

申请上海交通大学博士学位论文

重味强子弱衰变的对称性分析与微扰QCD因子化方法应用

论文作者 邢晔

学 号 015072910025

指导教师 王伟 特别研究员

专 业 粒子物理与核物理

答辩日期 2019年9月

A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for the
Degree of Doctor

Weak Decay of Heavy-Flavor Hadron in the Symmetry Analysis and Application of Perturbation QCD Factorization

YE XING

Supervisor:

Prof. Wei Wang

DEPART OF PHYSICS, SCHOOL OF PHYSICS AND ASTRONOMY,
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
SHANGHAI, P.R.CHINA

September, 2019

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日期：_____年____月____日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名： _____

指导教师签名： _____

日 期： _____年____月____日

日 期： _____年____月____日

重味强子弱衰变的对称性分析与微扰QCD因子化方法应用

摘 要

在过去的五十年中，组分夸克模型在粒子物理中获得了巨大成功。按照夸克味道对称性，夸克模型可对强子态进行分类，分类结果与已有实验测量符合很好。LHCb实验组在2017年发现了双重味重子 $\Sigma_{cc}^{++}(ccu)$ ，并测量了其质量约为 $m_{\Sigma_{cc}^{++}} = 3621.40\text{MeV}$ ，填补了夸克模型中的一个空白。根据夸克模型和描述强相互作用的量子色动力学基础理论，自然界中还可能还存在双重味的四夸克奇特态，实验上也发现了一系列双重味奇特态候选者。例如Belle实验组于2003年发现了隐粲四夸克态候选者 $X(3872)$ ，之后各个实验组又陆续发现了其他隐藏双重味四夸克态候选者 $Z_b^{\pm}(10610, 10650)$ 等。

为了深入地研究双重味强子的性质，本文首先采用轻夸克(u,d,s)的SU(3)味道对称性，从理论上研究它们的弱衰变过程。基于双重味强子及弱衰变算符的SU(3)表示，本文将分别构造出双重味重子与双重味四夸克态衰变的SU(3)不变有效哈密顿量。将该哈密顿量应用于双重味强子的衰变矩阵元中，就可以得到弱衰变振幅及衰变宽度之间的关系。根据衰变分支比的理论估计并考虑到实验上末态粒子的重建效率，我们挑选出Cabibbo允许的黄金衰变过程。这些结果可以为未来实验上寻找更多双重味强子和进一步研究它们的性质提供一定的参考与帮助，也可以用来检验夸克模型与轻夸克SU(3)对称性的适用性。

强子的衰变与散射过程都涉及非微扰的强子化机制，不能采用微扰论直接进行计算。通常人们采用因子化方法将一个多标度的物理过程分离为不同部分。高能标度物理自由度涉及的强相互作用是微扰的，相应的耦合常数较小，可采用微扰论进行计算；而低标度部分是非微扰的但却是普适的，可以通过格点量子色动力学等非微扰方法计算或者采用实验拟合的方式进行确定。常见的因子化方案包括共线因子化与 k_T 因子化，共线因子化方法可以很好地处理单举过程，而应用到某些遍举过程会遇到端点发散行为， k_T 因子化保留了横向动量则可以很好地应用到很多强子遍举过程。

本论文第二部分将研究正负电子湮灭过程中两介子的遍举产生和 B_s^0 介子的三体衰变过程。为了处理强子遍举过程的内部动力学信息，本文将采用基于 k_T 因子化的微扰QCD因子化方法，计算 $e^+e^- \rightarrow VP, TP$ 在不同质心能量下的散射截面以

及 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 三体衰变分支比, 所得到的大部分结果跟已有的实验测量符合很好。正负电子湮灭的两体遍举过程与 B 介子衰变的湮灭图类似, 未来更多的实验测量结果及与理论预言的对比可用来提取强子中与夸克胶子结构相关的类时形状因子, 并确定 B 介子衰变中的幂次修正。为了方便起见, 本文将 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 三体衰变中保留领头项贡献, 此时简化为类两体衰变过程, 并据此计算衰变分支比和微分分布。相关结果可以用来检验重味强子多体衰变的动力学机制, 对研究强相位与CP破坏的本质及对CKM幺正三角形中 γ 角的精确测量也有一定的帮助。

关键词: SU(3)对称性, 双重味重子, 双重tetraquark, PQCD因子化, 三体衰变。

Weak Decay of Heavy-Flavor Hadron in the Symmetry Analysis and Application of Perturbation QCD Factorization

ABSTRACT

In the past fifty years, the quark model widely adopted in particle physics has achieved great successes. According to the quark flavor symmetry, various hadrons can be classified in quark model, and the classification is in good agreement with most available experimental observations. In addition, hadrons with two heavy quarks such as doubly-heavy baryon and doubly-heavy four-quark exotic states are allowed from the theoretical viewpoint. In 2017, LHCb collaboration has announced the discovery of a baryonic state denoted as Σ_{cc}^{++} with the mass measured as $m_{\Sigma_{cc}^{++}} = 3621.40\text{MeV}$. This state is consistent with the ground state of doubly heavy baryon with the quark component (ccu). In 2003, Belle collaboration has firstly discovered the hidden-charm tetraquark candidate $X(3872)$, which opened a new era in the hadron spectroscopy study. Subsequently, other tetraquark candidates such as $Z_b^\pm(10610, 10650)$ are discovered at different experimental facilities.

The first part of this thesis makes use of the flavor symmetry for light quarks (u,d,s) and analyze weak decays of doubly-heavy baryons and tetraquarks in a model-independent way. After presenting the irreducible representations in the flavor SU(3) group for various baryonic multiplets and transition operators, we construct at hadron level the effective Hamiltonian for weak decays of doubly heavy baryon and tetraquarks. Decay amplitudes can then be obtained by sandwiching the Hamiltonian into transition matrix elements, based on which one can derive relations of decay widths between different channels. Golden channels with both largest decay branching fractions and easiest experimental accessibility are also collected. These results can not only help us to look for more doubly heavy hadrons and extract the properties of doubly heavy hadrons in future, but can also validate/invalidate the application of SU(3) flavor symmetry to weak decays of heavy hadrons.

High energy processes involving hadrons can not directly calculated in perturba-

tion theory due to the nonperturbative hadronization. In practice, one usually adopts the factorization assumption, which is used to separate the different scales in the scattering/decay amplitudes. The high-energy, i.e. short-distant, degrees of freedoms are perturbative due to the small coupling constant for strong interactions. The long-distant inputs are nonperturbative and thus can only be calculated from Lattice QCD. But since these inputs are universal, they could also be determined by fitting experimental data. The most popular factorization schemes include the collinear factorization and k_T factorization, though in many cases, the factorization ansatz is not always guaranteed.

In the second part of this thesis, we study the $e^+e^- \rightarrow (VP, TP)$ process (P, V, T) denoting a light pseudoscalar meson, vector meson and tensor meson) and three-body $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ under the k_T factorization scheme. In particular, the Perturbative QCD (PQCD) framework based on k_T factorization which has been successfully applied to B meson two-body decays will be used in this thesis. Exclusive processes of $e^+e^- \rightarrow (VP, TP)$ have similar topologies with annihilation contributions in charmless decays of B meson. Thus this study is also helpful to understand the power-suppressed contributions in B decays. The three-body decay $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$, with CP eigenstate D_{CP} containing the interference of $b \rightarrow c\bar{u}s$ ($b \rightarrow u\bar{c}s$) amplitude, is sensitive to the angle γ of the CKM Unitarity Triangle whose precise measurement is one of the primary objectives in flavour physics. In addition, the $\pi\pi$ system may contain contributions from resonance states $f_0(500), f_0(980), f_0(1500), f_0(1790)$ and non-resonance state at the same time. Therefore, the analysis of three-body decay of B_s meson also helps to understand the dynamics of multi-body decays and the $\pi\pi$ interactions.

KEY WORDS: SU(3) symmetry, Doubly heavy baryon, Doubly heavy tetraquark, PQCD factorization, Three-body decays.

目 录

摘要	i
ABSTRACT	iii
目录	v
第一章 绪论	1
1.1 标准模型	1
1.2 夸克模型与SU(3)味道对称性	4
1.3 部分子模型与QCD因子化	6
1.4 本论文的研究内容	8
第二章 重味强子弱衰变的SU(3)对称性分析	9
2.1 SU(3)群代数	9
2.2 强子多重态分类	11
2.3 夸克衰变类型分类	16
2.4 双重味重子的弱衰变	18
2.4.1 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb}	19
2.4.2 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc}	26
2.4.3 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc}	33
2.4.4 黄金衰变道	36
2.5 双重味Tetraquark的弱衰变	39
2.5.1 质量	40
2.5.2 双重味 bb -tetraquark	43
2.5.3 双重味 cc -tetraquark	48
2.5.4 双重味 bc -tetraquark	50
2.5.5 双重味 $b\bar{c}$ -tetraquark	52

2.5.6 黄金衰变道	62
2.6 本章总结	64
第三章 QCD 因子化	67
3.1 共线因子化	67
3.2 k_T 因子化	72
3.2.1 PQCD因子化方法	74
3.2.2 强子的光锥波函数	76
3.2.3 k_T 重求和	80
3.2.4 喷注函数	81
第四章 PQCD方法的应用	83
4.1 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 的遍举过程	83
4.1.1 类时形状因子	83
4.1.2 轻介子的衰变常数与光锥分布振幅	84
4.1.3 PQCD 微扰计算	87
4.1.4 数值结果与分析	90
4.2 $B_s \rightarrow D^0\pi\pi$ 三体衰变	94
4.2.1 重介子与S-波 $\pi\pi$ 系统的光锥分布振幅	94
4.2.2 PQCD微扰计算	97
4.2.3 数值计算与分析	102
第五章 总结与展望	107
附录 A 双线性算符的动力学关系	109
参考文献	113
致谢	123
攻读学位期间发表的学术论文目录	125

第一章 绪论

粒子物理是研究物质的基本结构性质及其相互作用规律的科学，目前应用最成功的理论被称为标准模型。在标准模型中，基本粒子包含三代夸克、三代轻子及传递相互作用的各类玻色子。自然界中已知的大部分物质都是由基本粒子组成，如参与强相互作用的各类强子，目前实验上已发现的数百种强子均由三代夸克及反夸克组成。已知物质之间的相互作用分为四种：引力相互作用、弱相互作用、电磁相互作用、强相互作用。在目前所能达到的能量范围，电磁相互作用和弱相互作用耦合常数都比较小。而强相互作用过程具有高标度渐进自由、低标度色紧闭的不同标度行为。到目前为止，标准模型还不能包含引力相互作用。本章将主要介绍标准模型的基本概念，同时简单介绍SU(3) 味道对称性与因子化方法。

1.1 标准模型

在粒子物理中，标准模型是一个 $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 规范场理论 [1–3]，它可以很好描述强相互作用、弱相互作用及电磁相互作用。在这个框架下，费米子包括夸克与轻子，具体性质可见表格 1.1。传递规范作用的中间玻色子包括：胶子、 W^\pm, Z 玻色子与光子，此外还存在希格斯玻色子，它通过希格斯机制 [4]或Yukawa耦合赋予其他基本粒子质量。

标准模型的动力学拉式量满足Lorentz协变性与规范不变性：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4} \sum_{\alpha'} (G_{\alpha'\mu\nu})^2 + i \sum_f \bar{\psi}_f \not{D} \psi_f + D\phi^\dagger \cdot D\phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \\ & - \sum_{ij} h_{ij} \bar{\psi}_{i,R} \phi \psi_{j,L} + \text{规范固定项} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

上式中 ϕ 表示标量希格斯场， $\bar{\psi}_i, \psi_i$ 表示各类费米子场。其中，

- 对 α' 指标的求和包含规范群 $SU(3)$ 的8个生成元以及 $SU(2) \otimes U(1)$ 群的4个生成元。规范场分别为 $G_\mu^\alpha(x)$ 、 W_μ^j 与 B_μ ，相应的耦合常数为 g_s 、 g 与 g' 。
- 协变微商定义为

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 T_{col}^\alpha G_\mu^\alpha + ig \sum_{j=1}^3 W_\mu^j T_W^j + ig' B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (1.2)$$

其中 T_{col} 、 T_W 分别为SU(3)与SU(2)群的生成元矩阵， Y 表示多重态的弱超荷。

表 1.1 标准模型中基本粒子的量子数。

Tab 1.1 Quantum numbers of elemental particles in the Standard Model. The symbols for the fields correspond to the particle names.

