2.3	对末态粒子最低阶的动量依赖的振幅贡献	32
3.2.4	数值计算	36
3.3	$B \rightarrow PPP$ 衰变振幅的 $SU(3)$ 和同位旋对称性破坏效应	42
3.3.1	$B \rightarrow PPP$ 衰变振幅的线性关系	42
3.3.2	$SU(3)$ 和同位旋对称性破坏效应	45
3.4	本章小结	48
	全文总结	51
	附录 A α, β, γ 参数化方法的表示矩阵	53
	附录 B $SU(3)$ 破坏项振幅	55
	附录 C 衰变振幅的动量依赖项修正	57
	参考文献	61
	致谢	65
	攻读学位期间发表的学术论文目录	67

表格索引

3-1 $SU(3)$ 味对称性下的理论预期值和实验上关于 $A_{CP}(\Delta S = 0)/A_{CP}(\Delta S = 1)$ 的数据的比较	29
3-2 包含 $SU(3)$ 破坏效应的拟合结果与实验数据的对比	40

插图索引

2-1 么正三角形	14
3-1 B 介子衰变有效哈密顿量中算符对应的费曼图	26

第一章 绪论

1.1 粒子物理标准模型

粒子物理学的标准模型是由规范群 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 来描述的规范理论^[1-4]。其中 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 是描述弱电统一理论的规范群, $SU(3)_C$ 是描述强相互作用(量子色动力学)的规范群。在二十世纪六十年代,弱相互作用是由费米提出的有效理论来描述的,而费米的有效理论在较高能标时不再成立。也是在六十年代,萨拉姆(Abdus Salam),格拉肖(Sheldon Glashow),温伯格(Steven Weinberg)提出了一个将电磁相互作用和弱相互作用统一起来的理论,也即电弱统一理论。这一理论做出了预言:存在弱中性流并计算了弱相互作用中的波色子的质量。1983年实验上发现了中性和带电的传播弱相互作用的波色子,并且理论计算的波色子质量也被实验数据非常精确地证实了。特霍夫特(Gerard't Hooft)证明了电弱统一理论是可重整化的。而也是在二十世纪六十年代,盖尔曼(Murray Gell-Mann)和乔治茨威格(George Zweig)分别独立提出了夸克模型,进而发展成为描述强相互作用的量子色动力学(QCD)。

1.1.1 标准模型的拉氏量

标准模型的拉氏量可以分解为:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Yu} + \mathcal{L}_H \quad (1-1)$$

其中, \mathcal{L}_{YM} 表示 Yang-Mills 拉氏量, $\mathcal{L}_{Fermion}$ 表示费米子场的拉氏量, \mathcal{L}_{Yu} 表示 Yukawa 作用项, \mathcal{L}_H 表示 Higgs 场的拉氏量。

1.1.1.1 Yang-Mills 拉氏量

为了使得标准模型拉氏量 \mathcal{L} 在标准模型的局域规范群 $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ 变换下保持不变,需要对每一个规范群引入相应的规范场。 \mathcal{L}_{YM} 是描述这些规范场的部分:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{Iw} + \mathcal{L}_Y$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (1-2)$$

其中，这些规范场写为：

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \\ W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g' \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (1-3)$$

其中， $G_{\mu\nu}^a$ 是对应于 $SU(3)$ 规范变换的规范场 G 的场张量（胶子场的场张量）， $W_{\mu\nu}^a$ 是对应于 $SU(2)$ 规范变换的规范场 W 的场张量， $B_{\mu\nu}$ 是对应于 $U(1)$ 规范变换的规范场 B 的场张量。

1.1.1.2 费米子场的拉氏量

对于标准模型中的费米子，将它们在 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 群下的表示写出：

$$Q_i \sim (3, 2, \frac{1}{6}), U_i \sim (\bar{3}, 1, \frac{2}{3}), D_i \sim (\bar{3}, 1, -\frac{1}{3}), L_i \sim (1, 2, -\frac{1}{2}), E_i \sim (1, 1, -1) \quad (1-4)$$

其中， Q_i 是左手的夸克场， U_i 和 D_i 是右手的夸克场， L_i 是左手轻子二重态， E_i 是右手轻子。下标 i 是味道指标。

对于左手夸克场 Q_i ：

$$\mathcal{L}_{Fermion}(Q_i) = i\bar{Q}_i \gamma^\mu D_\mu Q_i, D_\mu = (\partial_\mu + \frac{i}{2} g_s G_\mu^a \lambda^a + \frac{i}{2} g W_\mu^a \tau^a + \frac{i}{6} g' B_\mu) \quad (1-5)$$

对于右手夸克场 U_i 和 D_i ：

$$\mathcal{L}_{Fermion}(U_i) = i\bar{U}_i \gamma^\mu D_\mu U_i, D_\mu = (\partial_\mu + \frac{2i}{3} g' B_\mu) \quad (1-6)$$

$$\mathcal{L}_{Fermion}(D_i) = i\bar{D}_i \gamma^\mu D_\mu D_i, D_\mu = (\partial_\mu - \frac{i}{3} g' B_\mu) \quad (1-7)$$

对于左手轻子二重态 L_i ：

$$\mathcal{L}_{Fermion}(L_i) = i\bar{L}_i \gamma^\mu D_\mu L_i, D_\mu = (\partial_\mu + \frac{i}{2} g W_\mu^a \tau^a - \frac{i}{2} g' B_\mu) \quad (1-8)$$

对于右手轻子 E_i :

$$\mathcal{L}_{Fermion}(E_i) = i\bar{E}_i\gamma^\mu D_\mu E_i, D_\mu = (\partial_\mu - ig'B_\mu) \quad (1-9)$$

在上述的拉氏量中 g_s, g, g' 是三种规范相互作用对应的耦合常数。 λ^a 是 Gellmann 矩阵:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

τ^a 是泡利矩阵:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.1.3 Higgs 场拉氏量^[5]

Higgs 场的拉氏量:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \\ D_\mu\phi &= (\partial_\mu - ig\frac{\sigma^a}{2}A_\mu^a - ig'\frac{B_\mu}{2})\phi \\ V(\phi) &= \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi \end{aligned} \quad (1-10)$$

其中 $\frac{\sigma^a}{2}$ 是对应于 $SU(2)$ 规范群的生成元, $\frac{1}{2}$ 是对应于 $U(1)$ 规范群的生成元。

将原来的场 A_μ^a 做变化:

$$\begin{aligned} A_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^3 \pm iA_\mu^2) \\ A_\mu^3 &= A_\mu^3 \end{aligned} \quad (1-11)$$

当 Higgs 场发生自发破缺^[6]:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

展开 $(D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi$, 可以发现规范场的二次方项为:

$$\frac{1}{4}\eta^2(gA_\mu^3 - g'B_\mu)(gA^{3\mu} - g'B^\mu) + \frac{1}{2}g^2\eta^2 A_\mu^+ A^{-\mu} \quad (1-13)$$

引入新的符号来方便标记,

$$\bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad g/\bar{g} = \cos \theta_W, \quad g'/\bar{g} = \sin \theta_W \quad (1-14)$$

其中 θ_W 是温伯格角。同时改变符号: $W_\mu^\pm = A_\mu^\pm$, 然后定义:

$$Z_\mu^0 \equiv A_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W \quad (1-15)$$

于是可以从规范场的平方项式子中得到 Z, W 玻色子的质量:

$$m_Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{g}\eta, \quad m_W = \frac{1}{\sqrt{2}}g\eta \quad (1-16)$$

所以从上式可以看出 W 和 Z 玻色子的质量之比可以用温伯格角来表示:

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W \quad (1-17)$$

相反, 规范场 A_μ^3 和 B_μ 的另一个正交的组合:

$$A_\mu \equiv A_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W \quad (1-18)$$

仍然保持无质量, 这个无质量的场就是光子场。

1.1.1.4 Yukawa 作用项

如果按照 $-m(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$ 这种方式引入 Dirac 质量项, 由于 Ψ_L 是 $SU(2)$ 二重态, Ψ_R 是 $SU(2)$ 单态, 所以这样引入的质量项在规范群 $SU(2)$ 下不能保持不变。所以要寻找别的方法来产生费米子的质量。

为了保持 $SU(2)$ 规范不变性, 可以考虑引入一个洛伦兹不变的标量, 同时也是一个 $SU(2)$ 的二重态, 记为:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1-19)$$

于是 Yukawa 作用项可以写为:

$$-\mathcal{L} = Y_{ij}^e \bar{L}_i \phi \bar{e}_j + Y_{ij}^d \bar{Q}_i \phi \bar{d}_j + Y_{ij}^u \bar{Q}_i \tilde{\phi} \bar{u}_j + h.c. \quad (1-20)$$

当对称性发生自发破缺后,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

这样在 Yukawa 作用项中就可以得到费米子的质量项, 分为夸克和轻子两个部分, 以夸克部分为例子:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= (M_d)_{ij} \bar{Q}_i \bar{d}_j + (M_u)_{ij} \bar{Q}_i \bar{u}_j + h.c. \\ M_d &= \frac{\nu}{\sqrt{2}} Y^d, \quad M_u = \frac{\nu}{\sqrt{2}} Y^u \end{aligned} \quad (1-22)$$

味道空间的质量矩阵不是对角的, 但是可以通过左右乘上适当的幺正矩阵来使其对角化:

$$U_{qL} M_q U_{qR}^\dagger = M_q^{diag}, \quad q = u, d \quad (1-23)$$

这样, 可以得到夸克和 W^\pm 的相互作用项:

$$-\mathcal{L}_{W^\pm} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{Q}_i \gamma^\mu (U_{uL} U_{dL}^\dagger)_{ij} d_{Lj} W_\mu^\dagger + h.c. \quad (1-24)$$

在标准模型中, 用来描述夸克混合矩阵为 CKM 矩阵:

$$V_{CKM} = U_{uL} U_{dL}^\dagger = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1-25)$$

CKM 矩阵是幺正矩阵。对于三代费米子的情形, CKM 矩阵是一个可以选择三个转动角和一个相角来表示的幺正矩阵。

在粒子物理标准模型的框架下, 本文将研究 CKM 矩阵的新的参数化方法以及从 $SU(3)$ 夸克味道对称性方面研究了 B 介子的三体非轻衰变。

第二章 参数化 CKM 矩阵的新方法

因为夸克的味道本征态和弱相互作用的本征态不一致，所以在研究夸克的味道时，需要引入夸克的味道混合矩阵（CKM 矩阵）^[7, 8]。三代夸克之间的混合角以及 CP 破坏的相角都会是参数化 CKM 矩阵的重要参数。当然，选择一种方式对 CKM 矩阵进行参数化并不会对物理问题有影响，但是选择合适的 CKM 矩阵的参数化方式会给物理问题的研究带来方便。另外一些物理量的精确测量也使得其中一些参数化方式在研究中更加有优势。所以研究 CKM 矩阵的参数化方式在夸克味道的研究中是很重要的。

在本章的第一节中，介绍了选择夸克三个混合角以及一个 CP 破坏相角的九种等价的参数化方式，同时举例说明了夸克味道混合角和 CP 破坏相角的数值跟 CKM 矩阵的参数化方式选择有关。在第二节中，新的参数化 CKM 矩阵的方式会被介绍，即： α, β, γ 作为相角的参数化方式，同时也会给出它们之间等价性的证明。因为 α, β, γ 是实验中的可观测量，所以混合角和 CP 破坏相角的参数化选择依赖问题就不存在了。然后给出了类似 Wolfenstein 参数化的近似展开。在最后给出了本章的总结。

2.1 CKM 矩阵的不同参数化方式

在标准模型中，夸克味道之间的混合是通过一个 3×3 的么正矩阵（CKM 矩阵）实现的。通过 CKM 矩阵，夸克的带电弱流可以表示为：

$$\overline{\begin{pmatrix} u, & c, & t \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (2-1)$$

其中， u, c, t, d, s, b 是夸克的味道本征态， L 表示夸克是左手场， V_{ij} 是 CKM 矩阵的矩阵元， V_{ij} 通常是复数，它的绝对值 $|V_{ij}|$ 是可观测量，但是 V_{ij} 的相角并不对应物理客观测量。可以重新定义夸克的相位改变 V_{ij} 的相角，例如，改变 u 夸克的相位 ($u \rightarrow ue^{i\alpha}$) 可以在使得夸克质量项保持不变的情况下改变第一行 CKM 矩阵元的相角 ($V_{ij} \rightarrow V_{ij}e^{-i\alpha}$)。只有当同时以相同的方式改变夸克场的相

位时, 才不会改变 V_{ij} 的相角。于是 CKM 矩阵有五个自由度可以改变 V_{ij} 相角。通常, CKM 矩阵是个么正矩阵, 需要九个参数来描述, 其中五个参数可以用重新定义夸克场相角的方式吸收到夸克场中, 所以只剩下了 4 个自由参数。通常可以选择三代夸克之间的混合角和一个 CP 破坏的相角来参数化 CKM 矩阵。

如果假设夸克味道混合矩阵是实的正交矩阵, 可以将 CKM 矩阵写成描述在 $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ 平面内转动的三个矩阵 R_{12}, R_{23} 和 R_{31} 的乘积。

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\theta) &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R_{23}(\sigma) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\sigma & s_\sigma \\ 0 & -s_\sigma & c_\sigma \end{pmatrix} \\
 R_{31}(\tau) &= \begin{pmatrix} c_\tau & 0 & s_\tau \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\tau & 0 & c_\tau \end{pmatrix}. \tag{2-2}
 \end{aligned}$$

其中 $s_\theta \equiv \sin \theta, c_\theta \equiv \cos \theta$, 等等。上面的三个矩阵彼此之间不是相互对易的。所以共有 12 种不同的方法来排列着三个相乘的矩阵, 于是可以得到一般的正交矩阵的表示式。12 种不同形式的正交矩阵 R 为^[9]:

- (1) $R = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta')$
- (2) $R = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta')$
- (3) $R = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma')$
- (4) $R = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma')$
- (5) $R = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta) R_{31}(\tau')$
- (6) $R = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau')$
- (7) $R = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau)$
- (8) $R = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma)$
- (9) $R = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta) R_{31}(\tau)$
- (10) $R = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta)$

$$(11) \quad R = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma)$$

$$(12) \quad R = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta) \quad (2-3)$$

需要注意的地方是乘积 $R_{ij}R_{kl}R_{ij}$ 和 $R_{ij}R_{mn}R_{ij}$, (其中 $ij \neq kl \neq mn$) 是有联系的, 不独立的。它们对应的是同一种形式的正交矩阵 R 。通过下面的关系式可以清楚的看到 12 种乘积中只有 9 种是相互独立的。

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta') &= R_{12}(\theta + \pi/2) R_{23}(\sigma = \tau) R_{12}(\theta' - \pi/2) \\ R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma') &= R_{23}(\sigma - \pi/2) R_{12}(\theta = \tau) R_{23}(\sigma' + \pi/2) \\ R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau') &= R_{31}(\tau + \pi/2) R_{12}(\theta = \sigma) R_{31}(\tau' - \pi/2) \end{aligned} \quad (2-4)$$

所以可以选择式 (2-3) 中的 (1), (3), (5), (7) - (12) 作为 9 种相互独立的参数化形式。

下面要做的是将 CP 破坏相角加进来, 记为: φ 。因为 CKM 矩阵是么正矩阵, 可以通过如下的几种方式加入 CP 破坏的相角, 以 R_{12} 作为例子:

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta e^{+i\varphi} & 0 \\ -s_\theta e^{-i\varphi} & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

或

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

或

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta e^{+i\varphi} & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是可以通过用两个实数的矩阵和一个复数的矩阵相乘的积来构造 CKM 矩阵。可以利用重新定义夸克场的方法使得 CP 破坏相角 φ 只会出现在 CKM 矩阵的一个 2×2 的子阵里面, 同时可以做到使得其他五个 CKM 矩阵元是实数。于是, 选择三代夸克的三个混合角和一个 CP 破坏相角的九种参数化形式表示为^[9]:

$$PI : V = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{12}^{-1}(\theta') \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_{\theta'} c_{\theta'} s_\sigma^2 c_\sigma \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} s_\theta s_{\theta'} c_\sigma + c_\theta c_{\theta'} e^{-i\varphi} & s_\theta c_{\theta'} c_\sigma - c_\theta s_{\theta'} e^{-i\varphi} & s_\theta s_\sigma \\ c_\theta s_{\theta'} c_\sigma - s_\theta c_{\theta'} e^{-i\varphi} & c_\theta c_{\theta'} c_\sigma + s_\theta s_{\theta'} e^{-i\varphi} & c_\theta s_\sigma \\ -s_{\theta'} s_\sigma & -c_{\theta'} s_\sigma & c_\sigma \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{ub}/V_{cb}| \\ \tan \theta' = |V_{td}/V_{ts}| \\ \cos \sigma = |V_{tb}| \end{array}$$

$$P2 : V = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta, \varphi) R_{23}^{-1}(\sigma') \quad \mathcal{J} = s_\theta^2 c_\theta s_\sigma c_\sigma s_{\sigma'} c_{\sigma'} \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta c_{\sigma'} & -s_\theta s_{\sigma'} \\ -s_\theta c_\sigma & c_\theta c_\sigma c_{\sigma'} + s_\theta s_{\sigma'} e^{-i\varphi} & -c_\theta c_\sigma s_{\sigma'} + s_\theta c_{\sigma'} e^{-i\varphi} \\ s_\theta s_\sigma & -c_\theta s_\sigma c_{\sigma'} + c_\sigma s_{\sigma'} e^{-i\varphi} & c_\theta s_\sigma s_{\sigma'} + c_\sigma c_{\sigma'} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cos \theta = |V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{td}/V_{cd}| \\ \tan \sigma' = |V_{ub}/V_{us}| \end{array}$$

$$P3 : V = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau, \varphi) R_{12}(\theta) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau^2 \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta c_\tau & s_\tau \\ -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & s_\sigma c_\tau \\ -c_\theta c_\sigma s_\tau + s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{us}/V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{cb}/V_{tb}| \\ \sin \tau = |V_{ub}| \end{array}$$

$$P4 : V = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau, \varphi) R_{23}^{-1}(\sigma) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau^2 \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & c_\theta s_\sigma s_\tau + s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma s_\tau - s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_\tau & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\tau & s_\sigma c_\tau & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{cd}/V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{ts}/V_{tb}| \\ \sin \tau = |V_{td}| \end{array}$$

$$P5 : V = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta, \varphi) R_{31}^{-1}(\tau') \quad \mathcal{J} = s_\theta^2 c_\theta s_\tau c_\tau s_{\tau'} c_{\tau'} \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau c_{\tau'} + s_\tau s_{\tau'} e^{-i\varphi} & s_\theta c_\tau & -c_\theta c_\tau s_{\tau'} + s_\tau c_{\tau'} e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_{\tau'} & c_\theta & s_\theta s_{\tau'} \\ -c_\theta s_\tau c_{\tau'} + c_\tau s_{\tau'} e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\tau & c_\theta s_\tau s_{\tau'} + c_\tau c_{\tau'} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cos \theta = |V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{ts}/V_{us}| \\ \tan \tau' = |V_{cb}/V_{cd}| \end{array}$$

$$P6 : V = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{31}(\tau) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma^2 s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & s_\theta c_\sigma & s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\theta s_\tau e^{-i\varphi} \\ -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma & c_\theta s_\sigma c_\tau - s_\theta s_\tau e^{-i\varphi} \\ -c_\sigma s_\tau & -s_\sigma & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{us}/V_{cs}| \\ \sin \sigma = |V_{ts}| \\ \tan \tau = |V_{td}/V_{tb}| \end{array}$$

$$P7: V = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta, \varphi) R_{31}^{-1}(\tau) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta^2 s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta & -c_\theta s_\tau \\ -s_\theta c_\sigma c_\tau + s_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma & s_\theta c_\sigma s_\tau + s_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \\ s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sin \theta = |V_{us}| \\ \tan \sigma = |V_{ts}/V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{ub}/V_{ud}| \end{array}$$

$$P8: V = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta, \varphi) R_{23}(\sigma) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta^2 s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta c_\sigma c_\tau - s_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} \\ -s_\theta & c_\theta c_\sigma & c_\theta s_\sigma \\ -c_\theta s_\tau & -s_\theta c_\sigma s_\tau - s_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sin \theta = |V_{cd}| \\ \tan \sigma = |V_{cb}/V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{td}/V_{ud}| \end{array}$$

$$P9: V = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{12}^{-1}(\theta) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma^2 s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & c_\sigma s_\tau \\ s_\theta c_\sigma & c_\theta c_\sigma & s_\sigma \\ -s_\theta s_\sigma c_\tau - c_\theta s_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma c_\tau + s_\theta s_\tau e^{-i\varphi} & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{cd}/V_{cs}| \\ \sin \sigma = |V_{cb}| \\ \tan \tau = |V_{ub}/V_{tb}| \end{array}$$