	Color singlet	Y	Color triplet	Y
First generation	$\begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$
	(e_R)	-2	(u_R)	$\frac{4}{3}$
	$(\nu_{e,R})$	0	(d_R)	$-\frac{2}{3}$
Second generation	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$
	(μ_R)	-2	(c_R)	$\frac{4}{3}$
	$(\nu_{\mu,R})$	0	(s_R)	$-\frac{2}{3}$
Third generation	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$
	(τ_R)	-2	(t_R)	$\frac{4}{3}$
	$(\nu_{\tau,R})$	0	(b_R)	$-\frac{2}{3}$
Higgs field	$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	1		

- 标准模型含有手性费米子场 $\psi_{i,L}$ 、 $\psi_{j,R}$ ，费米子场的手征性定义如下，左手场为 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_i$ ，右手场为 $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_j$ 。左手场是SU(2)群的二重态，而右手场为SU(2)群的单态。
- 标准模型中费米子有三代，包含夸克与轻子，其量子数及相关性质在表格 1.1 给出。夸克和轻子的质量可以通过Yukawa耦合获得，结果见表格 1.2。
- 希格斯场的真空期望值为 $\langle 0|\phi|0\rangle = (0, v/\sqrt{2})^T$ ，其中 $v = 246$ GeV。希格斯场自发破缺会破坏三个电弱对称性，导致的Z玻色子场与光子场分别为

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad (1.3)$$

其中温伯格角 θ_W 满足 $\sin^2 \theta_W = 0.22 \pm 0.02$ 。

- 电弱相互作用耦合常数为

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W}. \quad (1.4)$$

表 1.2 标准模型中基本粒子的质量。

Tab 1.2 Standard Model masses for elementary fields [5].

Leptons and quarks	ν_e	~ 0	d	4.70(20)MeV
	e	0.511MeV	u	2.15(15)MeV
	ν_μ	~ 0	s	$\sim 93.5_{-2}^{+2}$ MeV
	μ	106MeV	c	$\sim 1.28_{-0.025}^{+0.025}$ GeV
	ν_τ	~ 0	b	$\sim 4.18_{-0.03}^{+0.03}$ GeV
	τ	1.78GeV	t	173.34 ± 0.98 GeV
	Gauge bosons	W^\pm	80.379 ± 0.012 GeV	Z
Higgs boson	$Higgs$	125.18 ± 0.16 GeV		

- 为了消除非物理自由度的贡献，通常加入规范固定项：

$$-\frac{1}{\xi}(\partial A_\alpha)^2 + \partial_\mu \bar{\eta}_\alpha \partial^\mu \eta_\alpha + g_0 \partial^\mu \bar{\eta}_\gamma f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta \eta_\alpha. \quad (1.5)$$

- 由于规范固定项的引入，拉式量 (1.1) 不再满足规范变换不变性。这使得广义Ward恒等式的推导变得复杂。非阿贝尔规范理论的Ward 恒等式由Slavnov (1972) 和Taylor (1971) 发展出来，紧接着Becchi、Rouet、Stora与Tyutin 发现了新的对称性-BRST对称性 [6]，可以大大简化Slavnov 与Taylor推导的恒等式。BRST对称性是一种全局的超对称性，其中费米子遵循Grassmann代数变换。对于规范场与费米子场，BRST变换如下

$$\begin{aligned} \delta_{BRST} \psi &= -ig\eta_\alpha \delta\lambda t^\alpha \psi = ig\eta_\alpha t^\alpha \psi \delta\lambda, \\ \delta_{BRST} \bar{\psi} &= ig\bar{\psi} t^\alpha \eta \delta\lambda, \\ \delta_{BRST} A_\mu^\alpha &= (\partial_\mu) \eta_\alpha + gf_{\alpha\beta\gamma} \eta_\beta A_\mu^\gamma \delta\lambda. \end{aligned} \quad (1.6)$$

鬼场与反鬼场的BRST变换为

$$\begin{aligned} \delta_{BRST} \eta_\alpha &= -\frac{1}{2} gf_{\alpha\beta\gamma} \eta_\beta \eta_\gamma \delta\lambda, \\ \delta_{BRST} \bar{\eta}_\alpha &= \frac{1}{\xi} \partial A_\alpha \delta\lambda. \end{aligned} \quad (1.7)$$

- 拉式量 (1.1) 中的场及耦合常数等物理量都是重整化后的量。考虑到微扰理论计算中会产生紫外发散，作为一种自洽的可重整化的相对论性场论，标准模型可通过引入有限个的重整化参数将微扰计算中产生的紫外发散吸收(或抵消掉)。因此拉式量中应包含紫外抵消项，不过式(1.1)没有明显写出来。

- 在处理紫外发散时，由于计算关联函数的紫外截断量或紫外重整化标度 μ 选择的任意性，关联函数满足对重整化标度依赖的重整化群。对于具有 n 条外线的不可约振幅 $\Gamma^{(n)}(\lambda p, q)$ ，其重整化群方程为

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_d(g) \right] \Gamma^{(n)}(\lambda p, g) = 0, \quad (1.8)$$

其中 $\gamma_d(g)$ 定义为

$$\gamma_d(g) = d_{\Gamma^{(n)}} - n\gamma(g). \quad (1.9)$$

$\gamma(g)$ 为反常量纲，夸克场的反常量纲定义为 $\gamma(g) = \frac{\mu}{2Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial \mu}$ ， $d_{\Gamma^{(n)}}$ 为 n 条外线不可约振幅 $\Gamma^{(n)}(\lambda p, q)$ 的量纲。重整化群方程(1.8)的解为

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(\lambda p, g, \mu) &= \Gamma^{(n)}(\lambda p, \bar{g}(t), \mu) e^{\int_0^t \gamma_d[\bar{g}(t')] dt'} \\ &= \Gamma^{(n)}(\lambda p, \bar{g}(t), \mu) e^{\int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma_d(g')}{\beta(g')} dg'}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中， $\beta(\bar{g}) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial t}$ ， $t = -\ln \frac{Q}{\mu}$ 。因此，不可约振幅依赖于耦合常数 \bar{g} 以及一个无量纲参数 $\ln \frac{Q}{\mu}$ 。应用微扰论进行计算时，不仅要保证耦合常数很小，同时也必须保证无量纲参数 $\ln \frac{Q}{\mu}$ 不是非常大。

- 将上述拉式量进行展开，我们就可以得到强相互作用的费曼规则，如图 1.1 所示。

1.2 夸克模型与SU(3)味道对称性

在粒子物理中，参与强相互作用的所有粒子被统称为强子，这既包含稳定的强子态，也包含不稳定粒子态或共振态。稳定强子通常指那些不能或者不容易强衰变的强子。Gell-Mann与Zweig于1964年提出了夸克模型 [7-9]，认为当时所发现的所有强子均由三种自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 u 、 d 、 s 夸克构成。利用 u 、 d 、 s 三种夸克，人们可以构成各种SU(3)味道多重态 [7-10]，后来又接着发现了粲夸克(c)、底夸克(b)和顶夸克(t)。夸克模型在对强子态分类方面取得了很大的成功，Gell-Mann也因此获得了诺贝尔物理学奖。

夸克模型中，介子由一个夸克和一个反夸克构成，而重子由三个夸克构成。基于SU(3)味道对称性，轻介子属于SU(3)的八重态或单态，轻重子则可以分解为SU(3)八重态和十重态。该分类方法在解释轻介子与重子内部组分方面取得了成功，也准确地预测了自旋 $\frac{3}{2}$ 的 Ω^- 重子 [11]。之后实验上相继发现的 c 、 b 、 t 都是重

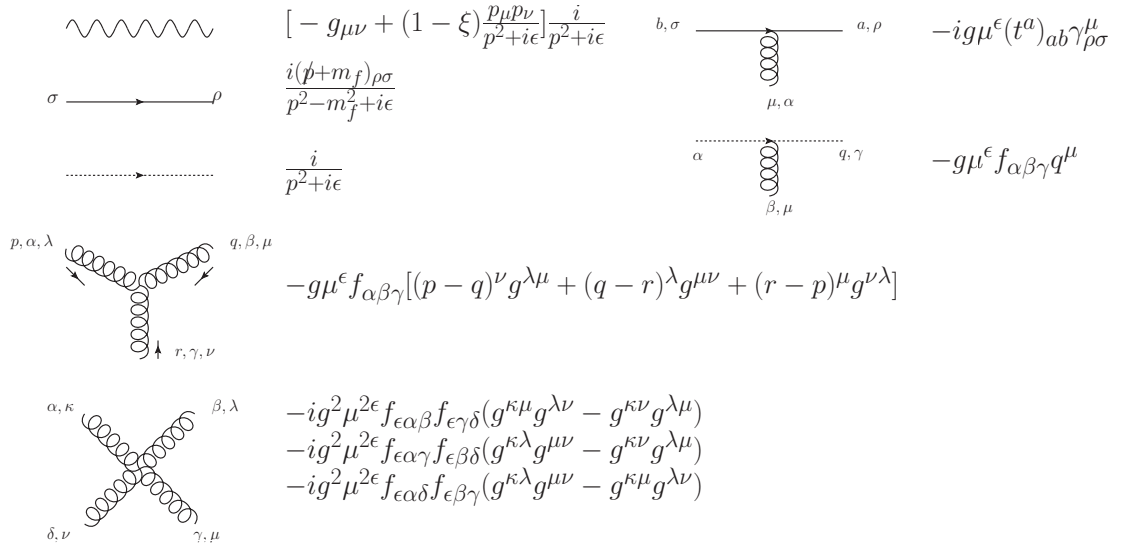


图 1.1 QCD 费曼规则。

Fig 1.1 The Feynman rules of QCD.

夸克，是轻夸克味道SU(3)群的单态。因此由重夸克与轻夸克组成的单重味重子或双重味重子等强子仍然可以通过轻夸克味道SU(3)对称性进行分类。如单重味重子在SU(3)对称性下可以分解为一个味道反三重态与一个味道六重态，双重味重子则可以构成一个味道三重态。

多夸克系统 $qq\bar{q}\bar{q}$ 或 $qqqq$ 等奇特态都满足夸克模型及量子色动力学色紧闭的要求，因此理论上是允许存在的。早在2003年，Belle实验就发现了四夸克态候选者X(3872) [12]，之后实验上又陆续发现了众多四夸克态候选者，如2013年BES III与Belle实验同时发现的四夸克态候选者 $Z_c(3900)$ ；LHCb实验在2015年发现的疑似五夸克态候选者 $P_c(4450)$ 与 $P_c(4380)$ [13]，在2019年又发现新的五夸克态候选者 $P_c(4312)$ 。尽管多夸克系统的动力学等性质目前仍不清楚，但是基于SU(3)味道对称性可以将允许的多夸克系统进行分类。比如双重味四夸克态 $Q\bar{Q}q\bar{q}$ 可根据SU(3)分类为一个八重态与味道单态。

除了强子的内部结构，重夸克的弱衰变算符也可以进行味道SU(3)对称性分解。例如重味 b 夸克的无粲衰变包含两个轻夸克和一个反夸克，可以分解为SU(3)的三重态、六重态和十五重态。如果将该算符插入到初末态强子矩阵元中，我们就可以获得弱衰变矩阵元的轻夸克味道对称性联系。

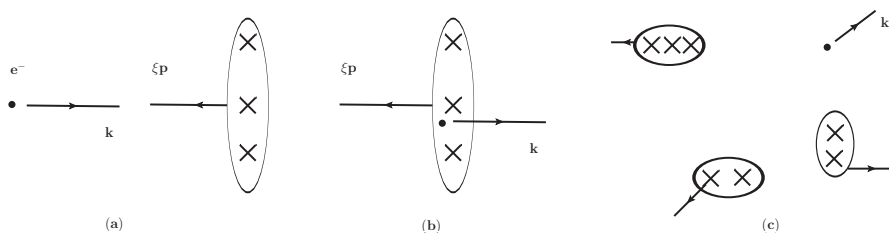


图 1.2 深度非弹性散射过程的部分子模型图像。

Fig 1.2 Schematic parton-model picture for deeply inelastic scattering.

1.3 部分子模型与QCD因子化

尽管标准模型可以很好的描述基本粒子性质及相互作用，但是由于强相互作用的色紧闭与渐近自由现象，在描述强子的动力学时遇到问题。Feynman于1969年基于电子与核子的标度无关现象提出部分子模型，认为强子内部由带电的类点组分-部分子构成，这些部分子就是夸克的QCD过程，部分子模型可以很好的描述强子的大动量转移过程。例如单举过程-电子与核子的深度非弹性散射，其中图 1.2(a)表示散射前的系统，核子由一些虚态-部分子组成(图中叉号)，假定这些虚态在核子静止系下具有寿命为 τ (部分子的寿命与核子结构相关)，其动量分数表示为 $\xi_i p$ 。在系统质心系下，核子同时受到Lorentz收缩与时间膨胀的影响。因此这些虚态的寿命为 $\tau(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg \tau$ ， v 是虚态运动速度。考虑Lorentz收缩(在图中用圆盘形状表示)，这意味着当质心能量无穷大时，电子穿过核子所需的时间就消失了。因此在图 1.2(b)发生碰撞时，电子能看到一组有效“冻结”的部分子。与核子中一个部分子交换大动量 $q^\mu \sim Q$ 后，根据不确定性原理，出去的电子具有横向动量为 $\mathcal{O}(1/Q)$ 。在碰撞后图 1.2(c)，核子的碎片发生相互作用，产生夸克对并最终形成新的可观测粒子，即强子化过程。假定这个过程发生的时间标度与电子和核子散射的标度相当，却远远大于硬散射的时间标度。所以夸克与胶子合并成新的可观测粒子的过程，不会影响硬散射过程。总之，部分子模型表述了两个物理概念：Lorentz收缩及部分子的时间膨胀，和大的时间标度的强子化行为。在部分子模型下，深度非弹性散射的截面表示为：

$$\sigma(e^- P^+ \rightarrow e^- X) = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \hat{\sigma}(e^- p_i \rightarrow e^- X). \quad (1.11)$$

其中 p_i 是部分子动量 $p_i^\mu = \xi p^\mu$ ， X 是末态任意强子， $\hat{\sigma}(e^- p_i \rightarrow e^- X)$ 为电子与部分子的硬散射过程， $f_i(\xi)$ 为部分子分布函数(PDFs)，其时间标度 $\sim \Lambda_{QCD}^{-1} \sim m_P^{-1}$ 。

因子化理论的目标就是从场论的方法来合理的理解部分子模型，并系统的给出

不依赖模型的研究方法。QCD因子化一般包含两个基本观点：因子化与演化。因子化是推导部分子模型的关键，而演化则允许我们系统的计算标度无关现象的破坏行为。考虑深度非弹性散射的QCD因子化计算。部分子模型的场论实现就是深度非弹性散射过程的长程效应与短程效应的因子化过程，理论上对所有贡献到分布函数的费曼图求和就是部分子模型结果的直接推广。在QCD因子化理论下深度非弹性散射的截面表示为：

$$\sigma(e^{-}P^{+} \rightarrow e^{-}X) = \sum_{i=f,\bar{f},G} \int_0^1 d\xi f_{i/h}(\xi, \mu_f, \mu^2) C_a(\xi, Q^2/\mu^2, \mu_f^2/\mu^2, \alpha_s(\mu^2)), \quad (a=1,2,3), \quad (1.12)$$

这里*i*表示对所有部分子求和：夸克，反夸克与胶子。与部分子模型公式相比，QCD因子化公式依赖于两个标度参数： μ 与 μ_f 。其中 μ 为重整化标度，而 μ_f 为分离短程与长程效应的因子化标度。低于因子化标度 μ_f 的行为收集到部分子分布函数 $f_{i/h}(\xi, \mu_f, \mu^2)$ 中，高于 μ_f 的为可微扰计算的硬散射过程 $C_a(\xi, Q^2/\mu^2, \mu_f^2/\mu^2, \alpha_s(\mu^2))$ 。通常可以选择 μ 与 μ_f 相等。对于硬散射函数 $C_a(\xi, Q^2/\mu^2, \mu_f^2/\mu^2, \alpha_s(\mu^2))$ 是红外安全的，可以在微扰理论下计算的。而部分子分布函数 $f_{i/h}(\xi, \mu_f, \mu^2)$ 是与过程无关的，包含原始截面中所有的红外敏感的部分，可以通过实验方法抽取或者利用其他非微扰途径得到。

考虑强子遍举过程，其涉及到强子内部动力学及部分子的散射等过程。利用QCD因子化计算强子衰变矩阵元时，如B介子的两体衰变过程 $\langle M_1 M_2 | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle$ ，其中 \mathcal{H}_{eff} 为该过程的有效哈密顿量。在B介子静止系中并考虑末态 $M_1(q_1 \bar{q}_2)$ 为轻的介子，那么对于该*b*夸克的非轻弱衰变 $b \rightarrow q_3 q_1 \bar{q}_2$ ，产生一对沿着光锥方向反冲的夸克对 $q_1 \bar{q}_2$ 构成 M_1 轻介子，而产生的 q_3 夸克与B介子中的旁观夸克形成 M_2 并沿着与 M_1 反方向运动。此时B介子的两体非轻衰变表示为微扰与非微扰部分的卷积，在QCD因子化方法（QCDF）[14, 15]下表示公式：

$$\begin{aligned} \langle M_1 M_2 | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle &= \int_0^1 dx T_i(x) \langle M_1 | J_1(x) | 0 \rangle \langle M_2 | J_2(0) | B \rangle \\ &\quad + \int_0^1 d\xi dx dy T_{ii}(\xi, x, y) \langle M_1 | J_1(x) | 0 \rangle \langle M_2 | j_2(y) | 0 \rangle \langle 0 | j_3(\xi) | B \rangle. \\ &= \int_0^1 dx T_i(x) \phi_{M_1}(x) F^{B \rightarrow M_2} + \int_0^1 d\xi dx dy T_{ii}(x) \phi_B(\xi) \phi_{M_1}(x) \phi_{M_2}(y). \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 $T_{i/ii}$ 为硬散射部分， $F^{B \rightarrow M_2}$ 为描述B介子到 M_2 介子矩阵元的非微扰形状因子， ϕ_i 为强子波函数。因子化过程对应的图像为示意图 1.3。

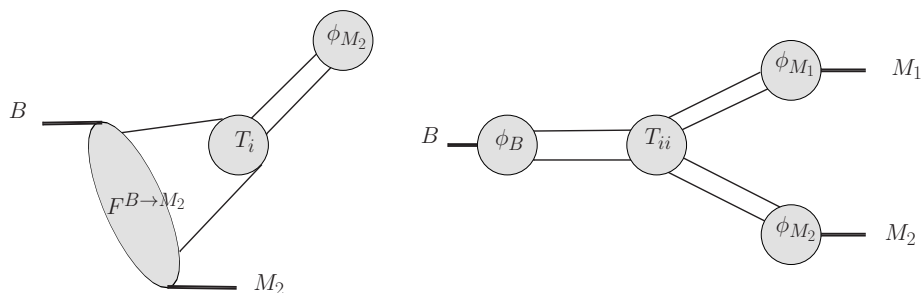


图 1.3 B 介子到 M_1, M_2 非轻衰变的 QCD 因子化方法 (QCDF)。

Fig 1.3 The method of QCDF for the process of $B \rightarrow M_1 M_2$.

1.4 本论文的研究内容

本论文将在第二章采用轻夸克味道对称性对双重味重子与双重味四夸克态进行分类，针对它们的弱衰变，我们将构造出衰变过程的强子层次有效哈密顿量。将这些哈密顿量展开得到衰变振幅，紧接着我们将给出不同衰变宽度之间的关系并挑选出可以用来研究双重味强子的黄金衰变道。第三章将扼要介绍 QCD 因子化理论，着重讨论 k_T 因子化与微扰 QCD 方法 (PQCD)。之后第四章采用 PQCD 方法研究两类遍举过程：正负电子的遍举过程 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 和 B_s 介子的三体衰变过程 $\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(D^0)(\pi^+\pi^-)_S$ 。最后一章是全文的总结与展望部分。

第二章 重味强子弱衰变的SU(3)对称性分析

很长时间以来，重味物理一直都是粒子物理中的重要领域之一。重味物理的研究为检验标准模型、探寻新物理、精确测量夸克混合矩阵元、探寻CP对称性破坏机制等提供了重要帮助。

LHCb实验组于2017年发现了双粲味重子 $\Sigma_{cc}^{++}(ccu)$ ，并测量其质量约为 $m_{\Sigma_{cc}^{++}} = 3621.40\text{MeV}$ [16]。该发现填补了夸克模型的一个空缺，同时也为重味物理领域提供了新的研究方向，如研究双重味重子的内部结构以及其内部动力学等。双重味重子中涉及到两个重夸克及轻夸克之间的QCD效应，对其研究将有助于我们进一步理解量子色动力学。此外讨论双重味重子中因子化的可行性、双重味重子唯象学方面的发展，都可以极大的推动重味物理的发展。

Belle实验组于2003年通过 $B^{\pm} \rightarrow K^{\pm} X (X(3872) \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)$ 发现了双重味 $c\bar{c}$ 四夸克态候选者 $X(3872)$ [12]，在2011年通过 $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(nS)\pi^+\pi^- (n = 1, 2, 3)$ 与 $e^+e^- \rightarrow h_b(nP)\pi^+\pi^- (n = 1, 2)$ 发现了双重味 $b\bar{b}$ 四夸克态候选者 $Z_b^{\pm}(10610, 10650)$ [13]。LHCb实验组于2015年通过 $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^-$ 过程发现疑似双重味 $c\bar{c}$ 类的五夸克态候选者 [17]。目前虽然已发现了众多双重味多夸克态候选者，但是关于它们的结构信息等仍然十分缺乏，因此对双重味多夸克态进一步研究也将是重味物理领域的一个重要研究方向。

因子化方法是研究重味物理的一个重要途径。然而对于双重味重子与双重味四夸克态来说，首先因子化的适用性没有得到证明，其次缺少相关低能参数与短程微扰系数，所以对双重味强子的因子化研究还需要不断完善。SU(3)味道对称性与其他模型及输入参数无关，此外SU(3)对称性已经成功的运用到B介子及单重味重子衰变的研究 [18–31]，因此我们可以采用轻夸克SU(3)对称性的方法来研究双重味重子及双重味四夸克态。本章首先介绍SU(3)群代数、强子SU(3)多重态分类以及夸克衰变类型分类，之后结合上述内容依次讨论双重味重子与双重味四夸克态的衰变过程。