这九种参数化从数学上来说是完全等价的。其中，可以标志 CP 破坏的并且具有在相位变化下保持不变的量，写为^[10, 11]:

$$\text{Im} (V_{il} V_{jm} V_{im}^* V_{jl}^*) = \mathcal{J} \sum_{k,n=1}^3 (\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn}) \quad (2-5)$$

2.1.1 夸克味混合角和 CP 相角的 CKM 矩阵的参数化选择依赖 ~

在前面一节中我们介绍了，选择三代夸克之间的三个混合角和一个 CP 破坏相角来参数化 CKM 矩阵的九种方法，虽然这九种参数化的方法是等价的，但是在不同的参数化方式中混合角和标志 CP 破坏的相角大小不同，也即，混合角和 CP 破坏相角有参数化选择的依赖问题。下面会举例说明这一问题。在

上一节介绍的九种参数化中, $P2$ 对应于 Kobayashi-maskawa 参数化方法 (KM 参数化), $P3$ 对应于标准参数化 (PDG 参数化)^[12]。这两组之间的等价性可以通过重新定义夸克场的相位看出来: $c \rightarrow ce^{-i\varphi}$, $t \rightarrow te^{-i\varphi}$ 和 $b \rightarrow be^{-i\varphi}$ 。

首先介绍 CKM 矩阵的标准化参数方法 (PDG 参数化), 写为:

$$V_{PDG} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{PDG}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{PDG}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{PDG}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{PDG}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{PDG}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

其中 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ 和 $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, θ_{ij} 是味道空间的转动角, δ_{PDG} 是 CP 破坏的相角。

关于 CKM 矩阵的标准化参数方法已经有了很多的实验数据, 三个混合角和 CP 破坏的相角数值如下^[13]:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 13.015^\circ \pm 0.059^\circ, & \theta_{23} &= 2.376^\circ \pm 0.046^\circ, & \theta_{13} &= 0.207^\circ \pm 0.008^\circ, \\ \delta_{PDG} &= 69.7^\circ \pm 3.1^\circ \end{aligned} \quad (2-7)$$

于是可以得到 CKM 矩阵的矩阵元的绝对值大小:

$$\begin{pmatrix} 0.9743 \pm 0.0002 & 0.2252 \pm 0.0010 & 0.0036 \pm 0.0001 \\ 0.2251 \pm 0.0010 & 0.9735 \pm 0.0002 & 0.0415 \pm 0.0008 \\ 0.0088 \pm 0.0003 & 0.0407 \pm 0.0008 & 0.99913 \pm 0.00003 \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

在这种参数化方法中, 可以把三个角度 θ_{12} , θ_{23} 和 θ_{13} 看做味道空间的转动角, 但是这三个角度和 CP 破坏的相角 δ_{PDG} 都不是实验上可以观测的物理量。在不同的参数化方式中, 三个角度的大小和 CP 破坏的相角的大小都不相同, 下面会用另外一种参数化方法作为对比来说明这一点。

Kobayashi-Maskawa 参数化方法^[8] 的参数矩阵为:

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3 \\ s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta_{KM}} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta_{KM}} \\ s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta_{KM}} & c_1s_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta_{KM}} \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

根据相关的实验数据, 可以得到:

$$\theta_1 = 13.016^\circ \pm 0.003^\circ, \quad \theta_2 = 2.229^\circ \pm 0.066^\circ, \quad \theta_3 = 0.921^\circ \pm 0.036^\circ$$

另外, CP 破坏的相角大小的中心值为: $\delta_{KM} = 88.2^\circ$.

从 CKM 的标准化参数方法和 KM 参数化方法中, 可以清楚的看到两种方法下, 夸克味道的混合角和 CP 破坏的相角是不一样的, 夸克的混合角和 CP 破坏相角会因为所用的参数化方法不同而不同。在下面的章节中, 新的参数化方法会被介绍, 在新的参数化方法中可以不会再有夸克混合角和 CP 相角对参数化选择的依赖问题。

2.2 α, β, γ 作为相角参数化 CKM 矩阵的新方法

由上一节的叙述我们可以看到, 夸克混合角和标志 CP 破坏的相角的大小确实和所选择的参数化形式有关。这一节要介绍的新的 CKM 矩阵的参数化方法可以解决这个问题。由于夸克味道混合矩阵是么正矩阵, 可以在复平面构造一个三角形, 而这个三角形的三个内角均为实验可观测量, 这三个内角中的一个可以被选择作为 CP 破坏的相角, 加上选择三个实数的 CKM 矩阵元对 CKM 矩阵进行参数化, 这样一来就可以避免参数的数值会有 CKM 矩阵参数化方式选择的依赖问题。然后会给出类似 Wolfenstein 参数化的近似展开。在这三个相角 α, β, γ 中, β 是实验中测量最准确的角。所以, 将 β 角作为 CP 破坏的相角来参数化 CKM 矩阵是最好的选择。

2.2.1 α, β, γ 参数化方式

CKM 矩阵的矩阵元 V_{ij} 通常来讲是复数, 但是它的绝对值 $|V_{ij}|$ 是实验可观测量, 可以被选来作为参数化 CKM 的参数。关于 CP 破坏的信息并不是只存在于一个 CKM 矩阵元 V_{ij} 的相位中, 而是其中一些 V_{ij} 的组合才能标志 CP 破坏的大小。例如, $\mathcal{J} \sum_{n,m=1}^3 \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} = \text{Im}(V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*)$, 它的大小不等于 0。或者, 在知道 V_{ij} 的相位时, 可以构造不为 0 的量: $J \sum_{n,m=1}^3 \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} = \text{Im}(V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*)$ 来标志 CP 破坏的信息。在实验中的一些可观测量的么正三角形中角度 α, β, γ , 三个角度可以通过如下的么正条件来定义:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (2-10)$$

上述的么正条件在复平面中定义了一个么正三角形, 如图所示。CKM 矩阵的么正性 $\sum_i V_{ij}V_{kj}^* = 0$ 和 $\sum_i V_{ji}V_{jk}^* = 0$ 定义了 6 个独立的三角形, 在这 6 个独立的三角形中, 实验中测量最好的是 ($i = d, k = b$) 对应的那个三角形, 这个实

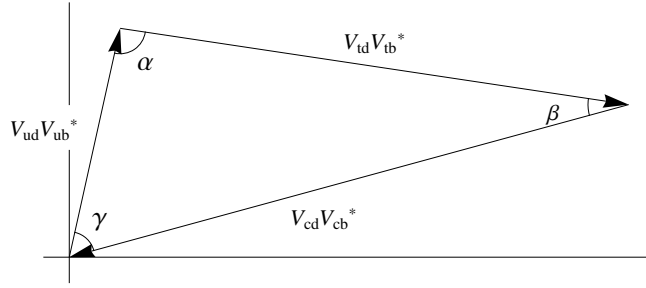


图 2-1 么正三角形。

Figure 2-1 The unitarity triangle.

验中测量最好的三角形的三个内角均被独立测量过。所以这一章要介绍的新的 CKM 矩阵的参数化方法就用这个三角形中的角作为参数来实现参数化。

图 (2.2.1) 中所示的三角形中的三个内角定义为：

$$\alpha = \arg \left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right), \quad \beta = \arg \left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right), \quad \gamma = \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right) \quad (2-11)$$

相角 α, β, γ 标志着 CP 破坏的信息，所以图 (2.2.1) 中所示的三角形的面积不能为零，同时也意味着， α, β, γ 三个角不能等于零。而这三个角在实验上是可观测量^[14]，它们的实验观测值为： $\alpha = (89.0^{+4.4}_{-4.2})^\circ$ ， $\beta = (21.1 \pm 0.9)^\circ$ 和 $\gamma = (73^{+22}_{-25})^\circ$ 。实验上测得的这三个角度的数值和 CKM 矩阵的标准参数化方法 (2-6) 中用其实验值计算所得的数值： $\alpha = 88.14^\circ$ ， $\beta = 22.20^\circ$ 和 $\gamma = 69.67^\circ$ 基本相符。标准模型要求 CKM 矩阵是么正矩阵，所以这三个角度的数值相加应该为 180° ，即： $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 。我们从实验测得三个角度可以看到它们相加的结果和标准模型的预言是相符的。

在 α, β, γ 参数化方法中，只需要 α, β, γ 三个角中的一个来标志 CP 破坏的信息，所以这三个角是有相互关系的，在如下定义的参量 J 中可以看出这一点^[15]：

$$J = |V_{td}||V_{tb}^*||V_{ud}||V_{ub}^*|\sin\alpha = |V_{td}||V_{tb}^*||V_{cd}||V_{cb}^*|\sin\beta = |V_{cd}||V_{cb}^*||V_{ud}||V_{ub}^*|\sin\gamma \quad (2-12)$$

参量 J 的大小是么正三角形面积的两倍。

同时需要注意的是， α 的数值和 δ_{KM} 非常接近，而 γ 的数值和 δ_{PDG} 非常

接近。这是因为它们之间有关系：

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sin \delta_{KM}}{x_\alpha - \cos \delta_{KM}}\right), \quad x_\alpha = \frac{c_1 s_2 s_3}{c_2 c_3} = \frac{|V_{ud}||V_{td}||V_{ub}|}{|V_{cd}||V_{us}|} = 0.0006.$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\sin \delta_{PDG}}{x_\gamma + \cos \delta_{PDG}}\right), \quad x_\gamma = \frac{c_{12} s_{23} s_{13}}{s_{12} c_{23}} = \frac{|V_{ud}||V_{cb}||V_{ub}|}{|V_{tb}||V_{us}|} = 0.0006.$$

$\delta_{KM} + \alpha$ 的数值近似为 π ，而 α 很接近 $\frac{\pi}{2}$ ，所以 $\alpha \approx \delta_{KM}$ 。类似的推理可以清楚看到 $\gamma \approx \delta_{PDG}$ 。

于是，为了使得参数化 CKM 矩阵的时候只使用实验可观测的物理量，可以选择三个矩阵元的绝对值 $|V_{ij}|$ 以及 α, β, γ 三个中的其中一个作为 CP 破坏的相角作为参数来实现。对于选做 CP 破坏相角的 α, β 或者 γ 有着很清楚的几何意义，这种新的方法可以称为 α, β, γ 参数化。下面就来介绍如何实现 CKM 矩阵的这种新的参数化方法。

在 α 参数化方法中，将 α 角作为出现在 CKM 矩阵中的相角，另外再选取三个矩阵元的模值 $|V_{ij}|$ 作为这种方法的参数。由 α 角的定义 (2-11)，可以使得 α 只出现在四个矩阵元 $V_{ud,ub,td,tb}$ 中一个上面，出现相角的这个矩阵元是复数，其他三个矩阵元则是实数，这样的方式有四种情形，如下所示^[6]：

$$\begin{aligned} \alpha_1) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, |V_{td}|, -|V_{tb}|e^{-i\alpha}) \\ \alpha_2) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, -|V_{td}|e^{i\alpha}, |V_{tb}|) \\ \alpha_3) & \cdot (|V_{ud}|, -|V_{ub}|e^{i\alpha}, |V_{td}|, |V_{tb}|) \\ \alpha_4) & \cdot (-|V_{ud}|e^{-i\alpha}, |V_{ub}|, |V_{td}|, |V_{tb}|) \end{aligned} \quad (2-13)$$

对于上面四种情形，可以通过重新定义夸克场的相位来改变矩阵元对应的符号来实现。

将这样建立的 CKM 矩阵的新的参数化形式记为 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 。于是，对于 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ ：

$$V_{CKM}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & -\frac{(|V_{us}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{ud}| + |V_{ub}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha}}{|V_{us}||V_{cd}|} & \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & \frac{|V_{ub}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{td}|}{|V_{us}|} & -|V_{tb}|e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

在 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ 参数化中，可以将 $\alpha, |V_{ud}|, |V_{us}|, |V_{cd}|$ 作为四个独立的参量来实现这种参数化。那么其他的矩阵元可以表示为它们的函数：

$$|V_{td}| = \sqrt{1 - |V_{ud}|^2 - |V_{cd}|^2}, \quad |V_{ub}| = \sqrt{1 - |V_{ud}|^2 - |V_{us}|^2},$$

$$|V_{tb}| = \frac{|V_{td}||V_{ud}||V_{ub}|\cos\alpha}{1-|V_{ud}|^2} \quad (2-15)$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{|V_{td}||V_{ud}||V_{ub}|\cos\alpha}{1-|V_{ud}|^2}\right)^2 - \frac{|V_{cd}|^2(|V_{ub}|^2-1) + |V_{ud}|^2|V_{ub}|^2}{1-|V_{ud}|^2}}.$$

对于 $V_{CKM}^{\alpha_2}$, $V_{CKM}^{\alpha_3}$, $V_{CKM}^{\alpha_4}$ 这三种参数化方式, 可以用同样的方法得到 CKM 矩阵的参数化表达式, 如下所示:

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha}-|V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2-|V_{cb}|^2)|V_{ub}|-|V_{ud}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{us}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{i\alpha} & \frac{|V_{ud}||V_{td}|e^{i\alpha}-|V_{ub}||V_{tb}|}{|V_{us}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\alpha_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{td}|-|V_{tb}||V_{ub}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}|} & -|V_{ub}|e^{i\alpha} \\ |V_{cd}| & \frac{(|V_{tb}|^2-|V_{cd}|^2)|V_{td}|-|V_{ub}||V_{ud}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cd}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\alpha}-|V_{td}||V_{tb}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

$$V_{CKM}^{\alpha_4} = \begin{pmatrix} -|V_{ud}|e^{-i\alpha} & -\frac{|V_{ub}||V_{tb}|-|V_{td}||V_{ud}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}|} & |V_{ub}| \\ -\frac{|V_{td}||V_{tb}|-|V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{cb}|} & -\frac{(|V_{cb}|^2-|V_{td}|^2)|V_{tb}|+|V_{ud}||V_{td}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

类似于 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ 参数化, 可以选择角度 α 和三个实数的矩阵元 V_{ij} 作为独立的参量来实现上述三种 CKM 矩阵的参数化。具体来说, 可以选择参量的方法是: $(\alpha, |V_{us}|, |V_{ub}|, |V_{cb}|)$, $(\alpha, |V_{ts}|, |V_{cd}|, |V_{td}|)$ 和 $(\alpha, |V_{cb}|, |V_{tb}|, |V_{ts}|)$ 分别作为上述三种参数化的独立参量。

在 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 四种参数化的方式中, Jarlskog 参量 J 都是如下定义:

$$J = |V_{ub}||V_{ud}||V_{td}||V_{tb}|\sin\alpha \quad (2-17)$$

因为 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 这四种参数化是等价的, 下面来说明这一结论。在四种 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化中, 可以重新定义夸克场的相位, 使得从 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化变为 $V_{CKM}^{\alpha_j}$ 参数化, 这也就意味着这四种 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化是等价的。从 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化转换到 $V_{CKM}^{\alpha_j}$ 参数化, 表示如下:

$$V_{CKM}^{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_j} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iy} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iz} \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

其中 i 和 j 表示了不同的 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化形式。举例如下, 从 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ 变换到 $V_{CKM}^{\alpha_2}$, 问题变为找到满足下述方程的参数 m, n, x, y, z :

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_1} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iy} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iz} \end{pmatrix}$$

通过比较上式方程的左边和右边的系数, 可以得到: $x = y = z = 0, n = \alpha + \pi$, 还有,

$$m = \arccos \frac{(|V_{td}||V_{tb}|)^2 - [(|V_{ud}||V_{ub}|)^2 + (|V_{cd}||V_{cb}|)^2]}{2|V_{ud}||V_{ub}||V_{cd}||V_{cb}|}. \quad (2-19)$$

所以, 从 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ 向 $V_{CKM}^{\alpha_2}$ 的变换可以实现:

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\alpha} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_1}. \quad (2-20)$$

同理, $V_{CKM}^{\alpha_3}$ 参数化和 $V_{CKM}^{\alpha_4}$ 参数化也可以证明等价于 $V_{CKM}^{\alpha_2}$ 。所以, $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 四种参数化方式是等价的。

对于 β 角的参数化, 从幺正三角形中对于 β 的定义, 同样可以有四种方式来使得 β 只会出现在四个 CKM 矩阵元中的一个上面, 如下所示^[17]:

$$\begin{aligned} \beta_1) & \cdot (|V_{cd}|, |V_{cb}|, |V_{td}|, -|V_{tb}|e^{i\beta}) \\ \beta_2) & \cdot (|V_{cd}|, |V_{cb}|, -|V_{td}|e^{-i\beta}, |V_{tb}|) \\ \beta_3) & \cdot (|V_{cd}|, -|V_{cb}|e^{-i\beta}, |V_{td}|, |V_{tb}|) \\ \beta_4) & \cdot (-|V_{cd}|e^{i\beta}, |V_{cb}|, |V_{td}|, |V_{tb}|) \end{aligned} \quad (2-21)$$

类似于 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化的方法, 同样可以证明, 四种 $V_{CKM}^{\beta_i}$ 参数化的方式是等价的, 并将它们列在附录 A 里面。下面给出 $V_{CKM}^{\beta_2}$ 作为例子进行说明:

$$V_{CKM}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta} - |V_{cb}||V_{cd}|}{|V_{ub}|} & \frac{(|V_{cd}|^2 - |V_{ub}|^2)|V_{cb}| - |V_{cd}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta}}{|V_{cs}||V_{ub}|} & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{-i\beta} & \frac{|V_{cd}||V_{td}|e^{-i\beta} - |V_{cb}||V_{tb}|}{|V_{cs}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}. \quad (2-22)$$

对于 $V_{CKM}^{\beta_2}$ 参数化的形式, 选取 β , $|V_{cs}|$, $|V_{cb}|$, $|V_{tb}|$ 作为独立的参量比较方便。其他的矩阵元可以由这些选作独立的参量来表示:

$$\begin{aligned} |V_{cd}| &= \sqrt{1 - |V_{cs}|^2 - |V_{cb}|^2}, |V_{ub}| = \sqrt{1 - |V_{cb}|^2 - |V_{tb}|^2}, \\ |V_{td}| &= \frac{|V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|\cos\beta}{1 - |V_{cb}|^2} \\ &+ \sqrt{\left(\frac{|V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|\cos\beta}{1 - |V_{cb}|^2}\right)^2 - \frac{|V_{ub}|^2(|V_{cd}|^2 - 1) + |V_{cd}|^2|V_{cb}|^2}{1 - |V_{cb}|^2}}. \end{aligned} \quad (2-23)$$