2.1 SU(3)群代数

标准模型目前存在三代夸克，分为上型夸克 u 、 c 、 t 与下型夸克 d 、 s 、 b 六种味道。按照夸克质量的不同可以分为轻夸克(u 、 d 、 s)与重夸克(c 、 b 、 t)两类，其中轻夸克 u 、 d 、 s 构成SU(3)三重态，它们满足SU(3)变换不变性，而重夸克则构成SU(3)单态。按照夸克模型描述，任意强子都是由夸克组成，因此基于

轻夸克SU(3)对称性可以将强子进行SU(3)分类。如通常熟知的介子 0^- 八重态，重子 $J^P = 1/2^+$ 八重态与 $J^P = 3/2^+$ 十重态等。对轻夸克对称性的研究依据于SU(N)群代数，本节主要介绍SU(3)群的相关代数性质以及轻夸克的SU(3)表示。

SU(3)群是特殊么正群，满足 $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ 及 $\det U = 1$ ，其具有8个生成元 F_i ($i = 1 - 8$)。生成元满足SU(3)群李代数

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c. \quad (2.1)$$

f_{abc} 是反对称张量。相互对易的生成元(嘉当子代数)为

$$[F_3, F_8] = 0. \quad F_3 = \lambda_3/2, \quad F_8 = \lambda_8/2. \quad (2.2)$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

其中 λ_i ($i = 1 - 8$)为Gellmann矩阵。因此关于SU(3)群具有两个同时可以观测的量子数(权数)，定义

$$\begin{aligned} \text{同位旋: } I_3 &= \frac{1}{2} \lambda_3, \\ \text{超荷: } Y &= \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8. \end{aligned} \quad (2.4)$$

两个权的取值分别相关于 λ_3 与 λ_8 的对角元为

$$I_3 = \frac{+1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, \quad Y = \frac{+1}{3}, \frac{+1}{3}, \frac{-2}{3}. \quad (2.5)$$

(u, d, s) 轻夸克构成的SU(3)三重态，用一个SU(3)旋量 q_i 表示，而轻的反夸克则为其共轭表示，分别对应于 $\mathbf{3}$ 、 $\bar{\mathbf{3}}$ 的维数表示(SU(N)群的维数可以通过 $d(\text{SU}(N)) = \prod_{ij} \frac{N+m_{ij}}{h_{ij}}$ 得到，其中容度 $m_{ij} = j - i$ ， h_{ij} 为勾长)。轻夸克的SU(3)表示如下

$$q^i = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad q_i = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}.$$

定义关于同位旋及超荷两个权的升降算符，

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \quad V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5). \quad (2.6)$$

其中 I_+ 算符可以将 d 升为 u , U_+ 算符可以将 s 升为 d 。它们的算符矩阵表示分别为

$$I_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

2.2 强子多重态分类

强子的SU(3)多重态分类可以利用张量约化与杨图分解的方法进行分析。对于含有两个轻夸克的系统, 用 $u^i v^j$ 表示, 其中带上指标的 u^i (v^j)表示正的轻夸克, 带下指标的 u_i (v_j)则表示反的轻夸克。通过张量约化可以将两轻夸克系统表示成两个不可约张量表示的和: 一个对称张量 $\mathbf{6}$ 与一个反对称张量 $\bar{\mathbf{3}}$ 。即 $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$, 其张量形式的分解为

$$u^i v^j = \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}u^l v^m. \quad (2.8)$$

其中 $\frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i)$ 是一个对称的 $\mathbf{6}$ 表示, $\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}u^l v^m$ 为反对称的 $\bar{\mathbf{3}}$ 表示。这里给出其他多夸克系统相关的张量分解形式

$$\begin{aligned} u^i v_j &= (u^i v_j - \frac{1}{3}\delta_j^i u^k v_k) + \frac{1}{3}\delta_j^i u^k v_k, \\ u^i v_k^j &= \frac{1}{2}(u^i v_k^j + u^j v_k^i - \frac{1}{4}\delta_k^i u^l v_l^j - \frac{1}{4}\delta_k^j u^l v_l^i) \\ &\quad + \frac{1}{4}\epsilon^{ijl}(\epsilon_{lmn}u^m v_k^n + \epsilon_{kmn}u^m v_l^n) + \frac{1}{8}(3\delta_k^i u^l v_l^j - \delta_k^j u^l v_l^i). \end{aligned} \quad (2.9)$$

它们分别对应于 $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ 与 $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{15}$ 的张量分解, 其中 u_i^j (v_i^j)维度表示为 $\mathbf{8}$, 为一个混合对称张量表示, 可以通过一个SU(3)不变的反对称张量 ϵ^{jkl} 将其变为 $u_i^j = \epsilon^{jkl}u_{ikl}$ 。对于双夸克系统($q_i q_j$)或三夸克系统($q_i q_j q_k$), 我们也可以利用杨图的方法对它们进行分解, 如图 2.1。

双重味重子基于SU(3)轻夸克味道对称性可以形成三重态, 即维数为 $\mathbf{3}$ 。我们写出它的具体表示如下

$$T_{cc}^i = \begin{pmatrix} \Xi_{cc}^{+++}(ccu) \\ \Xi_{cc}^+(ccd) \\ \Omega_{cc}^+(ccs) \end{pmatrix}, \quad T_{bc}^i = \begin{pmatrix} \Xi_{bc}^+(bcu) \\ \Xi_{bc}^0(bcd) \\ \Omega_{bc}^0(bcs) \end{pmatrix}, \quad T_{bb}^i = \begin{pmatrix} \Xi_{bb}^0(bbu) \\ \Xi_{bb}^-(bbd) \\ \Omega_{bb}^-(bbs) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

粲重子含两个轻夸克, 因此可以形成一个反对称的反三重态 $\bar{\mathbf{3}}$ 与一个对称的六重态 $\mathbf{6}$

$$T_{\bar{\mathbf{3}}}^{[ij]} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_c^+ & \Xi_c^+ \\ -\Lambda_c^+ & 0 & \Xi_c^0 \\ -\Xi_c^+ & -\Xi_c^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathbf{6}}^{\{ij\}} = \begin{pmatrix} \Sigma_c^{++} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c^{'+} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \Sigma_c^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c^{'+} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 & \Omega_c^0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \otimes & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{3} & & \mathbf{3}
\end{array} = \begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{6} & & \mathbf{3}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \otimes & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \otimes & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3}
\end{array} = \left(\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{6} & & \mathbf{3}
\end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\\
= \begin{array}{cccc}
\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \oplus & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
\mathbf{10} & & \mathbf{8} & & \mathbf{8} & & \mathbf{1}
\end{array}
\end{array}$$

图 2.1 $q_i q_j$ 与 $q_i q_j q_k$ 系统的杨图分解。Fig 2.1 The decomposition of $q_i q_j$ and $q_i q_j q_k$ in Young tableaux.

反质子形成一个反对称的三重态 $\mathbf{3}$ 与一个对称的反六重态 $\bar{\mathbf{6}}$

$$(F_{\mathbf{c}\mathbf{3}})_{[ij]} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{\bar{c}}^- & \Xi_{\bar{c}}^- \\ -\Lambda_{\bar{c}}^- & 0 & \Xi_{\bar{c}}^0 \\ -\Xi_{\bar{c}}^- & -\Xi_{\bar{c}}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{6}}})_{\{ij\}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\bar{c}}^{--} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_{\bar{c}}^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_{\bar{c}}^{\prime-} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_{\bar{c}}^- & \Sigma_{\bar{c}}^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_{\bar{c}}^{\prime0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_{\bar{c}}^{\prime-} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_{\bar{c}}^{\prime0} & \Omega_{\bar{c}}^0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

轻重子通过SU(3)分解可以表示成八重态 $\mathbf{8}$ 与十重态 $\mathbf{10}$ 。八重态表示为

$$(T_{\mathbf{8}})_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda^0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

相应的轻重子的十重态为

$$\begin{aligned}
(T_{\mathbf{10}})^{111} &= \Delta^{++}, & (T_{\mathbf{10}})^{112} &= (T_{\mathbf{10}})^{121} = (T_{\mathbf{10}})^{211} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, \\
(T_{\mathbf{10}})^{222} &= \Delta^-, & (T_{\mathbf{10}})^{122} &= (T_{\mathbf{10}})^{212} = (T_{\mathbf{10}})^{221} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, \\
(T_{\mathbf{10}})^{113} &= (T_{\mathbf{10}})^{131} = (T_{\mathbf{10}})^{311} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{\prime+}, & (T_{\mathbf{10}})^{223} &= (T_{\mathbf{10}})^{232} = (T_{\mathbf{10}})^{322} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{\prime-}, \\
(T_{\mathbf{10}})^{123} &= (T_{\mathbf{10}})^{132} = (T_{\mathbf{10}})^{213} = (T_{\mathbf{10}})^{231} = (T_{\mathbf{10}})^{312} = (T_{\mathbf{10}})^{321} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^0, \\
(T_{\mathbf{10}})^{133} &= (T_{\mathbf{10}})^{313} = (T_{\mathbf{10}})^{331} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{\prime0}, & (T_{\mathbf{10}})^{233} &= (T_{\mathbf{10}})^{323} = (T_{\mathbf{10}})^{332} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{\prime-},
\end{aligned}$$

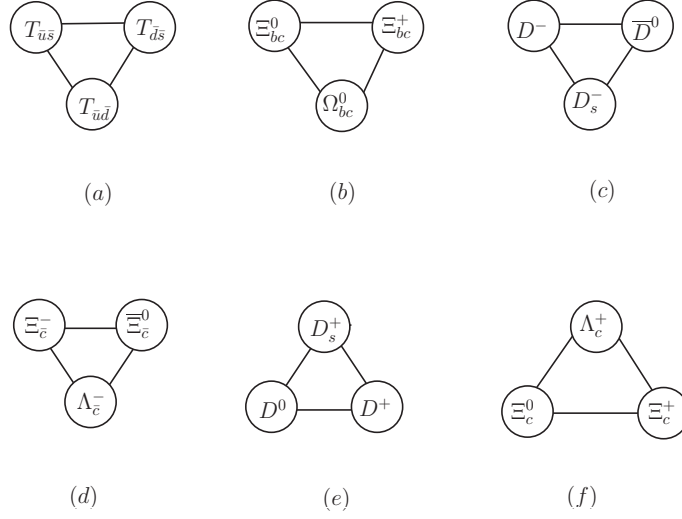


图 2.2 三重态与反三重态强子的味道SU(3)权图。

Fig 2.2 Flavor SU(3) weight diagrams for the triplet and anti-triplet hadrons.

$$(T_{10})^{333} = \Omega^-. \quad (2.14)$$

轻反重子则形成一个八重态 $\mathbf{8}$ 及一个反十重态 $\overline{\mathbf{10}}$ 。八重态如下

$$(F_8)_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 & \bar{\Sigma}^+ & \bar{\Xi}^+ \\ \bar{\Sigma}^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