对应的 Jarlskog 量 J 由下式给出:

$$J = |V_{cb}||V_{tb}||V_{cd}||V_{td}|\sin\beta. \quad (2-24)$$

对于 γ 角的参数化, 从么正三角形中对于 γ 的定义, 同样可以有四种方式来使得 γ 只会出现在四个 CKM 矩阵元中的一个上面, 如下所示:

$$\begin{aligned} \gamma_1) &\cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, |V_{cd}|, -|V_{cb}|e^{i\gamma}) \\ \gamma_2) &\cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, -|V_{cd}|e^{-i\gamma}, |V_{cb}|) \\ \gamma_3) &\cdot (|V_{ud}|, -|V_{ub}|e^{-i\gamma}, |V_{cd}|, |V_{cb}|) \\ \gamma_4) &\cdot (-|V_{ud}|e^{i\gamma}, |V_{ub}|, |V_{cd}|, |V_{cb}|) \end{aligned} \quad (2-25)$$

类似于 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化的方法, 同样可以证明, 四种 $V_{CKM}^{\gamma_i}$ 参数化的方式是等价的, 并将它们列在附录 A 里面。下面给出 $V_{CKM}^{\gamma_3}$ 作为例子进行说明:

$$V_{CKM}^{\gamma_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{cd}|-|V_{ub}||V_{cb}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}|} & -|V_{ub}|e^{-i\gamma} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & \frac{(|V_{cb}|^2-|V_{td}|^2)|V_{cd}|-|V_{cb}||V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}||V_{td}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma}-|V_{cd}||V_{cb}|}{|V_{td}|} \end{pmatrix}. \quad (2-26)$$

对于 $V_{CKM}^{\gamma_3}$ 参数化的形式, 选取 γ , $|V_{cd}|$, $|V_{cs}|$, $|V_{td}|$ 作为独立的参量比较方便。其他的矩阵元可以由这些选作独立的参量来表示:

$$\begin{aligned} |V_{ud}| &= \sqrt{1 - |V_{cd}|^2 - |V_{td}|^2}, |V_{cb}| = \sqrt{1 - |V_{cd}|^2 - |V_{cs}|^2}, \\ |V_{ub}| &= \frac{|V_{ud}||V_{cd}||V_{cb}|\cos\gamma}{1 - |V_{cd}|^2} \\ &- \sqrt{\left(\frac{|V_{ud}||V_{cd}||V_{cb}|\cos\gamma}{1 - |V_{cd}|^2}\right)^2 - \frac{|V_{cs}|^2(|V_{ud}|^2 - 1) + |V_{ud}|^2|V_{cd}|^2}{1 - |V_{cd}|^2}} \end{aligned} \quad (2-27)$$

对应的 Jarlskog 量 J 由下式给出:

$$J = |V_{ub}||V_{cb}||V_{ud}||V_{cd}| \sin \gamma. \quad (2-28)$$

有趣的一点是: 在前面介绍过的九种选取三个夸克混合角和一个 CP 破坏相角实现参数化的方式中 (2.1), 有些参数化方式中的 CP 破坏相角的大小跟 β 的数值很是接近。下面给出一个例子, P_4 参数化的矩阵 (2.1) 如下所示:

$$V_{CKM}^{P_4} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & c_\theta s_\sigma s_\tau + s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma s_\tau - s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_\tau & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\tau & s_\sigma c_\tau & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix}. \quad (2-29)$$

其中, 有关系式:

$$\beta = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{x_\beta + \cos \varphi}\right), \quad x_\beta = \frac{s_\theta c_\sigma s_\tau}{c_\theta s_\sigma} = \frac{|V_{cd}||V_{tb}||V_{td}|}{|V_{ud}||V_{ts}|} = 0.0497 \quad (2-30)$$

因为 x_β 是个小量, 于是可以清楚的看出 CP 破坏的相角 φ 和 β 的大小几乎一致。

另外, 也可以发现在前面介绍过的九种不同的参数化中 (2.1), 没有一种参数化形式可以使得在选取三个夸克混合角作为独立参数的同时, 使得 CP 破坏的相角等于 α, β, γ 中的一个。因为在我们建立的新的 α, β, γ 参数化形式中, 其中一个矩阵元的形式是, $|V_{ij}|e^{\pm i\alpha}$, $|V_{ij}|e^{\pm i\beta}$, 或者 $|V_{ij}|e^{\pm i\gamma}$, 另外还要有五个矩阵元是实数, 但是在已经介绍过的九种参数化中并不能找到一种符合这种形式的。

2.2.2 α, β, γ 作为相角的不同参数化方式之间的等价关系

这一节将来证明 12 种不同的 α, β, γ 参数化方法是等价。在前面一节中已经证明了, 四种 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化形式是等价的, 同样, 四种 $V_{CKM}^{\beta_i}$, 和四种 $V_{CKM}^{\gamma_i}$ 也分别等价。于是为了证明这 12 种参数化是等价的, 只需要证明四种 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化中的一种跟 $V_{CKM}^{\beta_i}$ 和 $V_{CKM}^{\gamma_i}$ 中的一种是等价的。

在本节中, 会利用 $V_{CKM}^{\alpha_3}$ 和 $V_{CKM}^{\beta_3}$ 作为例子说明四种 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化和四种 $V_{CKM}^{\beta_i}$ 参数化是等价的。从两个参数化的 CKM 矩阵中可以看出, 第三行和第一列已经完全相等。然后利用关系式:

$$|V_{ub}||V_{ud}|e^{i\alpha} + |V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta} = |V_{td}||V_{tb}|. \quad (2-31)$$

可以证明参数化的 CKM 矩阵 $V_{CKM}^{\alpha_3}$ 和 $V_{CKM}^{\beta_3}$ 的 (1, 2), (1, 3), (2, 2) 和 (2, 3) 分量也是相等的。所以, 两种参数化的矩阵有如下的相等的关系式:

$$\begin{aligned} V_{CKM}^{\alpha_3} &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{td}|-|V_{tb}||V_{ub}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}|} & -|V_{ub}|e^{i\alpha} \\ |V_{cd}| & \frac{(|V_{tb}|^2-|V_{cd}|^2)|V_{td}|-|V_{ub}||V_{ud}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cd}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\alpha}-|V_{td}||V_{tb}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2-|V_{tb}|^2)|V_{td}|+|V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\beta}}{|V_{ts}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{td}||V_{tb}|-|V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{-i\beta}-|V_{cd}||V_{td}|}{|V_{ts}|} & -|V_{cb}|e^{-i\beta} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = V_{CKM}^{\beta_3}. \end{aligned} \quad (2-32)$$

同理, 利用关系式:

$$\begin{aligned} |V_{tb}||V_{td}|e^{i\alpha} + |V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\gamma} &= |V_{ud}||V_{ub}| \\ |V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma} + |V_{tb}||V_{td}|e^{i\beta} &= |V_{cd}||V_{cb}| \end{aligned} \quad (2-33)$$

可以得到相等的关系式:

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = V_{CKM}^{\gamma_2}, \quad V_{CKM}^{\beta_1} = V_{CKM}^{\gamma_3}. \quad (2-34)$$

于是, 12 种 α, β, γ 参数化形式是等价。可以从其中任何一种参数化形式等价变换到另外一种参数化形式。

2.2.3 类似 Wolfenstein 参数化的近似展开

在 CKM 矩阵的不同形式的参数化中有一种参数化称为 Wolfenstein 参数化^[18], 这种参数化形式是 CKM 矩阵的标准参数化 (PDG 参数化) 的近似形式, 在研究使用中会很方便。在这一节中, 会对已经介绍的 α, β, γ 参数化做类似 Wolfenstein 参数化的近似展开。

$V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化, 以 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ (2-14) 作为例子, 取近似形式: $|V_{us}| = \lambda, |V_{ub}| = a\lambda^3, |V_{td}| = b\lambda^3, \alpha$ 作为独立参量。于是, 根据已有的关于矩阵元的实验数据可知: $\lambda = 0.2252 \pm 0.0010, a = 0.3170 \pm 0.0130, b = 0.7670 \pm 0.0250$ 。将参数化的矩阵元利用选取的独立变量进行展开, 到 λ^3 阶, 结果为:

$$V_{CKM}^{\alpha_1} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & a\lambda^3 \\ \lambda & -1 + \frac{1}{2}\lambda^2 & -(a - be^{-i\alpha})\lambda^2 \\ b\lambda^3 & (ae^{-i\alpha} - b)\lambda^2 & -e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2-35)$$

在这个例子中，可以将 c 夸克的相角转动 π ，将 b 夸克的相角转动 $\pi + \alpha$ 可以得到一个对角元近似都为 1 的矩阵：

$$V_{CKM}^{\alpha_1} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & -a\lambda^3 e^{i\alpha} \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & -(ae^{i\alpha} - b)\lambda^2 \\ b\lambda^3 & (ae^{-i\alpha} - b)\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-36)$$

上式得到的结果跟标准参数化的 **Wolfenstein** 近似展开具有相似的结构。需要注意的是，在高于 λ^3 阶的情形下，标准参数化的 **Wolfenstein** 近似展开和 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 参数化的近似展开就会出现不相似的项。

对于 $V_{CKM}^{\beta_i}$ 参数化形式，选取 $V_{CKM}^{\beta_1}$ 来做类似 **Wolfenstein** 近似展开。选择独立的参量的方式是： $|V_{cd}| = \lambda$ ， $|V_{td}| = b\lambda^3$ ，和 $|V_{cb}| = c\lambda^2$ 。根据 **CKM** 矩阵元的相关的实验数据，可以得到： $\lambda = 0.2251 \pm 0.0010$ ， $b = 0.7685 \pm 0.0250$ ， $c = 0.8185 \pm 0.0176$ 。同时将 b 夸克场的相位旋转 $\pi - \beta$ ，将 $V_{CKM}^{\beta_1}$ 展开到 λ^3 阶，得到结果为：

$$V_{CKM}^{\beta_1} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \lambda^3(ce^{-i\beta} - b) \\ \lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & -c\lambda^2 e^{-i\beta} \\ b\lambda^3 & c\lambda^2 e^{i\beta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-37)$$

对于 $V_{CKM}^{\gamma_i}$ 参数化形式，选取 $V_{CKM}^{\gamma_4}$ 来做类似 **Wolfenstein** 近似展开。选择独立的参量的方式是： $|V_{cd}| = \lambda$ ， $|V_{ub}| = a\lambda^3$ ，和 $|V_{cb}| = c\lambda^2$ 。根据 **CKM** 矩阵元的相关的实验数据，可以得到： $\lambda = 0.2251 \pm 0.0010$ ， $a = 0.3176 \pm 0.0130$ ， $c = 0.8185 \pm 0.0176$ 。同时将 d 夸克场的相位旋转 π ，将 u 夸克场的相位旋转 $-\gamma$ ，将 $V_{CKM}^{\gamma_4}$ 展开到 λ^3 阶，得到结果为：

$$V_{CKM}^{\gamma_4} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & a\lambda^3 e^{-i\gamma} \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & c\lambda^2 \\ -\lambda^3(ae^{i\gamma} - c) & -c\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-38)$$

类似于 $V_{CKM}^{\alpha_1}$ 的情况，在展开到 λ^3 阶的时候，上述两种类似 **Wolfenstein** 近似展开的参数化形式跟 **CKM** 矩阵的标准参数化形式的 **Wolfenstein** 近似展开是等价的。同样，如果展开到高于 λ^3 阶的时候，**CKM** 矩阵的 **Wolfenstein** 参数化就和 $V_{CKM}^{\beta_i}$ ， $V_{CKM}^{\gamma_i}$ 的类似 **Wolfenstein** 参数化的近似展开就会出现不相似的项。

在这一章介绍的新的 α, β, γ 三种参数化方式中, β 角是实验中测量最精确的一个, 这使得 $V_{CKM}^{\beta_1}$ 参数化形式的近似表达式比其他的参数化方式的近似表达式更有优势。

2.3 本章小结

这一章首先介绍了 CKM 矩阵的数学上的等价的九种参数化方法。在这九种方法中, 都选取了三代夸克之间的混合角和一个 CP 破坏的相角来对 CKM 矩阵进行参数化。接着指出了通常情况下的参数化方法中, 三个夸克味道混合角和一个 CP 破坏的相角, 它们的数值大小会对所选取的 CKM 矩阵的参数化方法有依赖性。也即, 选择不同的参数化方法, 混合角和 CP 破坏的相角的大小都不一样, 同时也给出了 Kobayashi-Maskawa(KM 参数化) 和标准参数化 (PDG 参数化) 的例子对参数化依赖问题进行说明。在第二节中利用么正三角形中的内角 α, β, γ 作为 CP 破坏的相角, 加上三个 CKM 矩阵元的模值作为参数化矩阵的独立参量来实现新的参数化方法, 因为 CKM 矩阵元的绝对值 $|V_{ij}|$ 是实验可观测量, 而且么正三角形中的内角 α, β, γ 也是实验中的可观测量, 所以在这种参数化方法中, 所选取的四个独立参量都是实验可观测量, 很自然的就解决了参数化问题中的参量对参数化方法选择的依赖问题。然后分析了 α, β, γ 12 中参数化的等价性, 其中任何一种参数化方式, 都可以通过重新定义夸克场的相位转变为其他任何一种参数化的方式。接着说明了, 不可以选择三个夸克混合角的同时, 再选取 α, β, γ 中的一个角来参数化 CKM 矩阵, 这说明, 本章第一节中介绍的 CKM 矩阵的九种参数化方法和 α, β, γ 参数化方法是不等价的。另外, 举例说明了 α, β, γ 参数化也可以做类似 Wolfenstein 参数化的近似展开, 在展开到 λ^3 阶的情形下, 这种近似展开的表达式和标准参数化的 Wolfenstein 参数化的表达式是相似的, 但是高于 λ^3 阶的情形下, 两种近似展开就会有不相似的项出现。最后指出, 因为 β 在实验上是测量最精确的角, 所以选择 β 作为 CP 破坏的相角的参数化是比较好的选择。

第三章 从 $SU(3)$ 味对称性的角度分析 B 介子的三体衰变

3.1 B 介子衰变的背景介绍

B 介子是一个强子束缚态，并且其中含有 b 夸克。 B 介子有很多种衰变方式^[19]。但是其中， B 介子非轻衰变最为复杂，因为在此过程中，弱相互作用和强相互作用会相互影响，使得相关的理论研究很是困难。现在已有很多对 B 介子非轻衰变的研究，例如：pQCD 和 QCD 因子化等方式。但是，这些已有的相关研究在对衰变过程进行计算时，结果的不确定性并不能令人满意^[20-23]。于是，从夸克味道对称性的角度来分析，应该是一个不错的选择。此外，LHCb 实验上有了很多关于 B 介子衰变的实验数据^[24]，这也使得关于 B 介子的研究有了相关的实验支持。因为在 B 介子衰变的过程中，包含了很多粒子物理标准模型的相关信息，尤其是关于 Kobayashi-Maskawa 机制 (KM 机制) 中的 CP 破坏现象方面，所以对 B 介子衰变的研究可以进一步检验标准模型关于这些方面的理论预言。在本章中，第一节会首先介绍下 LHCb 上最近的新的数据，然后从 $SU(3)$ 味对称性的角度去分析 B^+ 介子的衰变过程，其中考虑了在 $SU(3)$ 对称性下不变且不依赖于末态粒子动量的衰变振幅，夸克质量带来的 $SU(3)$ 对称性破坏的振幅贡献以及对末态粒子最低阶的动量依赖的振幅贡献。接着给出了数值计算的结果。第二节从 U 旋对称性的角度去分析 B^- 介子的衰变过程，其中考虑了 U 旋对称性及相应的与动量无关的衰变振幅，在 U 旋对称性下对末态粒子最低阶的动量依赖的振幅贡献以及夸克质量带来的 U 旋对称性破坏的振幅贡献。第三节，证明了从 $SU(3)$ 对称性分析和从 U 旋对称性分析的等价性。第四节从 $SU(3)$ 味道对称性考虑了 B 介子的全对称的衰变振幅，找出了衰变道之间的线性关系并考虑了味道对称性破坏对线性关系的影响。在本章最后给出了本章小结。

3.2 从 $SU(3)$ 味对称性来分析 B^\pm 三体衰变到带电的赝标介子

LHCb 实验组关于 B^+ 介子三体衰变到末态为 $\pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$ 和 $K^+K^+K^-$ 四个衰变道有了新的实验数据。对于两个 $\Delta S = 1$ 的衰变过程, 末态为: $K^+\pi^+\pi^-$ 和 $K^+K^+K^-$, 它们的 CP 不对称性量 (A_{cp}) 为^[25]:

$$\begin{aligned} A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-) &= +0.032 \pm 0.008(stat) \pm 0.004(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+) \\ A_{CP}(K^+K^+K^-) &= -0.043 \pm 0.009(stat) \pm 0.003(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+) \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中, 这两个数据分别以 2.8σ 和 3.7σ 的误差偏离零值。另外, Babar 最近也有相关的实验数据: $A_{CP}(K^+K^+K^-) = -0.017_{-0.014}^{+0.019} \pm 0.014$ 。这个实验数据跟 LHCb 的数据在 1.1σ 误差范围内是相符的^[26]。

其他两个衰变道的 A_{cp} 的实验数据为^[27]:

$$\begin{aligned} A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= +0.117 \pm 0.021(stat) \pm 0.009(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+) \\ A_{CP}(\pi^+K^+K^-) &= -0.141 \pm 0.040(stat) \pm 0.018(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+) \end{aligned} \quad (3-2)$$

它们的置信度分别为: 4.2σ 和 3.0σ 。

这四个衰变道的衰变分支比在实验上也有测量^[28]:

$$\begin{aligned} Br(\pi^+\pi^+\pi^-) &= (15.2 \pm 1.4) \times 10^{-6}, & Br(\pi^+K^+K^-) &= (5.0 \pm 0.7) \times 10^{-6} \\ Br(K^+K^+K^-) &= (34.0 \pm 1.0) \times 10^{-6}, & Br(K^+\pi^+\pi^-) &= (51.0 \pm 3.0) \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (3-3)$$

B^+ 介子的三体衰变过程中涉及到了标准模型和决定 B 衰变的强相互作用的信息。如果对于 B 介子衰变, $SU(3)$ 味对称性符合的较好^[29, 30], 同时衰变振幅的贡献主要来自动量无关的部分。那么对于衰变的分支比和 A_{cp} 有如下关系式^[31]:

$$\begin{aligned} Br(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 2Br(\pi^+K^+K^-), & Br(K^+K^+K^-) &= 2Br(K^+\pi^+\pi^-) \\ A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= A_{CP}(\pi^+K^+K^-), & A_{CP}(K^+K^+K^-) &= A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-) \end{aligned} \quad (3-4)$$

另外, 衰变过程中的不对称率 $\Delta_{CP} = \Gamma - \bar{\Gamma}$ 和 A_{CP} 之间的关系式为: $A_{CP} = \tau_B \Delta_{CP} / 2Br$ 。 Δ_{CP} 使得下述关系成立:

$$\Delta_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) = 2\Delta_{CP}(\pi^+K^+K^-) = -\Delta_{CP}(K^+K^+K^-) = -2\Delta_{CP}(K^+\pi^+\pi^-) \quad (3-5)$$

所以, 基于 A_{CP}, Δ_{CP}, Br 之间的关系, 可以得到不同衰变之间的 A_{CP} 之间的关系, 作为 $SU(3)$ 味对称性较好符合的理论预言。

从 LHCb 的实验数据可以得到结果, 除了 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 和 $A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 之比跟实验数据时相符的, 其他的 $SU(3)$ 理论预言均不成立。而且, $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 和 $A_{CP}(\pi^+K^+K^-)$ 之比, 以及 $A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 和 $A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$ 的比之间, $SU(3)$ 理论预言甚至和实验数据之间有相反的符号。所以, 需要考虑动量无关的 $SU(3)$ 对称性振幅以外的贡献。一种能导致 $SU(3)$ 味对称性破坏的因素可以来自夸克之间质量的差别, 也即: u, d, s 夸克质量差别。所以, 在考虑 u, d, s 夸克质量的情形下, $SU(3)$ 味对称性只是一个近似的对称性。在 B 介子两体衰变到赝标介子八重态的过程中, $SU(3)$ 味对称性是一个很好的对称性, 尽管有对称破缺的存在^[32, 33], 对称性的理论预言和实验数据符合的很好^[34-36]。因此, 如果考虑了由于 u, d, s 夸克质量差别带来的对称性破坏效应, $SU(3)$ 味对称性理论预言可能可以对实验数据进行解释。

除了考虑 u, d, s 夸克质量差别导致的对称性破坏效应以外, 还需要考虑动量依赖的振幅贡献。引入动量无关的 $SU(3)$ 味对称性以外的新的项, 例如: $(\partial^\mu K^+\pi^+ - \partial^\mu \pi^+K^+)\partial_\mu K^-$ 和 $(\partial^\mu K^+\pi^+ - \partial^\mu \pi^+K^+)\partial_\mu \pi^-$ 。这两个式子会导致新的项出现, 对相应的衰变振幅有贡献。所以, 在研究中需要对两阶导数项做系统性的考虑。

所以, 下面几个小节会在 $SU(3)$ 味对称性的基础上, 考虑上述两类振幅贡献。相关的数值计算结果显示, 在 B^+ 的这四个衰变的过程中, $SU(3)$ 味对称性破坏很大。

3.2.1 在 $SU(3)$ 对称性下不变且不依赖于末态粒子动量的衰变振幅

从 $SU(3)$ 味对称性的角度分析 B 介子三体衰变到赝介子八重态的衰变过程, 首先来看在夸克水平上, 到一圈图的精度上, B 介子的无絮衰变的有效哈

密顿量为:

$$H_{eff}^q = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} [V_{ub}V_{uq}^*(c_1O_1 + c_2O_2) - \sum_{i=3}^{12} (V_{ub}V_{uq}^*c_i^{uc} + V_{tb}V_{tq}^*c_i^{tc})O_i] \quad (3-6)$$

其中, q 代表 d 夸克或者 s 夸克。 $c_{1,2}$ 和 $c_i^{jk} = c_i^j - c_i^k$ (j 和 k 表示内部夸克) 表示威尔逊系数 (WC)。 威尔逊系数已经被一些研究组计算过。 V_{ij} 是 CKM 矩阵元^[37]。 在上述表达式中, 已经利用 CKM 矩阵的么正性代换了因子 $V_{cb}V_{cq}^*$ 。

有效的拉氏量中的算符 O_i 的具体表达式为:

$$\begin{aligned} O_1 &= (\bar{q}_i u_j)_{V-A} (\bar{u}_i b_j)_{V-A} & O_2 &= (\bar{q} u)_{V-A} (\bar{u} b)_{V-A} \\ O_{3,5} &= (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V\mp A} & O_{4,6} &= (\bar{q}_i b_j)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_j q'_i)_{V\mp A} \\ O_{7,9} &= \frac{3}{2} (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}' q')_{V\pm A} & O_{8,10} &= \frac{3}{2} (\bar{q}_i b_j)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}'_j q'_i)_{V\pm A} \\ O_{11} &= \frac{g_s}{16\pi^2} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) b & O_{12} &= \frac{Q_b e}{16\pi^2} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) b \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中, $(\bar{a}b)_{V-A} = \bar{a}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)b$, $G_{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}$ 分别是胶子和光子场的场张量。 这些算符对应的费曼图如下所示:

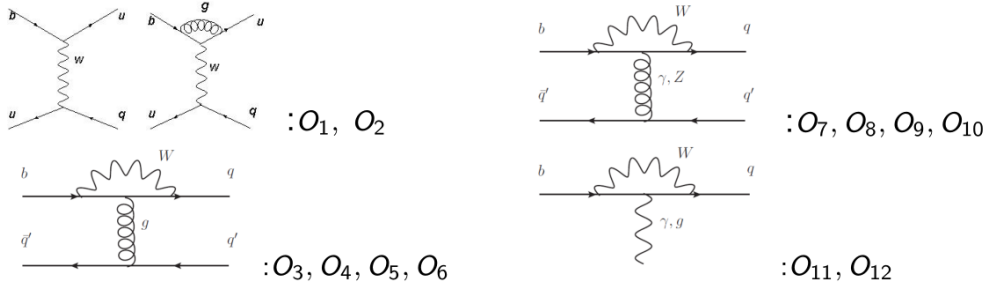


图 3-1 B 介子衰变有效哈密顿量中算符对应的费曼图。

Figure 3-1 The unitarity triangle.

算符 $O_{1,2}$, $O_{3-6,11,12}$ 和 O_{7-10} 在 $SU(3)$ 味对称性下的变换分别为: $\bar{3}_a + \bar{3}_b + 6 + \bar{15}$, $\bar{3}$, 和 $\bar{3}_a + \bar{3}_b + 6 + \bar{15}$ 。 对于算符由夸克 b, q, q', \bar{q}' 表示, 在 $SU(3)$ 味道对称性下可以分解为两个 $SU(3)$ 三重态 ($\bar{3}_a + \bar{3}_b$), 一个六重态 (即除 b 夸克外, 前两个夸克交换反对称的表示) 和一个十五重态 (即除 b 夸克外, 前两个夸克交换对称的表示)。 将这些在 $SU(3)$ 味对称性下的表示用矩阵记为: $H(\bar{3})$, $H(6)$, 和 $H(\bar{15})$ 。 下面取 $q = d$ 情形下的的算符 $O_2 = \bar{u}b\bar{d}u$ 为例来说明:

$$\bar{u}b\bar{d}u = \frac{1}{8} \{ 3[\bar{u}b\bar{d}u + \bar{d}b\bar{d}d + \bar{s}b\bar{d}s]_{\bar{3}} - [\bar{d}b(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)]_{\bar{3}} \}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2[\bar{u}b\bar{d}u - \bar{d}b\bar{u}u + \bar{d}b\bar{s}s - \bar{s}b\bar{d}s]_6 \\
 & + [3\bar{u}b\bar{d}u + 3\bar{d}b\bar{u}u - 2\bar{d}b\bar{d}d - \bar{d}b\bar{s}s - \bar{s}b\bar{d}s]_{\overline{15}} \} \\
 & = \frac{1}{8}[3H(\bar{3}) - H(\bar{3}') + 2H(6) + H(\overline{15})]
 \end{aligned}$$

对于其他的算符，由同样的方式可以写出他们的分解表达式。

对于 $q = d$ 的情况，矩阵 $H(i)$ 的不为零的矩阵元为^[38]:

$$\begin{aligned}
 H(\bar{3})^2 & = 1, \quad H(6)_1^{12} = H(6)_3^{23} = 1, \quad H(6)_1^{21} = H(6)_3^{32} = -1 \\
 H(\overline{15})_1^{12} & = H(\overline{15})_1^{21} = 3, \quad H(\overline{15})_2^{22} = -2, \quad H(\overline{15})_3^{32} = H(\overline{15})_3^{23} = -1
 \end{aligned} \tag{3-8}$$

对于 $q = s$ 的情况，矩阵 $H(i)$ 的不为零的矩阵元为:

$$\begin{aligned}
 H(\bar{3})^3 & = 1, \quad H(6)_1^{13} = H(6)_2^{32} = 1, \quad H(6)_1^{31} = H(6)_2^{23} = -1 \\
 H(\overline{15})_1^{13} & = H(\overline{15})_1^{31} = 3, \quad H(\overline{15})_3^{33} = -2, \quad H(\overline{15})_2^{32} = H(\overline{15})_2^{23} = -1
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

在强子的水平上， \mathbf{B} 介子的衰变振幅一般可以写作:

$$A = \langle final\ state | H_{eff}^q | \bar{B} \rangle = V_{ub}V_{uq}^* T(q) + V_{tb}V_{tq}^* P(q) \tag{3-10}$$

其中， $T(q)$ 包含了树图的贡献，以及由 u, c 夸克圈图对矩阵元的修正的企鹅图。而 $P(q)$ 只包含了一圈企鹅图贡献。 B 代表了介子 B^+, B_d^0, B_s^0 中的一个。 $B_i = (B^+, B_d^0, B_s^0)$ 是一个 $SU(3)$ 三重态。

上述的这些性质使得可以用一些 $SU(3)$ 味对称性下不变的项来表示 \mathbf{B} 介子三体非轻衰变 $B \rightarrow PPP$ 的振幅^[39, 40]。其中 P 表示赝介子八重态中的一个介子，赝介子八重态矩阵可以表示如下:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{3-11}$$

于是， \mathbf{B} 介子的衰变振幅可以用 \mathbf{B} 介子三重态，赝介子八重态以及有效哈密顿量在 $SU(3)$ 对称性下的表示来构建。下面首先来考虑与动量无关的 $SU(3)$ 对称性下不变的振幅贡献。

对于振幅 $T(q)$, 有如下构造:

$$\begin{aligned}
T(q) = & a^T(\bar{3})B_iH^i(\bar{3})M_k^jM_l^kM_j^l + b^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^jB_jM_l^kM_k^l + c^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^lM_l^jM_j^kB_k \\
& + a^T(6)B_iH_k^{ij}(6)M_j^kM_n^lM_l^n + b^T(6)B_iH_k^{ij}(6)M_l^kM_n^lM_j^n \\
& + c^T(6)B_iH_l^{jk}(6)M_j^iM_k^nM_n^l + d^T(6)B_iH_l^{jk}(6)M_n^iM_j^lM_k^n \\
& + a^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})M_j^kM_n^lM_l^n + b^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})M_l^kM_n^lM_j^n \\
& + c^T(\bar{15})B_iH_l^{jk}(\bar{15})M_j^iM_k^nM_n^l + d^T(\bar{15})B_iH_l^{jk}(\bar{15})M_n^iM_j^lM_k^n . \tag{3-12}
\end{aligned}$$

对于振幅 $P(q)$, 可以用相似的方法来构造。

在振幅 $T(q)$ 的表达式中, 系数 $a(i), b(i), c(i), d(i)$ 是包含了威尔逊系数和 QCD 动力学信息的常数。一些研究组已经对衰变 $B \rightarrow PPP$ 做过研究^[41-43]。一般情况下, 衰变振幅会由于中间粒子的交换而导致有共振态的贡献, 这样一来, 系数 $a(i), b(i), c(i), d(i)$ 就会去末态粒子的动量具有依赖关系。当然也会有别的使得衰变振幅会对末态粒子动量具有依赖关系的因素。LHCb 实验组根据 $\pi^+\pi^-$ 和 K^+K^- 对的不变质量, 对相空间的局部测量了 A_{CP} , 数据的结果是在局部的一些区域 A_{CP} 的数值会更大。如果有更多的实验数据能对次进行确认, 那就意味着衰变振幅的动量依赖来自于共振态中间粒子的交换^[44]。如果只考虑动量无关的振幅贡献, 在这种情形下, 局域的 A_{CP} 就没有办法进行计算。在本章的研究中, 不考虑局域的 A_{CP} , 只考虑全相空间的 A_{CP} 。

如果将上述振幅 $T(q)$ 展开, 可以得到四个衰变道 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$, $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$, $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$, $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 的振幅 $T(q)$ 的表达式, 他们都相等, 如下所示:

$$\begin{aligned}
T = & 2b^T(\bar{3}) + c^T(\bar{3}) + 2a^T(6) + b^T(6) - c^T(6) - d^T(6) \\
& + 6a^T(\bar{15}) + 3b(\bar{15}) + c^T(\bar{15}) + 3d^T(\bar{15}) \tag{3-13}
\end{aligned}$$

同理, 可以得到振幅 $P(q)$ 的类似表达式, 只需要将 T 的表达式 (3-12) 换成 P 即可。

于是, B^+ 介子的这四种衰变的衰变振幅可以写作:

$$\begin{aligned}
A(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T + V_{tb}^*V_{td}P \\
A(B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T + V_{tb}^*V_{td}P \\
A(B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{us}T + V_{tb}^*V_{ts}P
\end{aligned}$$

$$A(B^+ \rightarrow K^+K^+K^-) = V_{ub}^*V_{us}T + V_{tb}^*V_{ts}P \quad (3-14)$$

对于末态有全同粒子的衰变，全同粒子效应将放在计算衰变分支比的时候来考虑。

对应的 B^- 衰变，其衰变振幅可以通过将 B^+ 衰变振幅表达式中的 $V_{ub}V_{uq}^*$ 和 $V_{tb}V_{tq}^*$ 分别换为 $V_{ub}^*V_{uq}$ 和 $V_{tb}^*V_{tq}$ 就可以了。

在 $SU(3)$ 味对称性下，有：

$$Br(\pi^+\pi^+\pi^-) = 2Br(\pi^+K^+K^-), \quad Br(K^+\pi^+\pi^-) = 2Br(K^+K^+K^-) \quad (3-15)$$

其中，因子 2 来自于衰变过程 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 中的全同粒子 $\pi^+\pi^+, K^+K^+$ 。

由 KM 矩阵的性质： $Im(V_{ub}V_{ud}^*V_{tb}^*V_{td}) = -Im(V_{ub}V_{us}^*V_{tb}^*V_{ts})$ 。以及关系式： $A_{CP} = \tau_B\Delta_{CP}/2Br$ ，因此可得：

$$2\Delta(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta(K^+K^+K^-) = -\Delta(\pi^+\pi^+\pi^-) = -2\Delta(\pi^+K^+K^-)$$

进而可以得到 $SU(3)$ 味对称性的理论预言：

$$\begin{aligned} \frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)}, & \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^+K^+K^-)}{Br(\pi^+\pi^+\pi^-)} \\ \frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^+K^+K^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)}, & \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+\pi^+\pi^-)} \end{aligned} \quad (3-16)$$

LHCb 的实验数据并不支持上述关系式。上述 A_{CP} 之间的关系式，只

$A_{CP}(\Delta S = 0)/A_{CP}(\Delta S = 1)$	动量无关的 $SU(3)$ 理论预言值	实验数据
$A_{CP}(\pi^+K^+K^-)/A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$	-10.2 ± 1.5	-4.4 ± 2.0
$A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$	-2.2 ± 0.2	-2.7 ± 0.9
$A_{CP}(\pi^+K^+K^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$	-6.8 ± 1.1	$+3.3 \pm 1.4$
$A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$	-3.4 ± 0.3	$+3.7 \pm 1.5$

表 3-1 $SU(3)$ 味对称性下的理论预期值和实验上关于 $A_{CP}(\Delta S = 0)/A_{CP}(\Delta S = 1)$ 的数据的比较

有 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 相应的实验数据相符, 其他的实验数据则不支持对称性的理论分析。LHCb 的实验数据是: $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-) = -2.7 \pm 0.9$, 而 $SU(3)$ 对称性的预言值是: -2.2 ± 0.2 , 两者符合的较好。如果 LHCb 的实验数据得到进一步的确证, 那么对 B^+ 的衰变分析就要考虑动量无关的 $SU(3)$ 下不变的振幅以外的因素贡献。一种可能的因素是 $SU(3)$ 味对称性的破缺效应。另外一种, 系统性的考虑两阶导数项对衰变振幅的贡献。下面两小节将分别来考虑这两种因素。

3.2.2 夸克质量带来的 $SU(3)$ 对称性破坏的振幅贡献

$SU(3)$ 味对称性的破坏来自于 u, d, s 夸克的质量差别。为了符合 (u, d, s) 夸克作为基础表示变换性质, 在 $SU(3)$ 味道对称性下, 夸克的质量矩阵可以看做两个 $SU(3)$ 表示的组合: $3 \times \bar{3}$, 其中, 这种表示的组合包含了不可约表示: 1 和 8。对角化的夸克质量矩阵可以表示为单位矩阵 I , Gell-Mann 矩阵 λ_3, λ_8 的线性组合。 u, d 夸克质量相比于 s 夸克质量非常小, 可以忽略, 所以矩阵 λ_3 不会对 $SU(3)$ 味对称性的破坏有贡献。 s 夸克的质量是 $SU(3)$ 味对称性破坏的主要来源, 因此可以记为:

$$W_{m_s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

这个矩阵还可以进一步分解为单位矩阵 I 和矩阵 λ_8 。单位矩阵的那部分贡献跟 $SU(3)$ 对称性下的动量无关的振幅形式一样, 可以把其归入系数 $a(i), b(i), c(i), d(i)$ 中。所以只有 λ_8 矩阵会对 $SU(3)$ 味对称性破坏有贡献。将其记为:

$$W = (W_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

构建对称性破坏的振幅的方法为: 用 W 矩阵在 $T(q)$ 的表达式 (3-12) 中的每一项的可能位置放进去, 并找出所有可能的矩阵指标的缩并的方式, 每一种方式都是一个独立的项, 对应一个独立的系数^[39, 40, 45]。将构建的 $\Delta T(q)$ 振幅列在附录 (B) 里。

将所得到的 $\Delta T(q)$ 展开, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 2b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) + 2b_3^T(\bar{3}) + c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) + c_4^T(\bar{3}) \\
 &\quad + 2a_1^T(6) + 2a_2^T(6) + 2a_3^T(6) + 2a_4^T(6) + b_1^T(6) + b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
 &\quad + b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) - c_2^T(6) - c_3^T(6) - c_4^T(6) - c_5^T(6) \\
 &\quad - d_1^T(6) - d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) - d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) + 6a_2^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 6a_3^T(\bar{15}) + 6a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) + 3b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) + 3b_4^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) + c_2^T(\bar{15}) + c_3^T(\bar{15}) + c_4^T(\bar{15}) + c_5^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3d_1^T(\bar{15}) + 3d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) + 3d_5^T(\bar{15}), \\
 \Delta T(K^+K^-\pi^+) &= 2b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) - b_3^T(\bar{3}) + c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) - 2c_4^T(\bar{3}) \\
 &\quad + 2a_1^T(6) + 2a_2^T(6) + 2a_3^T(6) - a_4^T(6) + b_1^T(6) + b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
 &\quad - 2b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) + 2c_2^T(6) - 4c_3^T(6) - c_4^T(6) + 2c_5^T(6) \\
 &\quad - d_1^T(6) - d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) + 2d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) + 6a_2^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 6a_3^T(\bar{15}) - 3a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) + 3b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) - 6b_4^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) + 4c_2^T(\bar{15}) + 4c_3^T(\bar{15}) + 7c_4^T(\bar{15}) - 8c_5^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3d_1^T(\bar{15}) + 3d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) - 6d_5^T(\bar{15}) \\
 \Delta T(K^+\pi^+\pi^-) &= -4b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) + 2b_3^T(\bar{3}) - 2c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) + c_4^T(\bar{3}) \\
 &\quad + 2a_1^T(6) - 4a_2^T(6) + 2a_3^T(6) + 2a_4^T(6) + b_1^T(6) - 2b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
 &\quad + b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) - c_2^T(6) + 2c_3^T(6) - c_4^T(6) - c_5^T(6) \\
 &\quad - d_1^T(6) + 2d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) - d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) - 12a_2^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 6a_3^T(\bar{15}) + 6a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) - 6b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) + 3b_4^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) - 5c_2^T(\bar{15}) + 4c_3^T(\bar{15}) + c_4^T(\bar{15}) + c_5^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 3d_1^T(\bar{15}) - 6d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) + 3d_5^T(\bar{15}) \\
 \Delta T(K^+K^-K^+) &= -4b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) - 2b_3^T(\bar{3}) - 2c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) - 2c_4^T(\bar{3}) \\
 &\quad + 2a_1^T(6) - 4a_2^T(6) + 2a_3^T(6) - a_4^T(6) + b_1^T(6) - 2b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
 &\quad - 2b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) + 2c_2^T(6) - c_3^T(6) - c_4^T(6) + 2c_5^T(6) - d_1^T(6) \\
 &\quad + 2d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) + 2d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) - 12a_2^T(\bar{15}) \\
 &\quad + 6a_3^T(\bar{15}) - 3a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) - 6b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) - 6b_4^T(\bar{15})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3b_5^T(\overline{15}) + c_1^T(\overline{15}) - 2c_2^T(\overline{15}) + 7c_3^T(\overline{15}) + 7c_4^T(\overline{15}) - 8c_5^T(\overline{15}) \\
& +3d_1^T(\overline{15}) - 6d_2^T(\overline{15}) + 3d_3^T(\overline{15}) + 3d_4^T(\overline{15}) - 6d_5^T(\overline{15}) . \quad (3-19)
\end{aligned}$$