反十重态与轻重子十重态类似 [32, 33]

$$\begin{aligned} (F_{\overline{10}})^{111} &= \bar{\Delta}^{--}, & (F_{\overline{10}})^{112} &= (F_{\overline{10}})^{121} = (F_{\overline{10}})^{211} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Delta}^-, \\ (F_{\overline{10}})^{222} &= \bar{\Delta}^+, & (F_{\overline{10}})^{122} &= (F_{\overline{10}})^{212} = (F_{\overline{10}})^{221} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Delta}^0, \\ (F_{\overline{10}})^{113} &= (F_{\overline{10}})^{131} = (F_{\overline{10}})^{311} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Sigma}'^-, & (F_{\overline{10}})^{223} &= (F_{\overline{10}})^{232} = (F_{\overline{10}})^{322} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Sigma}'^+, \\ (F_{\overline{10}})^{123} &= (F_{\overline{10}})^{132} = (F_{\overline{10}})^{213} = (F_{\overline{10}})^{231} = (F_{\overline{10}})^{312} = (F_{\overline{10}})^{321} = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Sigma}^0, \\ (F_{\overline{10}})^{133} &= (F_{\overline{10}})^{313} = (F_{\overline{10}})^{331} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Xi}'^0, & (F_{\overline{10}})^{233} &= (F_{\overline{10}})^{323} = (F_{\overline{10}})^{332} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{\Xi}'^+, \\ (F_{\overline{10}})^{333} &= \bar{\Omega}^+. \end{aligned} \quad (2.16)$$

我们同时给出不同强子的SU(3)权图表示，见图 2.2与图 2.3。

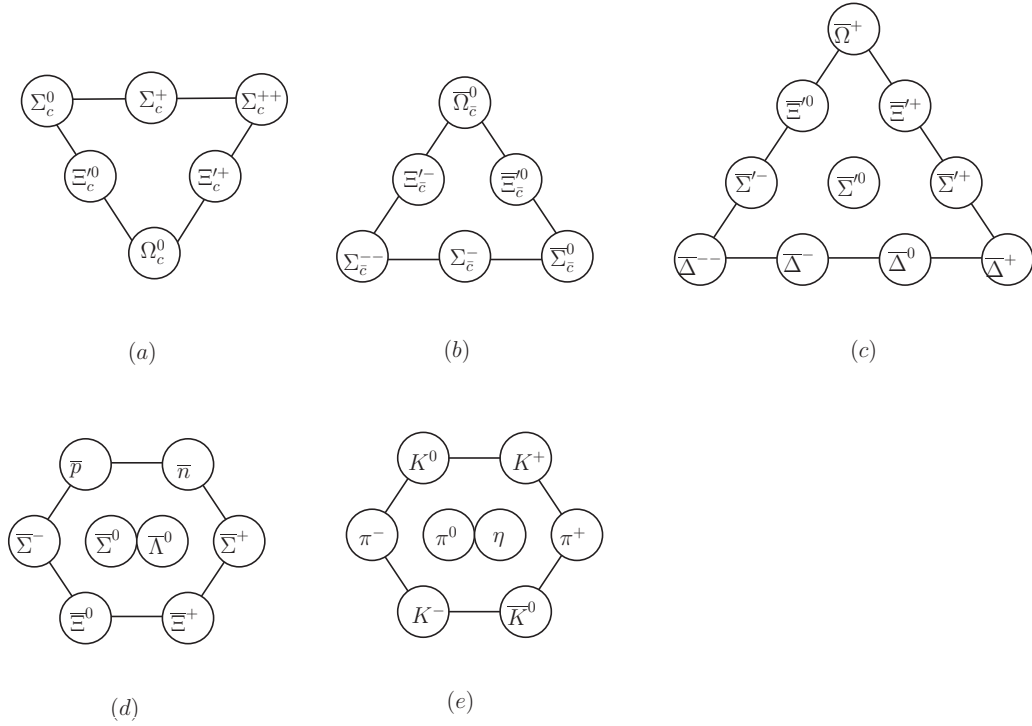


图 2.3 六重态、反六重态、反十重态、反八重态与八重态强子的味道SU(3) 权图。
 Fig 2.3 Flavor SU(3) weight diagrams for the sextet, anti-sextet, anti-decuplet, anti-octet and octet hadrons.

在介子的多重态分类方面，轻介子，如轻的赝标介子或矢量介子，可以形成一个八重态 $\mathbf{8}$ 与一个味道单态 $\mathbf{1}$ 介子。其中具有混合对称性的赝标介子八重态表示为

$$(M_8)_j^i = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\frac{\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

轻赝标介子单态为

$$(M_1)_i^i = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

这里八重态的 $\eta = (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)/\sqrt{6}$ 与单态的 $\eta_1 = (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)/\sqrt{3}$ 之间可以发

生混合。轻矢量介子的讨论与赝标介子类似，其中轻矢量介子八重态为

$$(V)_j^i = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0 + \omega}{\sqrt{2}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0 + \omega}{\sqrt{2}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \phi \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

这里 ω 与 ϕ 是 V_8 与 V_1 的混合

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_8 \\ V_1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

ω 与 ϕ 的理想混合角为 $\theta \simeq 54.74^\circ$ 。单重介子，如粲介子、 B 介子，由一个轻夸克与一个重夸克组成，因此可以形成一个SU(3)反三重态 $\bar{\mathbf{3}}$ 。其中反三重态粲介子表示为

$$D_i = \left(D^0, D^+, D_s^+ \right), \quad \bar{D}^i = \left(\bar{D}^0, D^-, D_s^- \right). \quad (2.21)$$

B 介子的表示如下

$$B_i = \left(B^-, \bar{B}^0, \bar{B}_s^0 \right), \quad \bar{B}_i = \left(B^+, B^0, B_s^0 \right). \quad (2.22)$$

双重介子由两个重夸克组成，如 J/ψ 与 B_c 等，它们在SU(3)对称性下形成一个味道单态。

对于含有两个轻夸克的双重味四夸克态($QQ\bar{q}\bar{q}$)，其可以分解为SU(3)三重态 $\mathbf{3}$ 与反六重态 $\bar{\mathbf{6}}$ ： $\bar{\mathbf{3}} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{6}}$ 。原则上夸克组分为 $QQ\bar{q}\bar{q}$ 的双重味四夸克态与其对应的反粒子性质类似，所以本文只关注含一对正的重夸克的四夸克态。其中三重态可以表示为：

$$\begin{aligned} (T_{cc3})_{[ij]} &= \begin{pmatrix} 0 & T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ & T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \\ -T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ & 0 & T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \\ -T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ & -T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} & 0 \end{pmatrix}, & (T_{bc3})_{[ij]} &= \begin{pmatrix} 0 & T_{bc\bar{u}\bar{d}}^+ & T_{bc\bar{u}\bar{s}}^+ \\ -T_{bc\bar{u}\bar{d}}^+ & 0 & T_{bc\bar{d}\bar{s}}^{++} \\ -T_{bc\bar{u}\bar{s}}^+ & -T_{bc\bar{d}\bar{s}}^{++} & 0 \end{pmatrix}, \\ (T_{bb3})_{[ij]} &= \begin{pmatrix} 0 & T_{bb\bar{u}\bar{d}}^+ & T_{bb\bar{u}\bar{s}}^+ \\ -T_{bb\bar{u}\bar{d}}^+ & 0 & T_{bb\bar{d}\bar{s}}^{++} \\ -T_{bb\bar{u}\bar{s}}^+ & -T_{bb\bar{d}\bar{s}}^{++} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

考虑到双重味四夸克态的六重态，通常是不稳定的会强衰变到双重味三重态，因此弱衰变被压低，本文不作详细的讨论。

对于含有正反轻夸克的双重味四夸克态, 如 $Q\bar{Q}'q\bar{q}'$, 其在SU(3)对称性下可分解为八重态 $\mathbf{8}$ 与单态 $\mathbf{1}$: $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ 。八重态与单态分别表示为

$$(T_{\mathbf{bc}\mathbf{8}})^i_j = \begin{pmatrix} \frac{T_{\pi^0}^{Bc}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{\eta_8}^{Bc}}{\sqrt{6}} & T_{\pi^+}^{Bc} & T_{K^+}^{Bc} \\ T_{\pi^-}^{Bc} & -\frac{T_{\pi^0}^{Bc}}{\sqrt{2}} + \frac{T_{\eta_8}^{Bc}}{\sqrt{6}} & T_{K^0}^{Bc} \\ T_{K^-}^{Bc} & T_{K^0}^{Bc} & -\frac{2}{\sqrt{6}}T_{\eta_8}^{Bc} \end{pmatrix}, \quad (T_{\mathbf{bc}\mathbf{1}})^i_i = \begin{pmatrix} \frac{T_{\eta_1}^{Bc}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{\eta_1}^{Bc}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_{\eta_1}^{Bc}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

2.3 夸克衰变类型分类

SU(3)对称性可以很好地对一个静态多夸克系统进行分类, 此外对于一些涉及到动力学的过程, 如夸克的弱衰变过程, SU(3)方法也能够有效的应用。我们考虑 b 夸克的非轻弱衰变过程 $b \rightarrow c\bar{q}_1q_2$, 其算符表示为 $H = (\bar{c}b)(\bar{q}_2q_1)$ 。算符 H 含有正反轻夸克场 q_1 、 \bar{q}_2 , 因此在SU(3)对称性下 H 可以分解为一个八重态算符 H_8 , 其中味道八重态算符的表示为: $(H_8)_j^i = (\bar{c}b)(\bar{q}_{2j}q_1^i - \frac{1}{3}\delta_j^i\bar{q}_{2k}q_1^k)$ 。由于弱衰变算符要作用到跃迁矩阵元中, 所以我们省略算符中的夸克场, 而只保留算符前面的系数。

双重味重子(如 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb})或双重味四夸克态(如 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$)中的 b 夸克可以发生弱衰变, Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} (/ $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$)会发生 c 夸克的衰变, 而 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc} (/ $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$)会同时发生 b 与 c 夸克的弱衰变。本节我们主要讨论重夸克(c 、 b)的弱衰变分类, 同时给出不同弱衰变算符对应的系数。

- b/c 夸克可以发生半轻衰变, 我们将其分为两类

$$b \rightarrow c/u\ell^- \bar{\nu}_\ell, \quad \bar{c} \rightarrow \bar{d}/\bar{s}\ell^- \bar{\nu}_\ell. \quad (2.25)$$

与半轻过程对应的有效电弱哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [V_{q'b}\bar{q}'\gamma^\mu(1-\gamma_5)b\bar{\ell}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell + V_{cq}\bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)q\bar{\ell}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\ell] + h.c., \quad (2.26)$$

这里 $q' = (u, c)$, $q = (d, s)$ 。 $b \rightarrow u\ell^- \bar{\nu}_\ell$ 与 $\bar{c} \rightarrow \bar{q}\ell^- \bar{\nu}$ 的过程均可以用一个SU(3)三重态算符表示, 分别记为 $(H'_3)^i$ 与 $(H_3)_i$ 。 $b \rightarrow c\ell^- \bar{\nu}_\ell$ 过程的算符则形成一个味道单态。我们给出相关算符的系数如下

$$(H'_3)^1 = 1, \quad (H'_3)^{2,3} = 0; \quad (H_3)_1 = 0, \quad (H_3)_2 = V_{cd}, \quad (H_3)_3 = V_{cs}. \quad (2.27)$$

- 粲夸克(c)可以发生非轻衰变, 根据弱衰变的Cabibbo - Kobayashi - Maskawa (CKM) 矩阵元的大小, 我们将其依次分类为

$$\bar{c} \rightarrow \bar{s}d\bar{u}, \bar{c} \rightarrow \bar{u}d\bar{d}/\bar{s}\bar{s}, \bar{c} \rightarrow \bar{d}s\bar{u}, \quad (2.28)$$

它们分别对应于Cabibbo允许, 单Cabibbo压低与双Cabibbo压低的过程。与粲夸克非轻衰变相对应有效哈密顿量分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{ud}^* [C_1 O_1^{\bar{c}u} + C_2 O_2^{\bar{c}u}] + \text{h.c.}, \\ \mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ V_{cq} V_{uq}^* [C_1 O_1^{\bar{c}u} + C_2 O_2^{\bar{c}u}] - V_{cb} V_{ub}^* \left[\sum_{i=3}^{10} C_i O_i \right] \right\} + \text{h.c.}, \\ \mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{us}^* [C_1 O_1^{\bar{c}u} + C_2 O_2^{\bar{c}u}] + \text{h.c.} \quad (q = d, s). \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中 C_i 为Wilson系数, $O_{1/2}$ 为树图算符, O_{3-10} 为企鹅图算符。在味道SU(3)对称性下, $\bar{c} \rightarrow \bar{q}_1 q_2 \bar{q}_3$ 过程可以分解为 $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{15}}$ 。利用张量分解(2.9)式, 我们可以抽取出衰变算符的系数。对于Cabibbo允许的过程 $\bar{c} \rightarrow \bar{s}d\bar{u}$, 非零的张量分量为

$$(H_6)_{31}^2 = -(H_6)_{13}^2 = 1, \quad (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{31}^2 = (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{13}^2 = 1. \quad (2.30)$$

对于单Cabibbo压低的过程 $\bar{c} \rightarrow \bar{u}d\bar{d}$ 与 $\bar{c} \rightarrow \bar{u}s\bar{s}$, 非零的张量分量分别为

$$\begin{aligned} (H_6)_{31}^3 &= -(H_6)_{13}^3 = (H_6)_{12}^2 = -(H_6)_{21}^2 = \sin(\theta_C), \\ (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{31}^3 &= (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{13}^3 = -(H_{\bar{\mathbf{15}}})_{12}^2 = -(H_{\bar{\mathbf{15}}})_{21}^2 = \sin(\theta_C). \end{aligned} \quad (2.31)$$

对于双Cabibbo压低过程 $\bar{c} \rightarrow \bar{d}s\bar{u}$, 非零的张量分量为

$$(H_6)_{21}^3 = -(H_6)_{12}^3 = -\sin^2 \theta_C, \quad (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{21}^3 = (H_{\bar{\mathbf{15}}})_{12}^3 = -\sin^2 \theta_C. \quad (2.32)$$

- 底夸克(b)可以发生非轻弱衰变, 我们根据CKM矩阵元的大小将其分为如下几类

$$b \rightarrow c\bar{c}d/s, b \rightarrow c\bar{u}d/s, b \rightarrow u\bar{c}d/s, b \rightarrow q_1\bar{q}_2q_3, \quad (2.33)$$

这里 $q_{1,2,3}$ 表示轻夸克(d/s)。与底夸克非轻衰变对应的有效哈密顿量分别为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{cq}^* [C_1 O_1^{\bar{c}c} + C_2 O_2^{\bar{c}c}] + \text{h.c.},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{uq}^* [C_1 O_1^{\bar{c}u} + C_2 O_2^{\bar{c}u}] + \text{h.c.}, \\
\mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} V_{cq}^* [C_1 O_1^{\bar{u}c} + C_2 O_2^{\bar{u}c}] + \text{h.c.}, \\
\mathcal{H}_{eff} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ V_{ub} V_{uq}^* [C_1 O_1^{\bar{u}u} + C_2 O_2^{\bar{u}u}] - V_{tb} V_{tq}^* \left[\sum_{i=3}^{10} C_i O_i \right] \right\} + \text{h.c.}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 过程的衰变算符形成一个三重态 $(H_3)^i$; $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ 过程的衰变算符形成一个混合对称的八重态 $(H_8)_j^i$; $b \rightarrow u\bar{c}s$ 过程的衰变算符形成一个反三重态 $(H_3)_j^{[ij]}$ 与一个六重态 $(H_6)^{\{ij\}}$; $b \rightarrow u\bar{c}d$ 过程的衰变算符与 $b \rightarrow u\bar{c}s$ 过程的类似, 其系数可以通过交换算符的指标 $2 \rightarrow 3$ 与替换 $V_{cs} \rightarrow V_{cd}$ 得到,

$$\begin{aligned}
(H_3)^2 &= V_{cd}^*, \quad (H_3)^3 = V_{cs}^*, \quad (H_8)_1^2 = V_{ud}^*, \quad (H_8)_1^3 = V_{us}^*, \\
(H_3)_1^{13} &= -(H_3)_1^{31} = V_{cs}^*, \quad (H_6)^{13} = (H_6)^{31} = V_{cs}^*.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

对于无粲衰变过程 $b \rightarrow q_1\bar{q}_2q_3$ ($q_i = u, d, s$), 其算符的系数可以通过张量分解 $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{15}$ 得到, 其中三重态算符 H_3 与企鹅图过程相关。在 $\Delta S = 0$ ($b \rightarrow d$)的衰变过程中, 非零的张量分量为

$$\begin{aligned}
(H_3)^2 &= 1, \quad (H_{\bar{6}})_1^{12} = -(H_{\bar{6}})_1^{21} = (H_{\bar{6}})_3^{23} = -(H_{\bar{6}})_3^{32} = 1, \\
2(H_{15})_1^{12} &= 2(H_{15})_1^{21} = -3(H_{15})_2^{22} = -6(H_{15})_3^{23} = -6(H_{15})_3^{32} = 6.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

对于 $\Delta S = 1$ ($b \rightarrow s$)的衰变过程, 算符 H_3 、 $H_{\bar{6}}$ 以及 H_{15} 的系数可以通过在等式(2.36)中交换算符指标 $2 \leftrightarrow 3$ 得到。

2.4 双重味重子的弱衰变

双重味重子的研究是当前重味物理中的一个重要研究方向。实验上关于双重味重子的寻找已经持续了很长时间 [34–39], LHCb实验组在2017年宣布发现了双粲味夸克重子 $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ 。该分析基于对撞能量为13TeV, 累计的数据量为 $1.7fb^{-1}$, 之后在对撞能量为8TeV的累计数据结果再次验证了这个发现。

本节我们将采用SU(3)味道对称性的方法 [33], 依次对双重味 bb 重子(Ξ_{bb} 与 Ω_{bb})、双重味 cc 重子(Ξ_{cc} 与 Ω_{cc}) 以及双重味 bc 重子(Ξ_{bc} 与 Ω_{bc})的衰变进行讨论。由于LHCb实验是通过多体衰变过程 $\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+ \pi^+$ [16] 发现了双重味重子 Ξ_{cc}^{++} 。因此本文将主要讨论双重味重子的多体衰变过程, 包括三体非轻弱衰变过程与四体半轻弱衰变过程。

2.4.1 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb}

本章前几节分别给出了强子多重态与夸克弱衰变算符在SU(3)对称性下的表示, 据此我们可以构造出具有SU(3)不变性的强子层次的有效哈密顿量。其中强子的SU(3)表示可以用来产生或湮灭初末态强子, 弱衰变算符的SU(3)表示作用在强子的跃迁矩阵中, 表征强子的弱衰变过程, 以外的非微扰效应则吸收到相关系数 $a_i, b_i, c_i \dots$ 中。利用构造的有效哈密顿量, 我们将依次讨论双重味 bb 重子的半轻弱衰变与非轻弱衰变。

首先考虑双重味 bb 重子的半轻衰变过程。根据夸克衰变类型分类 (2.33) 节, 夸克层次的半轻衰变为 $b \rightarrow c\ell\nu$ 与 $b \rightarrow u\ell\nu$, 在强子层次上其对应于双重味 bb 重子衰变到双重味 bc 重子 (/ 单重味重子)、一个轻介子与轻子对的过程。基于强子态及弱衰变算符的表示, 我们构造出四体半轻衰变过程的哈密顿量

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & a_5(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_i^j \bar{\ell}\nu_\ell + a_6(T_{bb})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[ik]} M_j^k \bar{\ell}\nu_\ell \\ & + a_7(T_{bb})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[jk]} M_i^k \bar{\ell}\nu_\ell + a_8(T_{bb})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{ik\}} M_j^k \bar{\ell}\nu_\ell \\ & + a_9(T_{bb})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{jk\}} M_i^k \bar{\ell}\nu_\ell. \end{aligned} \quad (2.37)$$

将哈密顿量 (2.37) 式作用到强子跃迁矩阵元中, 我们就可以得到双重味 bb 重子不同的衰变道及相关衰变振幅。表格 2.1 给出双重味 bb 重子衰变到双重味 bc / 单重味重子的衰变道及相关衰变振幅。另外基于衰变振幅的结果, 同时忽略不同末态相空间的影响, 我们可以进一步得到不同衰变道宽度的关系。其中双重味 bb 重子到双重味 bc 重子的不同衰变道宽度的关系如下:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 3\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{3}{4}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell). \end{aligned}$$

双重味 bb 重子衰变到底重子的不同衰变道宽度的关系为:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 2\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell), \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) \end{aligned}$$

表 2.1 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到双重味 bc 三重态重子与轻介子。Tab 2.1 Doubly heavy-baryon Ξ_{bb} and Ω_{bb} decay into triplet baryon bcq and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_5 V_{cb}}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_5 V_{cb}}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_5 V_{cb}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_5 V_{cb}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} a_5 V_{cb}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\frac{a_5 V_{cb}}{\sqrt{2}}$		
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$(a_6 + a_7) V_{ub}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_6 V_{ub}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$(a_6 + a_7) V_{ub}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_7 V_{ub}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\frac{(a_6 + a_7) V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\frac{a_6 V_{ub}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\frac{(a_6 - a_7) V_{ub}}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-\frac{(a_6 + 2a_7) V_{ub}}{\sqrt{6}}$		
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_7 V_{ub}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$-a_6 V_{ub}$		
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 + a_9) V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_9 V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 + a_9) V_{ub}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime-} K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_8 V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 + a_9) V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^+ K^- \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_9 V_{ub}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime0} K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 + a_9) V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_9 V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^- \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_9 V_{ub}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime0} \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_8 V_{ub}}{2}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{1}{2} (a_8 - a_9) V_{ub}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime0} \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 - 2a_9) V_{ub}}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{(a_8 + a_9) V_{ub}}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime-} \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$\frac{a_8 V_{ub}}{\sqrt{2}}$		
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_8 V_{ub}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$	$a_8 V_{ub}$		

$$\begin{aligned}
&= 6\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \eta \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell), \\
&\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^- \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 2\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^+ K^- \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\
&= 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \bar{K}^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell), \\
&\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 2\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime-} K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 4\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime0} \pi^0 \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\
&= \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime-} \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell).
\end{aligned}$$

对于双重味 bb 重子的非轻衰变过程，根据夸克衰变类型的分类 (2.33) 节，其大致可以分为四类，其中前两类为CKM矩阵元单压低的过程，而后两类的CKM矩阵元压低效果更明显。本节我们主要讨论前两类过程： $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 与 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ 。关于CKM压低效应更明显的过程，介于篇幅我们不做详细讨论，其具体计算可以参考文献 [29]。

考虑第一类非轻弱衰变过程 $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ ，在强子层次上，其对应于双重味 bb 重子衰变到底重子、 J/ψ 和一个轻介子，或双重味 bc 重子、反粲介子和一个轻介子的两类三体末态过程。弱衰变算符 $(\bar{c}b)(\bar{d}/\bar{s}c)$ 可以形成SU(3)三重态，末态底重子可以形成反三重态与六重态重子，结合它们的强子表示我们构造出有效哈密顿量