如果利用矩阵:

$$W_{m_s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

来构建对称性破坏的振幅, 那么 $\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 的值就会为零。但是这两种计算对称破缺修正的方法是等价的。这一点可以通过把 $\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 从另外的三个修正振幅中减去, 并把 $\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 归入到 $SU(3)$ 对称性不变的振幅中去的所得结果看出来。

需要注意的是上述得到的四个 $SU(3)$ 破坏修正振幅不是完全独立的, 它们之间满足关系式:

$$\Delta T(K^+K^-K^+) - \Delta T(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta T(K^+K^-\pi^+) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) \quad (3-21)$$

同样的过程, 可以得到企鹅图的 $SU(3)$ 对称性破坏的修正振幅 ΔP 。

3.2.3 对末态粒子最低阶的动量依赖的振幅贡献

要保持衰变振幅的洛伦兹不变性, 衰变振幅对末态粒子的动量的两次方的依赖是导数项贡献的最低阶。构建动量依赖的项的方法是, 对 $SU(3)$ 味对称性下不变的振幅 $T(q)$ 表达式 (3-12) 中的每一项都求两次导数, 然后将所有可能的出现的新的项相加。当然, 并不是每种情况都是独立的, 当出现 $\partial_2 B$ 或者 ∂^M 时, 所得到的新的项正比于没有求导数之前的项, 通过重新定义 $T(q)$ 的系数将其归入新定义的系数当中。夸克质量的差别造成的 $SU(3)$ 味对称性的破坏, 会使得两次导数项 $\partial^2 K = m_K^2 K$ 和 $\partial^2 \pi = m_\pi^2 \pi$ 产生新的 $SU(3)$ 对称性破坏项。但是, 这种新的导数项不会产生不同于 $SU(3)$ 味对称性下的振幅 $T(q)$ 中的项。于是, 可以知道, 可以由贡献的独立的项应该是两次导数求在不同的场上面, 以 $B_i H^i(\overline{3}) M_k^j M_l^k M_j^l$ 为例, 在求过两次导数之后, 有贡献的项有如下结果:

$$(\partial_\mu B_i) H^i(\overline{3}) (\partial^\mu M_k^j) M_l^k M_j^l, \quad (\partial_\mu B_i) H^i(\overline{3}) M_k^j (\partial^\mu M_l^k) M_j^l, \quad (\partial_\mu B_i) H^i(\overline{3}) M_k^j M_l^k (\partial^\mu M_j^l),$$

$$B_i H^i(\bar{3})(\partial_\mu M_k^j)(\partial^\mu M_l^k)M_j^l, \quad B_i H^i(\bar{3})(\partial_\mu M_k^j)M_l^k(\partial^\mu M_j^l), \quad B_i H^i(\bar{3})M_k^j(\partial_\mu M_l^k)(\partial^\mu M_j^l). \quad (3-22)$$

所有可能的两次导数的情况被列在了附录 (C) 中。

展开附录 (C) 中所列的所有可能的导数项，可以得到 $B^+ \rightarrow PPP$ 衰变的最低阶的导数项贡献 T^p ，一共有六种不同的形式，例如，对于 $\Delta S = -1$ 的情形，结果如下所示：

$$\begin{aligned} (a) & (\partial_\mu B^+)(\partial^\mu K^+)[K^+K^- + \pi^+\pi^-], & (b) & (\partial_\mu B^+)K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)] \\ (c) & (\partial_\mu B^+)K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-], & (d) & B^+K^+[(\partial_\mu K^+)(\partial^\mu K^-) + (\partial_\mu \pi^+)(\partial^\mu \pi^-)] \\ (e) & B^+\partial_\mu K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)], & (f) & B^+\partial_\mu K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-] \end{aligned} \quad (3-23)$$

在上述表达式中， B^+ 是入射粒子，三个轻的赝标介子是出射粒子。考虑到能更方便的看到导数项是如何对 $SU(3)$ 对称性产生修正的，可以用上述六种独立的项进行线性组合，得到如下结果：

$$\begin{aligned} (1) & (\partial_\mu B^+)[(\partial^\mu K^+)\pi^+ - K^+(\partial^\mu \pi^+)]\pi^-, & (2) & (\partial_\mu B^+)K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)] \\ (3) & (\partial_\mu B^+)[K^+(\partial^\mu K^+)K^- + \frac{1}{2}((\partial^\mu(K^+)\pi^+ + K^+(\partial^\mu \pi^+))\pi^-)] \\ (4) & B^+[(\partial^\mu K^+)\pi^+ - K^+(\partial^\mu \pi^+)]\partial_\mu \pi^-, & (5) & B^+\partial_\mu K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-] \\ (6) & B^+[(\partial_\mu K^+)K^+(\partial^\mu K^-) + \frac{1}{2}((\partial_\mu K^+)\pi^+ + K^+(\partial_\mu \pi^+))\partial^\mu \pi^-] \end{aligned} \quad (3-24)$$

其中，(1), (4), (3), (6) 分别是通过 $((a) - (c))$, $(e) - (d)$, $\frac{(a)+(c)}{2}$, $\frac{(e)+(d)}{2}$ 得到的。在动量无关的 $SU(3)$ 对称的振幅项中没有上述的 (1) 和 (4)。 (1) 和 (4) 这种反对称项的存在使得衰变 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 的振幅出现不同，因此提供出了一种可能的因素使得 $SU(3)$ 味对称性被破坏。同样的推理过程可以得到 $\Delta S = 0$ 的情形下的表达式。

将附录 (C) 中的 T^p 展开， $\Delta S = -1$ 情形下的 T^p 可以写为：

$$\frac{1}{m_B^2} (\alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \alpha_4(4) + \alpha_5(5) + \alpha_6(6)) \quad (3-25)$$

在上述表达式中，已经将系数 α_i 进行了无量纲化。同理，可以得到企鹅图的贡献 P^p 。用新的导数项的系数表示的 α_i 的表达式也已经在附录 (C) 里给出。对于 $\Delta S = 0$ 的情形，可以得到类似的表达式。

在 T^p 的表达式中用 p^μ 换掉 ∂^μ , 可以得到 T^p 如下结果:

$$\begin{aligned}
& T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&\quad + 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3)) , \tag{3-26} \\
& T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&\quad + 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3))
\end{aligned}$$

定义 Mandelstam 变量, $s = (p_2 + p_3)^2$; $t = (p_1 + p_3)^2$; $u = (p_1 + p_2)^2$, 其与原来变量之间关系如下所示:

$$\begin{aligned}
s + t + u &= m_B^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \\
p_B \cdot (p_1 - p_2) &= \frac{1}{2}[m_1^2 - m_2^2 - s + t] \\
p_B \cdot (p_1 + p_2) &= \frac{1}{2}[2m_B^2 + m_1^2 + m_2^2 - s - t] \\
p_3 \cdot (p_1 - p_2) &= \frac{1}{2}[-m_1^2 + m_2^2 - s + t] \\
p_3 \cdot (p_1 + p_2) &= \frac{1}{2}[-m_1^2 - m_2^2 - 2m_3^2 + s + t] \\
p_B \cdot p_3 &= \frac{1}{2}[-m_1^2 - m_2^2 + s + t] \tag{3-27} \\
p_B \cdot p_2 &= \frac{1}{2}[m_B^2 + m_2^2 - t] \\
p_1 \cdot p_3 &= \frac{1}{2}[-m_1^2 - m_3^2 + t] \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}[m_B^2 + m_3^2 - s - t]
\end{aligned}$$

这样一来就可以用 Mandelstam 变量 s 和 t 来表示 T^p :

$$T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3))$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m_B^2}(\alpha_2[-2m_{K^+}^2 + s + t] + \alpha_3\frac{1}{2}[2m_B^2 + 2m_{K^+}^2 - s - t]) \\
 &\quad + \alpha_5[m_B^2 + m_{K^+}^2 - s - t] + \alpha_6\frac{1}{2}[-4m_{K^+}^2 + s + t]) \\
 T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
 &= \frac{1}{2m_B^2}(\alpha_2[-m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2 + s + t] + \alpha_3\frac{1}{2}[2m_B^2 + m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - s - t]) \\
 &\quad + \alpha_5[m_B^2 + m_{\pi^+}^2 - s - t] + \alpha_6\frac{1}{2}[-m_{K^+}^2 - 3m_{\pi^+}^2 + s + t] \\
 &\quad + \alpha_1[m_{K^+}^2 - m_{\pi^+}^2 - s + t] + \alpha_4[-m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 - s + t]) \\
 T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \tag{3-28} \\
 &= \frac{1}{m_B^2}(\alpha_2[-2m_{\pi^+}^2 + s + t] + \alpha_3\frac{1}{2}[2m_B^2 + 2m_{\pi^+}^2 - s - t]) \\
 &\quad + \alpha_5[m_B^2 + m_{\pi^+}^2 - s - t] + \alpha_6\frac{1}{2}[-4m_{\pi^+}^2 + s + t]) \\
 T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
 &= \frac{1}{2m_B^2}(\alpha_2[-m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2 + s + t] + \alpha_3\frac{1}{2}[2m_B^2 + m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2 - s - t]) \\
 &\quad + \alpha_5[m_B^2 + m_{K^+}^2 - s - t] + \alpha_6\frac{1}{2}[-m_{\pi^+}^2 - 3m_{K^+}^2 + s + t] \\
 &\quad + \alpha_1[m_{\pi^+}^2 - m_{K^+}^2 - s + t] + \alpha_4[-m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2 - s + t])
 \end{aligned}$$

在 $SU(3)$ 味对称性的极限下, 介子 K^+ , K^- , π^+ , π^- 的质量可以忽略, 有如下结果:

$$\begin{aligned}
 &T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
 &= \frac{1}{m_B^2}[s(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + t(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
 &T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
 &= \frac{1}{2m_B^2}[s(-\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + t(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) \\
 &\quad + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
 &T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \tag{3-29} \\
 &= \frac{1}{m_B^2}[s(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + t(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
 &T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
 &= \frac{1}{2m_B^2}[s(-\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + t(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6)
 \end{aligned}$$

$$+ m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)]$$

为了形式更加简洁，可以用 $(s+t)$ 和 $(s-t)$ 这两种组合来表示：

$$\begin{aligned}
& T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{m_B^2}[(s+t)(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
& T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2}[(s+t)(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + (s-t)(-\alpha_1 - \alpha_4) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
& T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \tag{3-30} \\
&= \frac{1}{m_B^2}[(s+t)(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)] \\
& T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2}[(s+t)(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 - \alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_6) + (s-t)(-\alpha_1 - \alpha_4) + m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)]
\end{aligned}$$

需要注意的是，在 $SU(3)$ 味对称性下，忽略轻介子 K ， π 质量，会有如下结果：

$$\begin{aligned}
& T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) = T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
& T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) = T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \tag{3-31}
\end{aligned}$$

对于 P^p 的表达式，可以用同样的方式写出类似的结果。

3.2.4 数值计算

将前面叙述过的所有方面结合起来，总的树图振幅 T_t 和企鹅图振幅 P_t 可以记为：

$$T_t = T + T^p + \Delta T, \quad P_t = P + P^p + \Delta P \tag{3-32}$$

由前叙述已知，动量无关的 $SU(3)$ 不变理论预期和实验数据不相符。那么，现在来计算有了另外的两种振幅贡献值后，实验数据是否能够被很好的解释。

3.2.4.1 只考虑 T^p 和 P^p 修正

在没有 $SU(3)$ 味对称破坏的，情形下，只需要考虑 T^p 和 P^p 带来的修正。但是，在这种情形下，在 $SU(3)$ 味对称性的极限情况下，仍然有结果：

$$T_i(K^+K^+K^-) = T_i(\pi^+\pi^+\pi^-), \quad T_i(\pi^+K^+K^-) = T_i(K^+\pi^+\pi^-)$$

$$P_t(K^+K^+K^-) = P_t(\pi^+\pi^+\pi^-), \quad P_t(\pi^+K^+K^-) = P_t(K^+\pi^+\pi^-) \quad (3-33)$$

于是, 可以知道:

$$\frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} = -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)} \quad (3-34)$$

但是, 这个结果是和实验结果相互矛盾的。

下面来说明加入 T^p 和 P^p 之后, 衰变分支比 Br 的数据的符合情况。在忽略掉 K 和 π 介子的质量之后, 总的衰变振幅是可以记做:

$$T_t = a^T + \frac{b^T}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^T}{m_B^2}(s-t), \quad P_t = a^P + \frac{b^P}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^P}{m_B^2}(s-t) \quad (3-35)$$

其中, $s = (p_2 + p_3)^2$, 以及 $t = (p_1 + p_3)^2$ 。

由前述的关于 $T(q)$ 和 T^p 的表达式 (对于企鹅图 P 的情况是类似的), 可以得到 a , b 的式子, 如下所示:

$$a^T = T + \frac{1}{4}(\alpha_3^T + \alpha_5^T), \quad b^T = \frac{1}{2}(\alpha_2^T - \frac{1}{2}\alpha_3^T - \alpha_5^T + \frac{1}{2}\alpha_6^T) \quad (3-36)$$

但是对于 c , 只有在衰变 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$ 中是才不为零, 在这两个衰变的过程中 c 的表达式是:

$$c^T = \frac{1}{2}(\alpha_1^T + \alpha_4^T) \quad (3-37)$$

于是可以得到衰变的宽度为:

$$\Gamma = \frac{M_B}{512\pi^3} \left(|\tilde{a}|^2 + \frac{2}{3}(\tilde{a}\tilde{b}^* + \tilde{b}\tilde{a}^*) + \frac{1}{2}|\tilde{b}|^2 + \frac{1}{6}|\tilde{c}|^2 \right) \quad (3-38)$$

其中,

$$\tilde{a} = V_{ub}^*V_{ud}a^T + V_{tb}^*V_{td}a^P, \quad \tilde{b} = V_{ub}^*V_{ud}b^T + V_{tb}^*V_{td}b^P, \quad \tilde{c} = V_{ub}^*V_{ud}c^T + V_{tb}^*V_{td}c^P$$

从上述的公式来看, 系数 c 的贡献不会和另外两项有相互影响。由于 c 系数的存在, 相比于衰变 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 和 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$, 它会提高衰变 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 的分支比, 同时它也会提高衰变 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$ 的分支比。但是加入 c 之后, 理论可以更好的符合衰变 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 的实验数据, 对于衰变 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$ 的符合情况更差了。所以, 如果只考虑动量依赖的导数项 T^p 和 P^p 的贡献是, 理论预期仍然与相应的实验数据不相符合。

3.2.4.2 只考虑 ΔT 和 ΔP 修正

如果只考虑夸克质量之差导致的 $SU(3)$ 味对称性的破坏部分 ΔT 和 ΔP ，在这种情况下，动量依赖部分的 T^p 和 P^p 则为零。为了计算的方便，可以将 ΔT 转换成另外一种等价的形式，即按照如下的方式将四个衰变道的 ΔT 做整体的改变，并将改变的部分归入到 $SU(3)$ 味对称性不变的振幅 (3-14) 部分里面。变化方式如下所示：

$$\begin{aligned} T(\pi^+\pi^+\pi^-)_t &= T' = T + \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) \\ T(K^+K^+K^-)_t &= T' + \Delta T'(K^+K^+K^-) \\ T(\pi^+K^+K^-)_t &= T' + \Delta T'(\pi^+K^+K^-) \\ T(K^+\pi^+\pi^-)_t &= T' + \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中，

$$\begin{aligned} \Delta T'(K^+K^+K^-) &= \Delta T(K^+K^+K^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) \\ \Delta T'(\pi^+K^+K^-) &= \Delta T(\pi^+K^+K^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) \\ \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= \Delta T(K^+\pi^+\pi^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) \end{aligned} \quad (3-40)$$

于是得到不同衰变道之间 ΔT 的关系式：

$$\Delta T'(K^+K^-K^+) - \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta T'(\pi^+K^+K^-) \quad (3-41)$$

在下面的数值分析中，将 $\Delta T'(K^+\pi^+\pi^-)$ 和 $\Delta T'(\pi^+K^+K^-)$ 作为独立的参数。对于振幅 P 的情况，可以通过类似的操作。

然后可以将四中衰变的衰变振幅写出来：

$$\begin{aligned} A(\pi^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T' + V_{tb}^*V_{td}P' \\ A(K^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{us}[T' + \Delta T'(K^+K^+K^-)] + V_{tb}^*V_{ts}[P' + \Delta P'(K^+K^+K^-)] \\ A(\pi^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{ud}[T' + \Delta T'(\pi^+K^+K^-)] + V_{tb}^*V_{td}[P' + \Delta P'(\pi^+K^+K^-)] \\ A(K^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{us}[T' + \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-)] + V_{tb}^*V_{ts}[P' + \Delta P'(K^+\pi^+\pi^-)] \end{aligned} \quad (3-42)$$

对于 B^- 衰变的情况，只需要在衰变振幅中分别用 $V_{ub}^*V_{uq}$ 和 $V_{tb}^*V_{tq}$ ，来替换 $V_{ub}V_{uq}^*$ 和 $V_{tb}V_{tq}^*$ 即可。因为所有的参数共同改变相同的相位不会对物理结果

造成影响, 所以, 可以将 T' 选为实数, 并将其他复参数记为: $P' = P_a + P_b i$, $\Delta T' = \Delta T_a + \Delta T_b i$, $\Delta P' = \Delta P_a + \Delta P_b i$ 。

其中, 衰变振幅中的 CKM 矩阵元 V_{ij} 已经在实验中有测量, 在本小节的数值计算中直接使用它们的实验数据, 数据来自 PDG 参数化形式的夸克混合角和 CP 破坏相角:

$$\begin{aligned} \theta_{13} &= 0.0034_{-0.0001}^{+0.0002}, \theta_{23} = 0.0412_{-0.0007}^{+0.0011}, \theta_{12} = 0.2273_{-0.0007}^{+0.0007} \\ \delta &= 1.208_{-0.039}^{+0.057} \end{aligned} \quad (3-43)$$

在前面 $SU(3)$ 味对称性的理论预期与实验数据对比中, 其中 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 与 $A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 的比值的理论预期与其对应的实验数据符合的较好。所以对于这两个衰变道来讲, 可以假设它们的衰变振幅不会被 $SU(3)$ 味对称性的破会而修正。这意味着: $T'(K^+K^+K^-) = T'(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 。此外, 关于 ΔT 还有关系式:

$$\begin{aligned} \Delta T'(K^+K^+K^-) &= \Delta T'(\pi^+\pi^+\pi^-) = 0 \\ \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= -\Delta T'(\pi^+K^+K^-) \end{aligned} \quad (3-44)$$

在这种情况下, 七个独立的参数: $T, P_a, P_b, \Delta T_a, \Delta T_b, \Delta P_a$ 和 ΔP_b , 去拟合八个实验数据: 包括四个衰变的分支比 Br 和 A_{cp} 。根据相应的八个实验数据, 通过如下方式构造 χ 函数:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(Acp0 - 0.117)^2}{0.024^2} + \frac{(Acp1 - 0.032)^2}{0.011^2} + \frac{(Acp2 + 0.141)^2}{0.044^2} \\ &+ \frac{(Acp3 + 0.043)^2}{0.012^2} + \frac{(Br0 - 15.2 \times 10^{-6})^2}{(1.4 \times 10^{-6})^2} + \frac{(Br1 - 51 \times 10^{-6})^2}{(3 \times 10^{-6})^2} \\ &+ \frac{(Br2 - 5 \times 10^{-6})^2}{(0.7 \times 10^{-6})^2} + \frac{(Br3 - 34 \times 10^{-6})^2}{(1 \times 10^{-6})^2} \end{aligned} \quad (3-45)$$

χ^2 的最小值为 0.044。与此对应的参数的中心值为 (带有 1σ 的误差范围):

$$\begin{aligned} T' &= (2.70_{-0.12}^{+0.14}) \times 10^{-5} \\ P' &= P_a + P_b i = (4.16_{-0.05}^{+0.07}) \times 10^{-6} - (7.22_{-1.0}^{+1.2}) \times 10^{-7} i \\ \Delta T' &= \Delta T_a + \Delta T_b i = (-2.04_{-0.20}^{+0.21}) \times 10^{-5} - (2.05_{-0.17}^{+0.19}) \times 10^{-5} i \\ \Delta P' &= \Delta P_a + \Delta P_b i = (-1.74_{-0.24}^{+0.25}) \times 10^{-6} - (4.06_{-0.31}^{+0.32}) \times 10^{-6} i \end{aligned} \quad (3-46)$$

由此拟合出的参数的中心值, 可以得出 B^+ 的四种衰变模式的 A_{CP} 和 Br 。下面的列表对比了由拟合出的参数得到的 A_{CP} , Br 的数值和相应的实验数据。通过对比发现, 拟合出的参数的值可以和实验数据符合的很好。

表 3-2 包含 $SU(3)$ 破坏效应的拟合结果与实验数据的对比。(第一, 二, 三列的输出值分别对应于式 (3-46), (3-47), (3-53) 的输入参数)

B^+ 衰变模式	A_{CP} [输出值]	A_{CP} [实验值]
$K^+\pi^+\pi^-$	0.031, 0.032, 0.032	0.032 ± 0.011
$K^+K^+K^-$	-0.042, -0.043, -0.043	-0.043 ± 0.012
$\pi^+\pi^+\pi^-$	0.120, 0.117, 0.118	0.117 ± 0.024
$\pi^+K^+K^-$	-0.142, -0.143, -0.140	-0.141 ± 0.044
B^+ 衰变模式	$Br(10^{-6})$ [输出值]	$Br(10^{-6})$ [实验值]
$K^+\pi^+\pi^-$	51.0, 51.0, 51.1	51.0 ± 3.0
$K^+K^+K^-$	33.9, 34.1, 33.9	34.0 ± 1.0
$\pi^+\pi^+\pi^-$	15.2, 15.2, 15.2	15.2 ± 1.4
$\pi^+K^+K^-$	5.0, 5.0, 5.0	5.0 ± 0.7

比值 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 的理论预期和实验数据的相符使得前文做出假设, 这两个衰变道没有 $SU(3)$ 味对称性的破坏。如果在这里假设 $\Delta T'(K^+K^+K^-)$ 并不为零, 同样的拟合实验数据的方法可以得到如下的参数的数值:

$$\begin{aligned}
 T' &= 1.7 \times 10^{-5}, \quad P' = -4.5 \times 10^{-6} - 5.7 \times 10^{-7}i \\
 \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= 3.3 \times 10^{-5} + 4.2 \times 10^{-5}i \\
 \Delta P'(K^+\pi^+\pi^-) &= -3.3 \times 10^{-6} - 4.4 \times 10^{-6}i \\
 \Delta T'(\pi^+K^+K^-) &= -3.4 \times 10^{-5} - 1.8 \times 10^{-5}i \\
 \Delta P'(\pi^+K^+K^-) &= -4.5 \times 10^{-6} - 5.7 \times 10^{-7}i \quad (3-47)
 \end{aligned}$$

这样的话, $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-) = -2.7$ 同样和实验数据的值相符合。此情况下得到的参数计算出的 A_{CP} 和 Br 的数值写在上述表格 (3-2) 的第二列。

所以, 如果只是考虑 $SU(3)$ 味对称性的破坏效应的话, 可以得到和 A_{CP} 和 Br 实

验数据相符合的参数的解，但是在这种情况下，由拟合出的参数的数值可以发现， $SU(3)$ 的味对称性的破坏效应会很大。

3.2.4.3 同时考虑 $SU(3)$ 味对称性破坏和动量依赖项的贡献

现在来分析同时考虑 $SU(3)$ 味对称性破坏的效应 ΔT 和 ΔP ，以及动量依赖项的贡献 T^p 和 P^q 。尤其是在考虑了 T^p 和 P^p 时，拟合实验数据的参数能否得到比较小的 $SU(3)$ 对称性破坏的效应。

在不忽略 m_K 和 m_π 的情况下，两次导数的项中也会有 $SU(3)$ 味对称性的破坏。这些多出来的项同时满足前述关系式：

$$\Delta T^p(K^+K^-K^+) - \Delta T^p(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta T^p(\pi^+K^+K^-) - \Delta T^p(\pi^+\pi^+\pi^-) \quad (3-48)$$

于是可以通过与前述类似的重新定义振幅的方法，将衰变 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 的 $\Delta T^p(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 归入到 $SU(3)$ 味对称性的振幅里面，所以有结果：

$$\begin{aligned} T_t &= a^T + \frac{b^T}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^T}{m_B^2}(s-t) + \Delta a^T \\ P_t &= a^P + \frac{b^P}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^P}{m_B^2}(s-t) + \Delta a^P \end{aligned} \quad (3-49)$$

其中，

$$\begin{aligned} \Delta a^T(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 0 \\ \Delta a^T(K^+K^+K^-) &= \Delta T'(K^+K^+K^-) \\ \Delta a^T(K^+\pi^+\pi^-) &= \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) \\ \Delta a^T(\pi^+K^+K^-) &= \Delta T'(\pi^+K^+K^-) \end{aligned} \quad (3-50)$$

如果用 $a^T + \Delta a^T$ 和 $a^P + \Delta a^P$ 代替 a^T 和 a^P ，如下的计算衰变宽度的公式：

$$\Gamma = \frac{M_B}{512\pi^3} \left(|\tilde{a}|^2 + \frac{2}{3}(\tilde{a}\tilde{b}^* + \tilde{b}\tilde{a}^*) + \frac{1}{2}|\tilde{b}|^2 + \frac{1}{6}|\tilde{c}|^2 \right) \quad (3-51)$$

通过数据拟合，不能找到使得味对称破缺 $\Delta T'$ 和 $\Delta P'$ 比 T' 和 P' 小一个或者几个数量级的解。下面所示的是一组与实验数据符合的很好的参数值：

$$a^T = 1.3 \times 10^{-5}, \quad a^P = 1.1 \times 10^{-6} + 5.7 \times 10^{-6}i$$

$$\begin{aligned}
b^T &= 1.1 \times 10^{-5} - 1.2 \times 10^{-5}i, & b^P &= 7.0 \times 10^{-6} - 2.1 \times 10^{-5}i \\
c^T &= 2.4 \times 10^{-5} + 4.3 \times 10^{-5}i, & c^P &= 1.5 \times 10^{-5} + 3.4 \times 10^{-5}i \\
\Delta a^T(K^+\pi^+\pi^-) &= -1.2 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-5}i & (3-52) \\
\Delta a^P(K^+\pi^+\pi^-) &= 3.0 \times 10^{-6} - 1.4 \times 10^{-6}i \\
\Delta a^T(K^+K^-\pi^+) &= -1.4 \times 10^{-5} + 1.4 \times 10^{-5}i \\
\Delta a^P(K^+K^-\pi^+) &= -3.8 \times 10^{-6} + 5.0 \times 10^{-6}i
\end{aligned}$$

所以，在同时考虑了 ΔT 和 ΔP ，以及 T^p 和 P^q 时，可以拟合出和实验数据相符的参数值，但是从拟合出的参数结果 (3-53) 中可以看出，这种情况下的 $SU(3)$ 味对称性的破坏依然很大。

关于对 B^\pm 介子的三体非轻衰变，我们也考虑了从 U -spin (d 和 s) 味对称性的角度来研究^[46]，可以得到跟上述结果一致的结论。

3.3 $B \rightarrow PPP$ 衰变振幅的 $SU(3)$ 和同位旋对称性破坏效应

3.3.1 $B \rightarrow PPP$ 衰变振幅的线性关系

前面所述的从 $SU(3)$ 夸克味道对称性对 B^+ 介子的衰变过程的分析可以应用到 B_d^0 和 B_s^0 的三体非轻衰变中。 B_d^0 和 B_s^0 有许多不同的衰变道，一些研究组做过这方面的研究^[47]，而我们会从 $SU(3)$ 味道对称性角度找出一些衰变振幅之间的关系。另外由于衰变的过程中有较大的味道对称性破坏，从不同的 B_d^0 和 B_s^0 的衰变道中找到一些不受味道对称性破坏影响的线性关系会使得我们可以更好地了解 B 介子的衰变。在这一节中，我们会从 $B \rightarrow PPP$ 全对称衰变振幅的角度来分析。全对称的衰变振幅 \mathcal{A}_{FS} 和通常的衰变振幅 $A(P_1(p_1)P_2(p_2)P_3(p_3))$ 的关系如下所示^[48]：

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{FS}(P_1P_2P_3) &= & (3-53) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (A(P_1(p_1)P_2(p_2)P_3(p_3)) + A(P_1(p_2)P_2(p_3)P_3(p_1)) + A(P_1(p_3)P_2(p_1)P_3(p_2)))
\end{aligned}$$

其中，末态粒子 $P_{1,2,3}$ 的动量为 $p_{1,2,3}$ 。

下面我们会用衰变 $B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0$ 和 $B_d^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-$ 来说明为什么不同衰变道的全对称的衰变振幅之间会有线性关系。展开 T 的表达式 (3-12)，可以得

到:

$$T(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0) = T(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0) = \sqrt{2} (c(6) + d(6) + 2c(\overline{15}) + 2d(\overline{15}))$$

由于衰变振幅要含有动量依赖的部分, 应该确认在考虑了动量依赖部分的振幅贡献后, 上述衰变道的相等关系是否还成立。展开动量依赖部分的振幅 T^p (附录 (C)):

$$\begin{aligned} T^p(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0) &= & (3-54) \\ & \alpha_1 p_B \cdot p_1 + \alpha_2 p_B \cdot p_2 + \alpha_3 p_B \cdot p_3 + \alpha_4 p_1 \cdot p_2 + \alpha_5 p_1 \cdot p_3 + \alpha_6 p_2 \cdot p_3 \\ T^p(B_d^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-) &= \\ & \beta_1 p_B \cdot p_1 + \beta_2 p_B \cdot p_2 + \beta_3 p_B \cdot p_3 + \beta_4 p_1 \cdot p_2 + \beta_5 p_1 \cdot p_3 + \beta_6 p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

其中上式中的系数 α_i 和 β_i 由下式给出:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{2} (c'(6)_2 + 2c'(\overline{15})_2 + d'(6)_3 + 2d'(\overline{15})_3) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-b'(6)_1 + b'(6)_2 - 3b'(\overline{15})_1 + 3b'(\overline{15})_2 + c'(\overline{3})_2 - c'(\overline{3})_3 + c'(6)_1 \\ &+ c'(6)_3 + c'(\overline{15})_1 + 3c'(\overline{15})_3 + d'(6)_1 + d'(6)_3 + 5d'(\overline{15})_1 - d'(\overline{15})_3) & (3-55) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (b'(6)_1 - b'(6)_2 + 3b'(\overline{15})_1 - 3b'(\overline{15})_2 - c'(\overline{3})_2 + c'(\overline{3})_3 + c'(6)_1 + c'(6)_3 \\ &+ 3c'(\overline{15})_1 + c'(\overline{15})_3 + d'(6)_1 + 2d'(6)_2 - d'(6)_3 - d'(\overline{15})_1 + 4d'(\overline{15})_2 + d'(\overline{15})_3) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-b''(6)_2 + b''(6)_3 - 3b''(\overline{15})_2 + 3b''(\overline{15})_3 + c''(\overline{3})_1 - c''(\overline{3})_2 + c''(6)_1 + c''(6)_3 \\ &+ c''(\overline{15})_1 + 3c''(\overline{15})_2 - d''(6)_1 + 2d''(6)_2 + d''(6)_3 + d''(\overline{15})_1 - d''(\overline{15})_2 + 4d''(\overline{15})_3) \\ \alpha_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (b''(6)_2 - b''(6)_3 + 3b''(\overline{15})_2 - 3b''(\overline{15})_3 - c''(\overline{3})_1 + c''(\overline{3})_2 + c''(6)_1 \\ &+ c''(6)_3 + 3c''(\overline{15})_1 + c''(\overline{15})_2 + d''(6)_1 + d''(6)_3 - d''(\overline{15})_1 + d''(\overline{15})_2) \\ \alpha_6 &= \sqrt{2} (c''(6)_2 + 2c''(\overline{15})_3 + d''(6)_1 + 2d''(\overline{15})_1) \end{aligned}$$

以及:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{2} (c'(6)_2 + 2c'(\overline{15})_2 + d'(6)_3 + 2d'(\overline{15})_3) \\ \beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (b'(6)_1 - b'(6)_2 + b'(\overline{15})_1 - b'(\overline{15})_2 + c'(\overline{3})_2 - c'(\overline{3})_3 + c'(6)_1 + c'(6)_3 \\ &+ c'(\overline{15})_1 + 3c'(\overline{15})_3 + d'(6)_1 + 2d'(6)_2 - d'(6)_3 - 3d'(\overline{15})_1 + 4d'(\overline{15})_2 + 3d'(\overline{15})_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-b'(6)_1 + b'(6)_2 - b'(\overline{15})_1 + b'(\overline{15})_2 - c'(\overline{3})_2 + c'(\overline{3})_3 + c'(6)_1 \right. \\
&\quad \left. + c'(6)_3 + 3c'(\overline{15})_1 + c'(\overline{15})_3 + d'(6)_1 + d'(6)_3 + 7d'(\overline{15})_1 - 3d'(\overline{15})_3 \right) \\
\beta_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b''(6)_2 - b''(6)_3 + b''(\overline{15})_2 - b''(\overline{15})_3 + c''(\overline{3})_1 - c''(\overline{3})_2 + c''(6)_1 \right. \\
&\quad \left. + c''(6)_3 + c''(\overline{15})_1 + 3c''(\overline{15})_2 + d''(6)_1 + d''(6)_3 - 3d''(\overline{15})_1 + 7d''(\overline{15})_2 \right) \\
\beta_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-b''(6)_2 + b''(6)_3 - b''(\overline{15})_2 + b''(\overline{15})_3 - c''(\overline{3})_1 + c''(\overline{3})_2 + c''(6)_1 + c''(6)_3 \right. \\
&\quad \left. + 3c''(\overline{15})_1 + c''(\overline{15})_2 - d''(6)_1 + 2d''(6)_2 + d''(6)_3 + 3d''(\overline{15})_1 - 3d''(\overline{15})_2 + 4d''(\overline{15})_3 \right) \\
\beta_6 &= \sqrt{2} \left(c''(6)_2 + 2c''(\overline{15})_3 + d''(6)_1 + 2d''(\overline{15})_1 \right)
\end{aligned} \tag{3-56}$$

如果只是从上式所给的系数 α_i 和 β_i 来看, $T^p(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)$ 和 $T^p(B_d^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)$ 不再相等。但是仍然有结论:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 \tag{3-57}$$

这使得在考虑全对称的衰变振幅的时候, 可以有:

$$T^p(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)_{FS} = T^p(B_d^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)_{FS} \tag{3-58}$$

同理, 企鹅图振幅 P 和 P^p 有相似的性质。

全对称的衰变振幅 $\mathcal{A}_{FS} = V_{ub}V_{uq}^*(T_{FS} + T_{FS}^p) + V_{tb}V_{tq}^*(P_{FS} + P_{FS}^p)$ 满足如下等式:

$$\mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)_{FS} = \mathcal{A}(B_d^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)_{FS} \tag{3-59}$$

从这个例子可以看出, 在考虑全对称的衰变振幅的时候我们可以找到更多的关系式。

如果对所有的衰变道都做类似的计算, 可以得到的关系式如下: 对于 $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$ 诱导的衰变, 有^[48]:

1. $B \rightarrow K\pi\pi$

$$S1.1 = \mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)_{FS} - \mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)_{FS} = 0$$

$$S1.2 = \sqrt{2}\mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)_{FS} - \mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^0\pi^+\pi^-)_{FS} + 2\mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^0\pi^0\pi^0)_{FS} = 0$$

$$S1.3 = \sqrt{2}\mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)_{\text{FS}} + \mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-)_{\text{FS}} - 2\mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^+\pi^0\pi^0)_{\text{FS}} = 0$$

$$2. B \rightarrow KK\bar{K}$$

$$S2.1 = -\mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^+K^+K^-)_{\text{FS}} + \mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^+K^0\bar{K}^0)_{\text{FS}} \\ + \mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^0K^+K^-)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^0K^0\bar{K}^0)_{\text{FS}} = 0$$

$$3. B_s^0 \rightarrow \pi K\bar{K}$$

$$S3.1 = \sqrt{2}\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0K^+K^-)_{\text{FS}} - \sqrt{2}\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0K^0\bar{K}^0)_{\text{FS}} \\ - \mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^-K^+\bar{K}^0)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^+K^-\bar{K}^0)_{\text{FS}} = 0$$

$$4. B_s^0 \rightarrow \pi\pi\pi$$

$$S4.1 = 2\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-)_{\text{FS}} = 0$$

对于 $\bar{b} \rightarrow \bar{d}$ 诱导的衰变, 有:

$$1. B \rightarrow \pi K\bar{K}$$

$$D1.1 = -\sqrt{2}\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^0K^+K^-)_{\text{FS}} + \mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+K^0K^-)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-)_{\text{FS}} \\ + \sqrt{2}\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^0K^0\bar{K}^0)_{\text{FS}} + \mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^-K^+\bar{K}^0)_{\text{FS}} \\ + \mathcal{A}(B^+ \rightarrow \pi^+K^0\bar{K}^0)_{\text{FS}} - \sqrt{2}\mathcal{A}(B^+ \rightarrow \pi^0K^+\bar{K}^0)_{\text{FS}} = 0$$

$$2. B \rightarrow \pi\pi\pi$$

$$D2.1 = 2\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-)_{\text{FS}} = 0$$

$$D2.2 = 2\mathcal{A}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B^+ \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^+)_{\text{FS}} = 0$$

$$3. B_s^0 \rightarrow K\pi\pi$$

$$D3.1 = -2\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^0\pi^0)_{\text{FS}} + \mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^+\pi^-)_{\text{FS}} - \sqrt{2}\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow K^-\pi^+\pi^0)_{\text{FS}} = 0$$

3.3.2 $SU(3)$ 和同位旋对称性破坏效应

$SU(3)$ 夸克味道对称性破坏效应主要来自 u , d 和 s 夸克的质量差别。类似于前面章节考虑 B^+ 介子衰变时考虑对称性破坏效应的方法, 我们将 u ,

d 和 s 夸克质量矩阵用单位矩阵 I 和盖尔曼矩阵 λ_3 和 λ_8 :

$$\begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(m_u + m_d + m_s)I + \frac{1}{2}(m_u - m_d)X + \frac{1}{6}(m_u + m_d - 2m_s)W \quad (3-60)$$

在上式中 X 和 W 矩阵如下所示:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

与 s 夸克质量相比, u 和 d 夸克质量要小很多, $SU(3)$ 味道对称性主要来自较大的 m_s 。如果忽略 s 夸克质量, $SU(3)$ 对称性剩下的则为同位旋对称性。那么在研究 $SU(3)$ 味对称性时, 不需要考虑与 X 矩阵成正比的项的贡献, 只需要考虑 W 矩阵的贡献。在考虑同位旋对称性破坏的时候则只要考虑 X 矩阵的贡献。