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= a_1 (T_{bb})^i (H_3)^j M_j^k (\bar{T}_{b\bar{3}})_{[ik]} J/\psi + a_2 (T_{bb})^i (H_3)^j M_i^k (\bar{T}_{b\bar{3}})_{[jk]} J/\psi \\
&\quad + a_3 (T_{bb})^i (H_3)^j M_j^k (\bar{T}_{b\mathbf{6}})_{[ik]} J/\psi + a_4 (T_{bb})^i (H_3)^j M_i^k (\bar{T}_{b\mathbf{6}})_{[jk]} J/\psi, \quad (2.38) \\
\mathcal{H}_{eff} &= a_5 (T_{bb})^i (H_3)^j (\bar{T}_{bc})_i D_k M_j^k + a_6 (T_{bb})^i (H_3)^j (\bar{T}_{bc})_j D_k M_i^k \\
&\quad + a_7 (T_{bb})^i (H_3)^j (\bar{T}_{bc})_k D_j M_i^k + a_8 (T_{bb})^i (H_3)^j (\bar{T}_{bc})_k D_i M_j^k. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

其中衰变算符 H 的相关参数在 2.3 节已经给出。我们对末态为底重子的哈密顿量展开，并将得到的衰变道与衰变振幅列在表格 2.2 中，我们进一步推导出末态为反三重态底重子的衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^0 J/\psi) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^- J/\psi) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- K^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi) &= \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^0 J/\psi) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 \pi^0 J/\psi) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- \pi^+ J/\psi) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \bar{K}^0 J/\psi) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 K^- J/\psi), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- K^+ J/\psi) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 K^- J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^- J/\psi) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- K^0 J/\psi), \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \bar{K}^0 J/\psi) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^- J/\psi).\end{aligned}$$

末态为六重态底重子的衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^- J/\psi) &= 2\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^0 J/\psi) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^0 J/\psi) = 4\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- \pi^0 J/\psi) \\ &= 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi) = \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 \pi^0 J/\psi) &= \frac{1}{4}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- K^+ J/\psi) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi) = \frac{1}{4}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^0 J/\psi) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- \pi^+ J/\psi) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- \pi^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^- J/\psi) &= 6\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \eta J/\psi) = 3\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \eta J/\psi) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- K^0 J/\psi) \\ &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \pi^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \bar{K}^0 J/\psi) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ K^- J/\psi) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 K^- J/\psi) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \bar{K}^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- \pi^+ J/\psi) &= 2\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- K^+ J/\psi) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 K^- J/\psi) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \bar{K}^0 J/\psi), \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^- J/\psi) &= \frac{3}{4}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- \eta J/\psi) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- \bar{K}^0 J/\psi).\end{aligned}$$

展开末态为双重味 bc 重子的哈密顿量，我们得到不同衰变道及衰变振幅见表格 2.3。相关衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^-) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^+) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^0), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \eta) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \eta), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- K^+) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-) = \frac{1}{4}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^0) = \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^+), \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^-) &= \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 K^0) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^0), \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-) &= \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- K^0) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^0), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \bar{D}^0 \pi^-) &= \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^0), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \bar{K}^0) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \bar{K}^0) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- K^-), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \pi^+) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \bar{K}^0), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- K^+) &= \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- K^-), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^+) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^0), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \pi^-) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- K^0), \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- K^0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \pi^0) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \eta), \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \bar{K}^0) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \bar{D}^0 K^-), \\
\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \bar{K}^0) &= \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- K^-), \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \bar{K}^0) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-), \\
\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \eta) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \eta).
\end{aligned}$$

对于第二类非轻弱衰变过程 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$, 在强子层次上, 其对应于双重味 bb 重子衰变到一个双重味 bc 重子与两个轻介子, 或一个底重子、粲介子与轻介子的两类三体过程。我们依次构造相关的哈密顿量

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= a_9(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_i M_k^j M_l^i (H_{\mathbf{8}})_l^k + a_{10}(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_i^j M_l^i (H_{\mathbf{8}})_k^l \\
&+ a_{11}(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_i^l M_k^j (H_{\mathbf{8}})_l^k + a_{12}(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_i^l M_l^k (H_{\mathbf{8}})_k^j \\
&+ a_{13}(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_k^j M_l^k (H_{\mathbf{8}})_i^l + a_{14}(T_{bb})^i(\bar{T}_{bc})_j M_i^k M_l^k (H_{\mathbf{8}})_i^j, \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= a_{15}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[ij]} \bar{D}^j M_l^k (H_{\mathbf{8}})_k^l + a_{16}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[ij]} \bar{D}^l M_k^j (H_{\mathbf{8}})_l^k \\
&+ a_{17}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[ij]} \bar{D}^l M_l^k (H_{\mathbf{8}})_k^j + a_{18}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[jk]} \bar{D}^j M_i^l (H_{\mathbf{8}})_l^k \\
&+ a_{19}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[jk]} \bar{D}^l M_i^j (H_{\mathbf{8}})_l^k + a_{20}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[jk]} \bar{D}^l M_l^k (H_{\mathbf{8}})_i^j \\
&+ a_{21}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b\bar{3}})_{[kl]} \bar{D}^l M_j^k (H_{\mathbf{8}})_i^j + a_{22}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[ij]} \bar{D}^j M_l^k (H_{\mathbf{8}})_k^l \\
&+ a_{23}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[ij]} \bar{D}^l M_k^j (H_{\mathbf{8}})_l^k + a_{24}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[ij]} \bar{D}^l M_l^k (H_{\mathbf{8}})_k^j \\
&+ a_{25}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[jk]} \bar{D}^j M_i^l (H_{\mathbf{8}})_l^k + a_{26}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[jk]} \bar{D}^l M_i^j (H_{\mathbf{8}})_k^l \\
&+ a_{27}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[jk]} \bar{D}^l M_l^k (H_{\mathbf{8}})_i^j + a_{28}(T_{bb})^i(\bar{T}_{b6})_{[kl]} \bar{D}^l M_j^k (H_{\mathbf{8}})_i^j. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

我们展开末态为双重味 bc 重子的哈密顿量, 将衰变振幅的结果列在表格 2.4 中。我们进一步得到衰变宽度的关系为:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^0 \pi^-) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- K^0) = \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- K^-) = \frac{1}{4}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \pi^-) \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \pi^-) = \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- \pi^-) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \pi^-), \\
\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^+ \pi^-), \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- \bar{K}^0) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 K^-), \\
\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \bar{K}^0) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 \eta) = 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta \bar{K}^0), \\
\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 K^-) &= 3\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^- \eta) = 3\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta K^-), \\
\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 K^-) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^- \eta) = 3\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta K^-), \\
\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 K^-) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- K^-) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- K^-), \\
\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 K^0) &= 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \eta) = 3\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \eta K^0),
\end{aligned}$$

表 2.2 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到 J/ψ , 底重子与轻介子。Tab 2.2 Doubly heavy-baryon Ξ_{bb} and Ω_{bb} decay into J/ψ , singly heavy b-baryon and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^0 J/\psi$	$-\frac{(a_1+a_2)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi$	$-a_2 V_{cs}^*$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 K^- J/\psi$	$-a_2 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \bar{K}^0 J/\psi$	$a_1 V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^0 J/\psi$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 \pi^- J/\psi$	$-a_1 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 \eta J/\psi$	$\frac{(a_1-a_2)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- K^0 J/\psi$	$(a_1 + a_2) V_{cd}^*$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 K^- J/\psi$	$-(a_1 + a_2) V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 \pi^0 J/\psi$	$-\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \eta J/\psi$	$-\frac{(2a_1+a_2)V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \pi^0 J/\psi$	$\frac{a_1 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 K^0 J/\psi$	$a_1 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- K^+ J/\psi$	$a_2 V_{cd}^*$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \bar{K}^0 J/\psi$	$-(a_1 + a_2) V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 \eta J/\psi$	$-\frac{(2a_1+a_2)V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \pi^- J/\psi$	$-(a_1 + a_2) V_{cd}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- \eta J/\psi$	$-\frac{(a_1+2a_2)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- \pi^+ J/\psi$	$-a_2 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 K^- J/\psi$	$-a_1 V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^- J/\psi$	$a_3 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \eta J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 K^- J/\psi$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ K^- J/\psi$	$a_3 V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} \pi^- J/\psi$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \bar{K}^0 J/\psi$	$a_4 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^0 J/\psi$	$\frac{1}{2}(a_4 - a_3) V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \pi^0 J/\psi$	$-\frac{1}{2}a_4 V_{cs}^*$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} \pi^- J/\psi$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \bar{K}^0 J/\psi$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} K^0 J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} K^- J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 \eta J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \eta J/\psi$	$\frac{(a_4-2a_3)V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \pi^0 J/\psi$	$-\frac{1}{2}a_3 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- \pi^+ J/\psi$	$a_4 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^0 J/\psi$	$a_4 V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \bar{K}^0 J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} \pi^0 J/\psi$	$\frac{1}{2}a_4 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- K^+ J/\psi$	$a_4 V_{cs}^*$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \eta J/\psi$	$\frac{(a_3-2a_4)V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} K^0 J/\psi$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^- J/\psi$	$\frac{(a_3+a_4)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- K^0 J/\psi$	$a_3 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime 0} \eta J/\psi$	$\frac{(a_4-2a_3)V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 K^- J/\psi$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- \eta J/\psi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}(a_3 + a_4) V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime -} \pi^+ J/\psi$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \pi^0 J/\psi$	$-\frac{(a_3+a_4)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^{\prime -} K^+ J/\psi$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- \bar{K}^0 J/\psi$	$a_3 V_{cs}^*$		

表 2.3 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到双重味 bc 重子, 反粲介子与轻介子。Tab 2.3 Doubly heavy-baryon Ξ_{bb} and Ω_{bb} decay into bcq baryon, anti-charmed meson and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \bar{D}^0 \pi^-$	$(a_5 + a_8) V_{cd}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-$	$a_6 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \bar{D}^0 K^-$	$(a_5 + a_8) V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \bar{K}^0$	$(a_6 + a_7) V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \pi^0$	$\frac{(a_7 - a_5) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^0$	$-\frac{a_8 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \bar{K}^0$	$a_5 V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \bar{K}^0$	$(a_7 + a_8) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \eta$	$\frac{(a_5 + a_7) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \eta$	$\frac{(a_8 - 2a_6) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^0$	$\frac{a_7 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-$	$a_5 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- K^0$	$a_5 V_{cd}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-$	$(a_5 + a_6) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \eta$	$\frac{(a_7 - 2a_5) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^0$	$-\frac{a_5 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^0$	$\frac{(a_6 - a_8) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \bar{K}^0$	$(a_5 + a_6) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \bar{K}^0$	$a_8 V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \eta$	$\frac{(a_5 - 2a_7) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \eta$	$\frac{(a_6 + a_8) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^0$	$(a_5 + a_8) V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \pi^+$	$(a_6 + a_7) V_{cd}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- \eta$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^+$	$a_7 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- K^0$	$(a_5 + a_6) V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- K^+$	$a_6 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \eta$	$\frac{(a_7 - 2a_5) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^0$	$\frac{a_6 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-$	$a_6 V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 K^0$	$a_8 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^0$	$-\frac{a_6 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0 \eta$	$\frac{(a_6 - 2a_8) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- K^0$	$(a_7 + a_8) V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \pi^+$	$a_6 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- \eta$	$\frac{(a_6 - 2a_8) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^- K^+$	$a_7 V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^0$	$(a_6 + a_7) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^- K^+$	$(a_6 + a_7) V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- K^-$	$a_7 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- \pi^-$	$(a_7 + a_8) V_{cd}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^-$	$a_8 V_{cd}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D^- K^-$	$a_8 V_{cs}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- K^-$	$(a_7 + a_8) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^- \pi^-$	$a_7 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \bar{K}^0$	$(a_5 + a_8) V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 \pi^-$	$(a_5 + a_6) V_{cd}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \eta$	$\frac{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{D}^0 K^-$	$a_5 V_{cs}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^- \pi^0$	$-\frac{a_7 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D^- \pi^0$	$-\frac{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$		