3.3.2.1 $SU(3)$ 味对称性破坏效应

在考虑衰变的味对称性破坏时, 我们的方法与前面章节考虑味对称性破坏的方法一样。通过在 T 振幅表达式中插入 W 矩阵来构建考虑对称性破坏之后的衰变振幅。对于衰变道 $B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0$ 和 $B^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-$, 衰变振幅的 $SU(3)$ 对称性破坏修正 ΔT , 如下所示:

$$\begin{aligned} \Delta T(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0) &= \sqrt{2} \left(c_1^T(6) + \sqrt{2}c_2^T(6) - 2c_3^T(6) + \sqrt{2}c_4^T(6) + c_5^T(6) + c_1^T(\overline{15}) \right. \\ &+ c_2^T(\overline{15}) - 2c_3^T(\overline{15}) + c_4^T(\overline{15}) + c_5^T(\overline{15}) + d_1^T(6) + d_2^T(6) - 2d_3^T(6) + d_4^T(6) \\ &+ d_5^T(6) + d_1^T(\overline{15}) + d_2^T(\overline{15}) - 2d_3^T(\overline{15}) + d_4^T(\overline{15}) + d_5^T(\overline{15}) \left. \right) \quad (3-62) \end{aligned}$$

并且:

$$\Delta T(B^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-) = \Delta T(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0) \quad (3-63)$$

这也使得这两个衰变道的全对称衰变振幅在考虑了 $SU(3)$ 对称性破坏之后仍然成立。也即:

$$S1.1 = \mathcal{A}(B^0 \rightarrow K^+\pi^0\pi^-)_{FS} - \mathcal{A}(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0)_{FS} = 0 \quad (3-64)$$

需要注意的是即使 $SU(3)$ 对称性破坏会改变上述两个衰变道中每一个的振幅，但是两个衰变道之间的线性关系并没有改变。通过做类似的计算，可以得到前面所述的全对称的衰变振幅的线性关系仍然成立。也即：

$$\begin{aligned} S_{1.1} = 0, \quad S_{2.1} = 0, \quad S_{1.3} = 0 \quad S_{2.1} = 0, \quad S_{3.1} = 0, \quad S_{4.1} = 0 \\ D_{1.1} = 0, \quad D_{2.1} = 0, \quad D_{2.2} = 0, \quad D_{3.1} = 0 \end{aligned} \quad (3-65)$$

上述等式在考虑了 $SU(3)$ 味道对称性破坏之后仍然成立。

实验上如果可以证实上述的线性关系，那么 B 介子衰变的 $SU(3)$ 味对称性的分析方法就可以有重要的实验支持。

3.3.2.2 同位旋对称性破坏效应

u 和 d 夸克质量的不同导致了同位旋对称性的破坏。这一节将考虑上述全对称的衰变振幅的线性关系在同位旋对称性破坏下是否还成立。

考虑同位旋对称性破坏的方法类似于前面一节讨论 $SU(3)$ 对称性破坏的方法，不同的是，对于同位旋破坏的方法将使用 X 矩阵。对于缩并矩阵之后得到的独立项的系数记为， $a_i^{T^I}$, $b_i^{T^I}$, $c_i^{T^I}$ 和 $d_i^{T^I}$ 。展开考虑了同位旋破坏效应的振幅 ΔT^I ，我们发现在上述的全对称衰变振幅的线性关系式中，只有 $S_{4.1}$ (3-60) 仍然成立，其他的线性关系在考虑了同位旋效应之后都不成立了。

对于衰变 $B_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$ 和 $B_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ，其中的每一个衰变道的衰变振幅都受到同位旋对称性破坏的影响，如下所示：

$$\begin{aligned} \Delta T^I(B_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0) &= \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}(a_2^{T^I}(\bar{3}) + 2a_2^{T^I}(\bar{15}) + 2a_3^{T^I}(\bar{15}) + b_2^{T^I}(\bar{15}) + b_3^{T^I}(\bar{15}) + b_4^{T^I}(\bar{15}) + b_5^{T^I}(\bar{15})) \\ \Delta T^I(B_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) &= \\ & \sqrt{2}(a_2^{T^I}(\bar{3}) + 2a_2^{T^I}(\bar{15}) + 2a_3^{T^I}(\bar{15}) + b_2^{T^I}(\bar{15}) + b_3^{T^I}(\bar{15}) + b_4^{T^I}(\bar{15}) + b_5^{T^I}(\bar{15})) \end{aligned}$$

但是同位旋对称性破坏效应对这两个衰变道的影响可以满足下述关系：

$$S_{4.1} = 2\mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0)_{\text{FS}} - \mathcal{A}(B_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-)_{\text{FS}} = 0. \quad (3-66)$$

所以，可以看出 $S_{4.1} = 0$ 这个关系式不受 s 夸克质量引起的 $SU(3)$ 味道对称性破坏的影响，同时也不受 u 和 d 夸克质量之差引起的同位旋对称性破坏的影响。

我们还发现了其他一些不受同位旋对称性破坏效应影响的线性关系。对于 $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$ 诱导的衰变道，新的关系式可以将 $S1.2$ 和 $S1.3$ (3-60) 联系起来，如下所示：

$$\begin{aligned} & [\sqrt{2}\Delta T^I(B^+ \rightarrow K^0\pi^+\pi^0) - \Delta T^I(B^0 \rightarrow K^0\pi^+\pi^-) + 2\Delta T^I(B^0 \rightarrow K^0\pi^0\pi^0)] \\ & = -[\sqrt{2}\Delta T^I(B^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0) + \Delta T^I(B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-) \\ & \quad - 2\Delta T^I(B^+ \rightarrow K^+\pi^0\pi^0)] \end{aligned} \quad (3-67)$$

即使上述等式左右两边在考虑了同位旋对称性破坏之后不再为零，但是他们有关系：

$$S1.2 = -S1.3 \neq 0 \quad (3-68)$$

对于 $\bar{b} \rightarrow \bar{d}$ 诱导的衰变道，有：

$$\begin{aligned} & [2\Delta T^I(B^+ \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^+) - \Delta T^I(B^+ \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^+)] \\ & = -[-2\Delta T^I(B_s^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^0\pi^0) + \Delta T^I(B_s^0 \rightarrow \bar{K}^0\pi^+\pi^-) \\ & \quad - \sqrt{2}\Delta T^I(B_s^0 \rightarrow K^-\pi^+\pi^0)] \\ & \sqrt{2}[2\Delta T^I(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0) - \Delta T^I(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)] \\ & = -[2\Delta T^I(B^+ \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^+) - \Delta T^I(B^+ \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^+)] \end{aligned} \quad (3-69)$$

在考虑了同位旋对称性破坏之后， $D2.1$, $D2.2$ 和 $D3.1$ (3-60) 都不再为零。但是上式表示：

$$\sqrt{2}D2.1 = -D2.2 \neq 0, \quad D2.2 = -D3.1 \neq 0 \quad (3-70)$$

所有这些在考虑了 $SU(3)$ 和同位旋对称性破坏效应之后仍然成立的线性关系如果可以在实验上得到验证，这些线性关系就会对 B 介子衰变提供更多重要的信息。

3.4 本章小结

本章第一部分首先从 $SU(3)$ 味对称性的角度分析了 B^+ 介子的带电三体衰变，并从夸克味道对称性的角度对衰变 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$, $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$,

$B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 做出了关于 A_{CP} 之间关系的理论预期。发现理论预期与相关的实验数据不相符，于是需要在 $SU(3)$ 味对称性之外，考虑别的方面的衰变振幅贡献。然后分别考虑 u ， d 和 s 夸克之间质量之差造成的 $SU(3)$ 味对称性的破坏以及在 $SU(3)$ 对称性下依赖于末态粒子动量的振幅贡献。在进行了相关的数值计算分析之后，发现必须考虑比较大的 $SU(3)$ 味道对称性破坏效应才能比较好的解释实验数据。

第二部分，从 $SU(3)$ 味道对称性出发考虑了 B^+ ， B_d^0 和 B_s^0 的全对称的衰变振幅，找出了不同衰变道之间的衰变振幅的线性关系。然后考虑了 $SU(3)$ 和同位旋的对称性破坏效应对所得到的全对称的衰变振幅的影响，并找出了不受对称性破坏影响的线性关系。

全文总结

本文主要研究了夸克味道混合矩阵的问题以及 B^\pm 介子的带电三体非轻衰变。在夸克味道混合方面介绍了一种新的参数化 CKM 矩阵的方法。而对于 B^\pm 介子衰变，从夸克味道对称性来构建衰变振幅，并考虑了其他可能的振幅贡献，并进行了相关的数值分析计算。下面将主要结果总结如下：

夸克味道混合方面，首先介绍了九种数学上等价的 CKM 矩阵的参数化方式，在这九种参数化方式中，选取了三代夸克之间的三个混合角以及一个表示 CP 破坏的相角作为参数。但是在这九种参数化中，夸克混合角和表示 CP 破坏的相角都不是实验中的可观测量，参数值的大小会依赖所选参数的方法而不同。由于 CKM 矩阵是幺正矩阵，由其幺正性条件可以再复平面中定义一个幺正三角形，其中幺正三角形的内角 α ， β 和 γ 均为实验中的客观测量。同时注意到 CKM 矩阵的矩阵元的绝对值 V_{ij} 亦是实验上的客观测量。在本文介绍的新的 CKM 矩阵的参数化的方法中，选择三个矩阵元的绝对值 V_{ij} 以及幺正三角形三个内角 α ， β 和 γ 中的一个作为标志 CP 破坏的相角作为四个独立的参数来参数化 CKM 矩阵。由于所选择的四个参数均为实验中的客观测量，所以不存在参数值对参数方法选择的依赖问题。并且通过研究发现，不能通过选择三个夸克混合角加上 α ， β 和 γ 中的一个作为四个独立参数来实现参数化。然后给出了对应于新的 12 种参数化的类似 Wolfenstein 参数化的构建方法。此外，还指出由于 β 角是现在实验中测量的最为准确的一个，所以在用新的方法参数化 CKM 矩阵的时候，选择将 β 角作为标志 CP 破坏的相角是最好的选择。

在 B^\pm 介子的带电三体衰变方面，首先从 $SU(3)$ 味对称性角度分析了 B^+ 的四种衰变方式： $B^+ \rightarrow \pi^+ K^+ K^-$ ， $B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ ， $B^+ \rightarrow K^+ K^+ K^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^-$ 的衰变分支比和 A_{CP} 。在 $SU(3)$ 对称性下构建出与末态粒子动量无关的衰变振幅，并由此对四个衰变模式之间的 A_{CP} 的关系做了对称性的理论预期，但是实验数据和相应的对称性理论预期不相符合。通过考虑由 u ， d 和 s 夸克之间质量的差别导致的 $SU(3)$ 夸克味道对称性的破坏，以及通过对粒子场求两次导数（保持洛伦兹不变的最低阶的导数项）导致的末态粒子动量相关振幅的贡献，修正了 B^+ 介子的衰变振幅。然后对修正之后的衰变振幅做了数值计算

的分析, 由实验数据拟合出了较好的参数的值, 但是由参数的拟合结果可以知道, 必须考虑比较大的 $SU(3)$ 对称性破坏效应才可以较好的解释相应的实验数据。然后我们又从 $SU(3)$ 味道对称性的角度分析了 B_s^0 , B_d^0 , B^+ 的衰变, 在考虑了衰变的全对称的衰变振幅的情况下找出了不同的衰变道的衰变振幅的一些线性关系。最后在考虑了 $SU(3)$ 和同位旋对称性的破坏效应之后, 又找出了那些不受味对称性破坏影响的线性关系。现在 LHCb 和其他一些实验组还在继续 B 介子的实验, 在未来有了更多的 B 介子衰变的实验数据的情况下, 可以对 B 的带电三体衰变做更为全面的分析和研究。

附录 A α, β, γ 参数化方法的表示矩阵

CKM 矩阵的 12 种不同形式的 α, β, γ 参数化方法表示如下：

$$V_{CKM}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & -\frac{(|V_{us}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{ud}| + |V_{ub}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha}}{|V_{us}||V_{cd}|} & \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & \frac{|V_{ub}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{td}|}{|V_{us}|} & -|V_{tb}|e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{cb}|^2)|V_{ub}| - |V_{ud}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{us}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{i\alpha} & \frac{|V_{ud}||V_{td}|e^{i\alpha} - |V_{ub}||V_{tb}|}{|V_{us}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\alpha_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{td}| - |V_{tb}||V_{ub}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}|} & -|V_{ub}|e^{i\alpha} \\ |V_{cd}| & \frac{(|V_{tb}|^2 - |V_{cd}|^2)|V_{td}| - |V_{ub}||V_{ud}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cd}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\alpha} - |V_{td}||V_{tb}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\alpha_4} = \begin{pmatrix} -|V_{ud}|e^{-i\alpha} & -\frac{|V_{ub}||V_{tb}| - |V_{td}||V_{ud}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}|} & |V_{ub}| \\ -\frac{|V_{td}||V_{tb}| - |V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{cb}|} & -\frac{(|V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{tb}| + |V_{ud}||V_{td}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{cb}|^2)|V_{cd}| + |V_{cb}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\beta}}{|V_{cs}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{cb}||V_{cd}| - |V_{td}||V_{tb}|e^{i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{i\beta} - |V_{cd}||V_{td}|}{|V_{cs}|} & -|V_{tb}|e^{i\beta} \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta} - |V_{cb}||V_{cd}|}{|V_{ub}|} & \frac{(|V_{cd}|^2 - |V_{ub}|^2)|V_{cb}| - |V_{cd}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta}}{|V_{cs}||V_{ub}|} & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{-i\beta} & \frac{|V_{cd}||V_{td}|e^{-i\beta} - |V_{cb}||V_{tb}|}{|V_{cs}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\beta_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{tb}|^2)|V_{td}| + |V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\beta}}{|V_{ts}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{td}||V_{tb}| - |V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{-i\beta} - |V_{cd}||V_{td}|}{|V_{ts}|} & -|V_{cb}|e^{-i\beta} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\beta_4} = \begin{pmatrix} -\frac{|V_{td}||V_{tb}| - |V_{cb}||V_{cd}|e^{i\beta}}{|V_{ub}|} & -\frac{(|V_{ub}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{tb}| + |V_{td}||V_{cb}||V_{cd}|e^{i\beta}}{|V_{ts}||V_{ub}|} & |V_{ub}| \\ -|V_{cd}|e^{i\beta} & -\frac{|V_{cb}||V_{tb}| - |V_{cd}||V_{td}|e^{i\beta}}{|V_{ts}|} & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\gamma_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & -\frac{|V_{ud}||V_{cd}| - |V_{ub}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{us}|} & -|V_{cb}|e^{i\gamma} \\ |V_{td}| & \frac{(|V_{ub}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{ud}| - |V_{ub}||V_{cd}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{us}||V_{td}|} & -\frac{|V_{ud}||V_{ub}| - |V_{cd}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{td}|} \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\gamma_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ -|V_{cd}|e^{-i\gamma} & \frac{|V_{ud}||V_{cd}|e^{-i\gamma} - |V_{ub}||V_{cb}|}{|V_{us}|} & |V_{cb}| \\ \frac{|V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\gamma} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{tb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{tb}|^2)|V_{ub}| - |V_{ud}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\gamma}}{|V_{us}||V_{tb}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\gamma_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{cd}| - |V_{ub}||V_{cb}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}|} & -|V_{ub}|e^{-i\gamma} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & \frac{(|V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{cd}| - |V_{cb}||V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}||V_{td}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma} - |V_{cd}||V_{cb}|}{|V_{td}|} \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM}^{\gamma_4} = \begin{pmatrix} -|V_{ud}|e^{i\gamma} & \frac{|V_{ud}||V_{cd}|e^{i\gamma} - |V_{ub}||V_{cb}|}{|V_{cs}|} & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\gamma} - |V_{cd}||V_{cb}|}{|V_{tb}|} & \frac{(-|V_{tb}|^2 + |V_{cd}|^2)|V_{cb}| - |V_{cd}||V_{ud}||V_{ub}|e^{i\gamma}}{|V_{cs}||V_{tb}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}$$

附录 B $SU(3)$ 破坏项振幅

$SU(3)$ 破坏项的振幅 $T(q)$ 表示为:

$$\begin{aligned}
\Delta T(q) &= a_1^T(\bar{3})B_i H^a(\bar{3})W_a^i M_k^j M_l^k M_j^l + a_2^T(\bar{3})B_i H^i(\bar{3})M_k^j M_l^k M_j^a W_a^l \\
&+ b_1^T(\bar{3})H^i(\bar{3})W_i^a M_a^j B_j M_l^k M_k^l + b_2^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^j B_a W_j^a M_l^k M_k^l \\
&+ b_3^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^j B_j M_l^k M_k^a W_a^l \\
&+ c_1^T(\bar{3})H^a(\bar{3})W_a^i M_i^l M_l^j M_j^k B_k + c_2^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^l M_l^a W_a^j M_j^k B_k \\
&+ c_3^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^l M_l^j M_j^a W_a^k B_k + c_4^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^l W_l^a M_a^j M_j^k B_k \\
&+ a_1^T(6)B_a W_i^a H_k^{ij}(6)M_j^k M_n^l M_l^n + a_2^T(6)B_i H_k^{ia}(6)W_a^j M_j^k M_n^l M_l^n \\
&+ a_3^T(6)B_i H_k^{ij}(6)W_a^k M_j^a M_n^l M_l^n + a_4^T(6)B_i H_k^{ij}(6)M_j^k M_n^l M_l^a W_a^n \\
&+ b_1^T(6)B_a W_i^a H_k^{ij}(6)M_l^k M_n^l M_j^n + b_2^T(6)B_i H_k^{ia}(6)W_a^j M_l^k M_n^l M_j^n \\
&+ b_3^T(6)B_i H_k^{ij}(6)W_a^k M_l^a M_n^l M_j^n + b_4^T(6)B_i H_k^{ij}(6)W_l^a M_a^k M_n^l M_j^n \\
&+ b_5^T(6)B_i H_k^{ij}(6)W_n^a M_l^k M_a^l M_j^n \\
&+ c_1^T(6)B_i H_l^{jk}(6)W_a^i M_j^a M_k^n M_n^l + c_2^T(6)B_i H_l^{jk}(6)W_j^a M_a^i M_k^n M_n^l \\
&+ c_3^T(6)B_i H_l^{jk}(6)M_j^i W_k^a M_a^n M_n^l + c_4^T(6)B_i H_l^{jk}(6)M_j^i M_k^n W_a^l M_n^a \\
&+ c_5^T(6)B_i H_l^{jk}(6)M_j^i M_k^n M_a^l W_n^a \\
&+ d_1^T(6)B_a W_i^a H_l^{jk}(6)M_n^i M_j^l M_k^n + d_2^T(6)B_i H_l^{ak}(6)W_a^j M_n^i M_j^l M_k^n \\
&+ d_3^T(6)B_i H_l^{ja}(6)W_a^k M_n^i M_j^l M_k^n + d_4^T(6)B_i H_a^{jk} W_l^a(6)M_n^i M_j^l M_k^n \\
&+ d_5^T(6)B_i H_l^{jk}(6)W_n^a M_a^i M_j^l M_k^n \\
&+ a_1^T(\bar{15})B_a W_i^a H_k^{ij}(\bar{15})M_j^k M_n^l M_l^n + a_2^T(\bar{15})B_i H_k^{ia}(\bar{15})W_a^j M_j^k M_n^l M_l^n \\
&+ a_3^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})W_a^k M_j^a M_n^l M_l^n + a_4^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})M_j^k M_n^l M_l^a W_a^n \\
&+ b_1^T(\bar{15})B_a W_i^a H_k^{ij}(\bar{15})M_l^k M_n^l M_j^n + b_2^T(\bar{15})B_i H_k^{ia}(\bar{15})W_a^j M_l^k M_n^l M_j^n \\
&+ b_3^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})W_a^k M_l^a M_n^l M_j^n + b_4^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})W_l^a M_a^k M_n^l M_j^n \\
&+ b_5^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})W_n^a M_l^k M_a^l M_j^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_1^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_a^iM_j^aM_k^nM_n^l + c_2^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_j^aM_a^iM_k^nM_n^l \\
& +c_3^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iW_k^aM_a^nM_n^l + c_4^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iM_k^nW_a^lM_n^a \\
& +c_5^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iM_k^nM_a^lW_n^a \\
& +d_1^T(\overline{15})B_aW_i^aH_l^{jk}(\overline{15})M_n^iM_j^lM_k^n + d_2^T(\overline{15})B_iH_l^{ak}(\overline{15})W_a^jM_n^iM_j^lM_k^n \\
& +d_3^T(\overline{15})B_iH_l^{ja}(\overline{15})W_a^kM_n^iM_j^lM_k^n + d_4^T(\overline{15})B_iH_a^{jk}W_l^a(\overline{15})M_n^iM_j^lM_k^n \\
& +d_5^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_n^aM_a^iM_j^lM_k^n
\end{aligned}$$

$SU(3)$ 破坏项的振幅 $P(q)$ 可以用类似的方法得到。

附录 C 衰变振幅的动量依赖项修正

$SU(3)$ 对称性下振幅 T^p 的动量依赖项:

$$\begin{aligned}
T^p(q) = & a'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)M_l^k M_j^l + a'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})M_k^j(\partial^\mu M_l^k)M_j^l \\
& + a'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})M_k^j M_l^k(\partial^\mu M_j^l) + a''(\bar{3})_1 B_i H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)(\partial_\mu M_l^k)M_j^l \\
& + a''(\bar{3})_2 B_i H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)M_l^k(\partial_\mu M_j^l) + a''(\bar{3})_3 B_i H^i(\bar{3})M_k^j(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_j^l) \\
& + b'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)M_l^k M_k^l + b'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})M_i^j(\partial^\mu M_l^k)M_k^l \\
& + b'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})M_i^j M_l^k(\partial^\mu M_k^l) + b''(\bar{3})_1 B_j H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)(\partial_\mu M_l^k)M_k^l \\
& + b''(\bar{3})_2 B_j H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)M_l^k(\partial_\mu M_k^l) + b''(\bar{3})_3 B_j H^i(\bar{3})M_i^j(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_k^l) \\
& + c'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)M_l^j M_j^k + c'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})M_i^l(\partial^\mu M_j^j)M_j^k \\
& + c'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})M_i^l M_l^j(\partial^\mu M_j^k) + c''(\bar{3})_1 B_k H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)(\partial_\mu M_l^j)M_j^k \\
& + c''(\bar{3})_2 B_k H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)M_l^j(\partial_\mu M_j^k) + c''(\bar{3})_3 B_k H^i(\bar{3})M_i^l(\partial^\mu M_l^j)(\partial_\mu M_j^k) \\
& + a'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)M_n^l M_l^n + a'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_j^k(\partial^\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_j^k M_n^l(\partial^\mu M_l^n) + a''(6)_1 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)(\partial_\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a''(6)_2 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)M_n^l(\partial_\mu M_l^n) + a''(6)_3 B_i H_k^{ij}(6)M_j^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_l^n) \\
& + b'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)M_n^l M_j^n + b'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_l^k(\partial^\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_l^k M_n^l(\partial^\mu M_j^n) + b''(6)_1 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b''(6)_2 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)M_n^l(\partial_\mu M_j^n) + b''(6)_3 B_i H_k^{ij}(6)M_l^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_j^n) \\
& + c'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_j^i)M_k^n M_n^l + c'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)M_j^i(\partial^\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)M_j^i M_k^n(\partial^\mu M_n^l) + c''(6)_1 B_i H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_j^i)(\partial_\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c''(6)_2 B_i H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_j^i)M_k^n(\partial_\mu M_n^l) + c''(6)_3 B_i H_l^{ik}(6)M_j^i(\partial^\mu M_k^n)(\partial_\mu M_n^l) \\
& + d'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_n^i)M_j^l M_k^n + d'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)M_n^i(\partial^\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)M_n^i M_j^l(\partial^\mu M_k^n) + d''(6)_1 B_i H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_n^i)(\partial_\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d''(6)_2 B_i H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_n^i)M_j^l(\partial_\mu M_k^n) + d''(6)_3 B_i H_l^{ik}(6)M_n^i(\partial^\mu M_j^l)(\partial_\mu M_k^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)M_n^l M_l^n + a'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k(\partial^\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k M_n^l(\partial^\mu M_l^n) + a''(\overline{15})_1 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)(\partial_\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a''(\overline{15})_2 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)M_n^l(\partial_\mu M_l^n) + a''(\overline{15})_3 B_i H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_l^n) \\
& + b'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)M_n^l M_j^n + b'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k(\partial^\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k M_n^l(\partial^\mu M_j^n) + b''(\overline{15})_1 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b''(\overline{15})_2 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)M_n^l(\partial_\mu M_j^n) + b''(\overline{15})_3 B_i H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_j^n) \\
& + c'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)M_k^n M_n^l + c'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})M_j^i(\partial^\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})M_j^i M_k^n(\partial^\mu M_n^l) + c''(\overline{15})_1 B_i H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)(\partial_\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c''(\overline{15})_2 B_i H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)M_k^n(\partial_\mu M_n^l) + c''(\overline{15})_3 B_i H_l^{ik}(\overline{15})M_j^i(\partial^\mu M_k^n)(\partial_\mu M_n^l) \\
& + d'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)M_j^l M_k^n + d'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})M_n^i(\partial^\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})M_n^i M_j^l(\partial^\mu M_k^n) + d''(\overline{15})_1 B_i H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)(\partial_\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d''(\overline{15})_2 B_i H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)M_j^l(\partial_\mu M_k^n) + d''(\overline{15})_3 B_i H_l^{ik}(\overline{15})M_n^i(\partial^\mu M_j^l)(\partial_\mu M_k^n).
\end{aligned}$$

展开上述式子可得 α_i :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{m_B^2} &= -c'(6)_2 + c'(\overline{15})_1 \\
\frac{\alpha_2}{m_B^2} &= b'(\overline{3})_2 + b'(\overline{3})_3 + c'(\overline{3})_2 + a'(6)_2 + a'(6)_3 + b'(6)_2 - c'(6)_2 - d'(6)_3 \\
&\quad + 3a'(\overline{15})_2 + 3a'(\overline{15})_3 + 3b'(\overline{15})_2 + 3c'(\overline{15})_2 + 3d'(\overline{15})_3 - 2c'(\overline{15})_3 \\
\frac{\alpha_3}{m_B^2} &= \frac{1}{2}\{2b'(\overline{3})_1 + c'(\overline{3})_1 + 2a'(6)_1 + b'(6)_3 - d'(6)_2 \\
&\quad + 6a'(\overline{15})_1 + 3b'(\overline{15})_3 + c'(\overline{15})_1 - c'(\overline{15})_2 + 3d'(\overline{15})_2\} \\
&\quad + [b'(\overline{3})_2 + b'(\overline{3})_3 + c'(\overline{3})_3 + a'(6)_2 + a'(6)_3 + b'(6)_1 \\
&\quad - c'(6)_1 - c'(6)_3 - d'(6)_1 + 3a'(\overline{15})_2 + 3a'(\overline{15})_3 \\
&\quad + 3b'(\overline{15})_1 - c'(\overline{15})_2 + 3c'(\overline{15})_3 + 3d'(\overline{15})_1] \\
\frac{\alpha_4}{m_B^2} &= c''(6)_2 - c''(\overline{15})_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_5}{m_B^2} &= b''(\bar{3})_1 + b''(\bar{3})_2 + c''(\bar{3})_2 + a''(6)_1 + a''(6)_2 + b''(6)_2 - c''(6)_2 \\
&\quad - d''(6)_1 + 3a''(\bar{15})_1 + 3a''(\bar{15})_2 + 3b''(\bar{15})_2 - 2c''(\bar{15})_1 \\
&\quad + 3c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_1 \\
\frac{\alpha_6}{m_B^2} &= \frac{1}{2} \{ [2b''(\bar{3})_3 + c''(\bar{3})_3 + 2a''(6)_3 + b''(6)_1 - d''(6)_2 \\
&\quad + 6a''(\bar{15})_3 + 3b''(\bar{15})_1 + c''(\bar{15})_3 - c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_2] \\
&\quad + [b''(\bar{3})_1 + b''(\bar{3})_2 + c''(\bar{3})_1 + a''(6)_1 + a''(6)_2 + b''(6)_3 \\
&\quad - c''(6)_1 - c''(6)_3 - d''(6)_3 + 3a''(\bar{15})_1 + 3a''(\bar{15})_2 \\
&\quad + 3b''(\bar{15})_3 + 3c''(\bar{15})_1 - c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_3] \}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Glashow S. Partial Symmetries of Weak Interactions[J]. Nucl. Phys, 1961, 22:579–588.
- [2] Weinberg S. A Model of Leptons[J]. Phys. Rev. Lett., 1967, 19:1264–1266.
- [3] Salam A. Weak and Electromagnetic Interactions[J]. Conf. Proc, 1968, C680519:367–377.
- [4] Beringer J, et al. Review of Particle Physics (RPP)[J]. Phys. Rev, 2012, D86:010001.
- [5] Maggiore M. A Modern Introduction to Quantum Field Theory[M]. New York: Oxford University Press, 2005.
- [6] Higgs P W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons[J]. Phys. Rev. Lett., 1964, 13:508–509.
- [7] Cabibbo N. Unitary Symmetry and Leptonic Decays[J]. Phys. Rev. Lett, 1963, 10:531–533.
- [8] Kobayashi M, Maskawa T. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction[J]. Prog. Theor. Phys, 1973, 49:652–657.
- [9] Fritzsche H, Xing Z z. On the parametrization of flavor mixing in the standard model[J]. Phys. Rev, 1998, D57:594–597.
- [10] Jarlskog C. Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation[J]. Phys. Rev. Lett, 1985, 55:1039.
- [11] Wu D d. Rephasing invariants and CP violation[J]. Phys. Rev, 1986, D33:860–863.

- [12] Chau L L, Keung W Y. Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix[J]. Phys. Rev. Lett, 1984, 53:1802.
- [13] Bonna M e a. <http://www.utfit.org>.
- [14] Nakamura K, et al. Review of particle physics[J]. J. Phys, 2010, G37:075021.
- [15] Bjorken J D. Topics in B Physics[J]. Nucl. Phys. Proc. Suppl, 1989, 11:325–341.
- [16] Li G N, Lin H H, Xu D, et al. The α , β and γ parametrizations of CP-violating CKM phase[J]. Int.J.Mod.Phys, 2013, A 28:1350014.
- [17] Li G N, Lin H H, Xu D, et al. The β angle as the CP violating phase in the CKM matrix[J]. Phys. Lett, 2013, B718:1454–1456.
- [18] Wolfenstein L. Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix[J]. Phys. Rev. Lett, 1983, 51:1945.
- [19] Artuso M, Barberio E, Stone S. B Meson Decays[J]. PMC Phys, 2009, A3:3.
- [20] Bauer C W, Pirjol D, Stewart I W. A Proof of factorization for $B \rightarrow D\pi$ [J]. Phys. Rev. Lett, 2001, 87:201806.
- [21] Ali A, Kramer G, Li Y, et al. Charmless non-leptonic B_s decays to PP , PV and VV final states in the pQCD approach[J]. Phys. Rev, 2007, D76:074018.
- [22] Li H N, Yu H L. PQCD analysis of exclusive charmless B meson decay spectra[J]. Phys. Lett, 1995, B353:301–305.
- [23] Beneke M, Buchalla G, Neubert M, et al. QCD factorization for exclusive non-leptonic B-meson decays: General arguments and the case of heavy–light final states[J]. Nucl. Phys, 2000, B591(1):313–418.
- [24] Alves J, A Augusto, et al. The LHCb Detector at the LHC[J]. JINST, 2008, 3:S08005.
- [25] Aaij R, et al. Measurement of CP violation in the phase space of $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^-$ and $B^\pm \rightarrow K^\pm K^+ K^-$ decays[J]. Phys. Rev. Lett, 2013, 111:101801.

- [26] Lees J, et al. Study of the K^+K^- invariant-mass dependence of CP asymmetry in $B^+ \rightarrow K^+K^-K^+$ decays[J]. arXiv:1305.4218 [hep-ex], 2013.
- [27] Aaij R, et al. Measurement of CP violation in the phase space of $B^\pm \rightarrow K^+K^-\pi^\pm$ and $B^\pm \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^\pm$ decays[J]. Phys. Rev. Lett, 2014, 112:011801.
- [28] Amhis Y, et al. Averages of B-Hadron, C-Hadron, and tau-lepton properties as of early 2012[J]. arXiv:1207.1158 [hep-ex], 2012.
- [29] Zeppenfeld D. SU(3) relations for B-meson decays[J]. Z. Phys. C, 1981, 8(1):77–84.
- [30] Gronau M, Hernandez O F, London D, et al. Decays of B mesons to two light pseudoscalars[J]. Phys. Rev, 1994, D50:4529–4543.
- [31] Bhattacharya B, Gronau M, Rosner J L. CP asymmetries in three-body B^\pm decays to charged pions and kaons[J]. Phys. Lett, 2013, B726:337–343.
- [32] Dighe A S, Gronau M, Rosner J L. B decays involving η and η' in the light of the $B \rightarrow K\eta'$ process[J]. Phys. Rev. Lett, 1997, 79:4333–4336.
- [33] He X G, HJ B M. Hadron decay amplitudes from $B \rightarrow K\pi$ and $B \rightarrow \pi\pi$ decays[J]. arXiv:hep-ph/0410098, 2004.
- [34] He X G, Li S F, Lin H H. CP Violation in $B_s^0 \rightarrow K^-\pi^+$, $B^0 \rightarrow K^+\pi^-$ Decays and Tests for SU(3) Flavor Symmetry Predictions[J]. JHEP, 2013, 1308:065.
- [35] Lipkin H J. Is observed direct CP violation in $B(d) \rightarrow K^+\pi^-$ due to new physics ? Check standard model prediction of equal violation in $B(s) \rightarrow K^-\pi^+$ [J]. Phys. Lett, 2005, B621:126–132.
- [36] Deshpande N, He X G, Shi J Q. SU(3) flavor symmetry and CP violating rate differences for charmless $B \rightarrow PV$ decays[J]. Phys. Rev, 2000, D62:034018.
- [37] Buchalla G, Buras A J, Lautenbacher M E. Weak decays beyond leading logarithms[J]. Rev. Mod. Phys, 1996, 68:1125–1144.

- [38] Deshpande N, He X G. CP asymmetry relations between $\bar{B}^0 \rightarrow \pi\pi$ and $\bar{B}^0 \rightarrow \pi K$ rates[J]. Phys. Rev. Lett, 1995, 75:1703–1706.
- [39] Savage M J, Wise M B. SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays[J]. Phys. Rev, 1989, D39:3346.
- [40] Savage M J, Wise M B. Erratum: SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays[J]. Phys. Rev, 1989, D40:3127.
- [41] Deshpande N, Eilam G, He X G, et al. The nonresonant Cabibbo suppressed decay $B^\pm \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^\pm$ and signal for CP violation[J]. Phys. Rev, 1995, D52:5354–5357.
- [42] Fajfer S, Pham T N, Prapotnik A. CP violation in the partial width asymmetries for $B^- \rightarrow \pi^+\pi^-K^-$ and $B^- \rightarrow K^+K^-K^-$ decays[J]. Phys. Rev, 2004, D70:034033.
- [43] Cheng H Y, Chua C K, Soni A. Charmless three-body decays of B mesons[J]. Phys. Rev, 2007, D76:094006.
- [44] Zhang Z H, Guo X H, Yang Y D. CP violation in $B^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^+\pi^-$ in the region with low invariant mass of one $\pi^+\pi^-$ pair[J]. Phys. Rev, 2013, D87(7):076007.
- [45] Xu D, Li G N, He X G. Large SU(3) breaking effects and CP violation in B^+ decays into three charged octet pseudoscalar mesons[J]. Int. J. Mod. Phys, 2014, A29:1450011.
- [46] Xu D, Li G N, He X G. U-spin analysis of CP violation in B^- decays into three charged light pseudoscalar mesons[J]. Phys. Lett, 2014, B728:579–584.
- [47] Bhubanjyoti Bhattacharya e a, Michael Gronau. Charmless $B \rightarrow PPP$ decays: The fully-symmetric final state[J]. Phys.Rev, 2014, D89:074043.
- [48] Xiao-Gang He G N L, Xu D. SU(3) and Isospin Breaking Effects on B to PPP Amplitudes[J]. arXiv:1410.0476, 2014.

致 谢

在上海交通大学物理与天文系的两年半硕士研究生的生活即将结束了，这两年来在交大校园里的快乐的生活仍然像是昨天一样，历历在目。上海交通大学粒子物理宇宙学研究所的浓厚的学术研究氛围使我获益匪浅。谨在此向关心和支持我的老师，同学，朋友，家人表达诚挚的感谢。

首先，我要衷心地感谢我的硕士学位导师何小刚教授。何老师在我读硕士研究生期间给予我物理研究，学习，生活上很多有益的指导和细致入微的关心。而何老师对于粒子物理的活跃的思维，认真负责的科研态度，乐观积极的生活态度都对我有很大的积极的影响。何老师对待物理学研究的热情和态度是我一生学习的楷模。同时，我还感谢这两年多来在我学习和科研过程中给予我关系和指导的物理与天文系的陈列文老师，丁国辉老师，戴德昌老师。感谢师兄任博和李冠楠对我真诚无私的帮助。感谢郭刚，熊小努在学习和科研方面经常给我以建议和指导。另外还要感谢高飞，顾文强，王睿，孙开佳，郑皓，况小梅，蒲波宇，陈芳杞，张永超，吴新义，王龙军，张笑鹏，鲁文斌，张振等粒子物理研究所的同学们的经常讨论。感谢我的室友张晋平同学两年多来对我的关心和帮助。

最后特别感谢我的父母，还有姐姐，他们多年来一直给予我支持和无微不至的关心。同时在生活上给与了我很多指导和鼓励，使得我可以乐观积极的对待科研和生活。

徐 栋

2014 年 9 月

于上海交通大学物理与天文系

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] Guan-Nan Li, Hsiu-Hsien Lin, **Dong Xu**, Xiao-Gang He. The β angle as the CP violating phase in the CKM matrix. Phys. Lett. B 718 (2013) 1454-1456 [arXiv:1301.1078[hep-ph]].
- [2] Guan-Nan Li, Hsiu-Hsien Lin, **Dong Xu**, Xiao-Gang He. The α , β and γ parameterizations of CP violating CKM phase. Int. J. Mod. Phys. A 28 (2013) 1350014 [arXiv:1204.1230[hep-ph]].
- [3] **Dong Xu**, Guan-Nan Li, Xiao-Gang He. U-spin analysis of CP violation in B^- decays into three charged light pseudoscalar mesons. Phys. Lett. B 728 (2014) 579-584 [arXiv:1311.3714[hep-ph]].
- [4] **Dong Xu**, Guan-Nan Li, Xiao-Gang He. Large SU(3) breaking effects and CP violation in B^+ decays into three charged SU(3) octet pseudoscalar mesons. Int. J. Mod. Phys. A 29 (2014) 1450011 [arXiv:1307.7186[hep-ph]].
- [5] Xiao-Gang He, Guan-Nan Li, **Dong Xu**. SU(3) and Isospin Breaking Effects on Fully-Symmetric $B \rightarrow PPP$ Amplitudes. Submitted to PRD [arXiv:1410.0476[hep-ph]].