表 2.4 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到双重味 bc 重子与两个轻夸克。Tab 2.4 Doubly bottom baryon decays into a bcq and two light mesons.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^0 \pi^-$	$\frac{(a_{10}+a_{11})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^- \eta$	$\frac{(a_{10}-a_9)V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^0 K^-$	$\frac{(a_9+a_{10}+a_{11}+a_{13})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- K^0$	$(a_{10} + a_{11}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \bar{K}^0$	$(a_9 + a_{13}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- \eta$	$\sqrt{\frac{2}{3}} (a_{12} - a_{11}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \eta$	$\frac{(2a_9+a_{10}+a_{11}+2a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 K^-$	$(a_{10} + a_{12}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^0 K^-$	$(a_9 + a_{13}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- K^-$	$(a_{10} + a_{11}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- \eta$	$\frac{(-a_9+a_{10}+a_{11}-a_{13})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ K^- K^-$	$2(a_{10} + a_{11}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^+ \pi^-$	$(a_{10} + a_{12} + a_{13} + 2a_{14}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 K^-$	$\frac{(a_{12}-a_{11})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^+ K^-$	$(a_{10} + a_{13}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^- \bar{K}^0$	$(a_{10} + a_{12}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \pi^0$	$(-a_{11} + a_{12} + a_{13} + 2a_{14}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 K^-$	$(a_{10} + a_{11}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{(a_{11}-a_{13})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^- \eta$	$\frac{(a_{11}-a_{12})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \eta$	$\frac{(a_{12}-a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{3}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 K^-$	$\frac{(a_9+a_{12})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^+ K^-$	$(a_{12} + 2a_{14}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- \bar{K}^0$	$(a_9 + a_{12}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^0 \bar{K}^0$	$(a_{13} + 2a_{14}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- \eta$	$\sqrt{\frac{2}{3}} (a_9 - a_{10}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{K}^0 \eta$	$\frac{(a_{11}-a_{13})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 K^-$	$(a_9 + a_{11}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \eta \eta$	$\frac{1}{3} (a_{11} + a_{12} + a_{13} + 6a_{14}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^- \eta$	$-\frac{(a_9+2a_{10}+2a_{11}+a_{12})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^+ \pi^-$	$(a_{12} + 2a_{14}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \eta \eta$	$\frac{1}{3} (-2a_{11} + a_{12} + 4a_{13} + 6a_{14}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 \pi^0$	$(a_{12} + 2a_{14}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- \pi^-$	$2(a_{10} + a_{11}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 K^0$	$\frac{(a_{11}-a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \pi^- K^-$	$(a_{10} + a_{11}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 \eta$	$\frac{(a_{12}-a_{11})V_{us}^*}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 \pi^-$	$-\frac{(a_{10}+a_{11})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- K^+$	$(a_{10} + a_{13}) V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^0 K^-$	$\frac{(a_9-a_{10})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^+ K^-$	$(a_{10} + a_{12} + a_{13} + 2a_{14}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^- \bar{K}^0$	$(a_9 + a_{11}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \bar{K}^0$	$(a_{13} + 2a_{14}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^- \eta$	$\frac{(2a_9+a_{10}+a_{11}+2a_{12})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 K^0 \eta$	$\frac{(a_{11}-a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^0 K^-$	$(a_9 + a_{12}) V_{ud}^*$

$$\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^0 \eta) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^- \eta).$$

对于末态为底重子的过程，其中底重子在SU(3)对称性下可以分解为反三重态与六重态重子。末态为反三重态重子的衰变振幅见表格 2.5，末态为六重态重子的衰变振幅见表格 2.6。在末态为反三重态重子的过程中，我们没有得到不同衰变道的衰变宽度的关系，末态为六重态重子的衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^0 \pi^+) &= 2\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b' D^0 K^+), \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b' D^0 \pi^+) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D^0 K^+), \\ \Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \pi^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \pi^-), \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^0 \pi^0) = \frac{1}{2} \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^+ \pi^-). \end{aligned}$$

表 2.5 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到底重子(反三重态)、粲介子及轻介子。Tab 2.5 Doubly heavy-baryon Ξ_{bb} and Ω_{bb} decay into singly heavy baryon bqq (anti-triplet), a charmed meson and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{(-a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}-a_{20}+a_{21})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 K^-$	$(a_{18} + a_{19}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 \bar{K}^0$	$(a_{16} - a_{21}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^-$	$-(a_{15} + a_{16}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 \eta$	$\frac{(a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}-a_{20}-a_{21})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 K^-$	$(-a_{15} - a_{16} + a_{18} + a_{19}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D^+ \pi^-$	$(a_{15} + a_{17} - a_{20} + a_{21}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^0 \pi^0$	$\frac{(a_{16}-a_{17})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D^+ K^-$	$(a_{15} + a_{21}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^0 \bar{K}^0$	$(a_{19} - a_{16}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Lambda_b^0 D_s^+ K^-$	$(a_{17} - a_{20}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^0 \eta$	$-\frac{(a_{16}+a_{17}-2a_{19})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{(a_{17}+a_{18}+a_{19}-a_{20})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^+ \pi^-$	$-(a_{15} + a_{17}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D^0 K^0$	$(a_{16} - a_{21}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^+ K^-$	$(a_{18} - a_{15}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \eta$	$\frac{(-2a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}-a_{20}+2a_{21})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ K^-$	$-(a_{17} + a_{18}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D^+ \pi^-$	$(a_{17} - a_{20}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ \bar{K}^0$	$(a_{21} - a_{20}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D_s^+ \pi^-$	$(a_{15} + a_{21}) V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ \eta$	$\frac{(-a_{18}-2a_{20}+a_{21})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^0 D_s^+ K^-$	$(a_{15} + a_{17} - a_{20} + a_{21}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 \pi^-$	$(-a_{15} - a_{16} + a_{18} + a_{19}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D^0 \pi^+$	$(a_{19} - a_{20}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 D^0 K^-$	$-(a_{15} + a_{16}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D^0 K^+$	$(a_{20} - a_{19}) V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^-$	$(a_{18} + a_{19}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D^+ \pi^0$	$\frac{(a_{18}+a_{20})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{(a_{17}-a_{19})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D^+ K^0$	$(a_{20} - a_{21}) V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^0 K^0$	$(a_{16} - a_{19}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D^+ \eta$	$\frac{(a_{18}-a_{20}+2a_{21})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^0 \eta$	$\frac{(-2a_{16}+a_{17}+a_{19})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ \pi^0$	$-\frac{(a_{18}+a_{21})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D^+ \pi^-$	$(a_{17} + a_{18}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ K^-$	$(a_{15} + a_{17}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^- D_s^+ \pi^-$	$(a_{15} - a_{18}) V_{ud}^*$

2.4.2 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc}

考虑双重味 cc 重子的半轻弱衰变过程。根据双重味 cc 重子及末态强子的SU(3)表示, 我们写出双重味重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到粲重子、轻介子及轻子对的哈密顿量

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & a_1(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{3}}})_{[ik]}M_j^k \bar{\nu}_\ell \ell + a_2(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{3}}})_{[kj]}M_i^k \bar{\nu}_\ell \ell \\ & + a_3(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{c}\mathbf{6}})_{[ik]}M_j^k \bar{\nu}_\ell \ell + a_4(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{\mathbf{c}\mathbf{6}})_{[kj]}M_i^k \bar{\nu}_\ell \ell. \end{aligned} \quad (2.42)$$

展开哈密顿量我们得到双重味 cc 重子衰变到粲重子的衰变振幅, 见表格 2.8。从衰变振幅中我们可以推导出不同衰变道宽度的关系, 其中末态为反三重态粲重子的衰变宽度的关系为:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \ell^+ \nu_\ell) = 2\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell). \end{aligned}$$

表 2.6 双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 衰变到底重子(六重态)、粲介子及轻介子。Tab 2.6 Doubly heavy-baryon Ξ_{bb} and Ω_{bb} decay into singly heavy baryon bqq (sextet), charmed meson and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ D^0 \pi^-$	$(a_{22} + a_{23} + a_{28}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- D^0 \eta$	$\frac{(a_{23} + a_{24} - 2a_{26}) V_{ud}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ D^0 K^-$	$(a_{22} + a_{23} + a_{28}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- D^+ \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{24}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{1}{2} (-a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} - a_{28}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- D^+ K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{25}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 \bar{K}^0$	$\frac{(a_{23} + a_{28}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- D_s^+ K^-$	$\frac{(a_{24} + a_{25}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 \eta$	$\frac{(a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28}) V_{ud}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^0 \pi^0$	$\frac{a_{24} V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D^+ \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{24} + a_{27} + a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^0 K^0$	$a_{23} V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D^+ K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{28}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^0 \eta$	$\frac{(-2a_{23} + a_{24} - 2a_{26}) V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^0 D_s^+ K^-$	$\frac{(a_{24} + a_{27}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^+ \pi^-$	$a_{24} V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^0 \pi^+$	$(a_{26} + a_{27}) V_{ud}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \pi^-$	$a_{22} V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^+ \pi^0$	$\frac{(a_{25} - a_{27} - a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ K^-$	$(a_{22} + a_{24} + a_{25}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^+ \bar{K}^0$	$a_{28} V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b'^- D_s^+ K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{24}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^+ \eta$	$\frac{(a_{25} + a_{27} + a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D^0 K^0$	$a_{26} V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D_s^+ \bar{K}^0$	$a_{27} V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \pi^-$	$a_{25} V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D^0 \pi^0$	$\frac{1}{2} (a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27}) V_{us}^*$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 K^-$	$\frac{(a_{25} + a_{26}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D^0 K^0$	$\frac{(a_{23} + a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 \bar{K}^0$	$a_{26} V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D^0 \eta$	$\frac{(-2a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27} - 2a_{28}) V_{us}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 D^+ K^-$	$a_{25} V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D^+ \pi^-$	$\frac{(a_{24} + a_{27}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{23}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D_s^+ \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{23} + a_{25} + a_{26}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^0 D_s^+ K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{24} + a_{27} + a_{28}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{1}{2} (a_{24} - a_{23}) V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D^0 \pi^+$	$\frac{(a_{26} + a_{27}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \bar{K}^0$	$\frac{(a_{23} + a_{26}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D^0 K^+$	$\frac{(a_{26} + a_{27}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^0 \eta$	$\frac{(a_{23} + a_{24} + a_{26}) V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D^+ \pi^0$	$\frac{1}{2} (a_{25} - a_{27}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^+ \pi^-$	$(a_{22} + a_{24} + a_{25}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D^+ K^0$	$\frac{(a_{27} + a_{28}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^+ K^-$	$a_{22} V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D^+ \eta$	$\frac{(a_{25} + a_{27} - 2a_{28}) V_{us}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D_s^+ K^-$	$a_{24} V_{ud}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D_s^+ \pi^0$	$\frac{1}{2} (a_{25} - a_{28}) V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^-$	$\frac{(a_{25} + a_{26}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D_s^+ \bar{K}^0$	$\frac{(a_{27} + a_{28}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \pi^0$	$\frac{1}{2} (a_{24} - a_{26}) V_{us}^*$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_b'^- D_s^+ \eta$	$\frac{(a_{25} - 2a_{27} + a_{28}) V_{ud}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 K^0$	$\frac{(a_{23} + a_{26}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D^0 K^+$	$(a_{26} + a_{27}) V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^0 \eta$	$\frac{(-2a_{23} + a_{24} + a_{26}) V_{us}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D^+ K^0$	$a_{27} V_{us}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D^+ \pi^-$	$\frac{(a_{24} + a_{25}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \pi^0$	$\frac{a_{25} V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 D_s^+ \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{25}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ K^0$	$a_{28} V_{ud}^*$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 K^-$	$\frac{(a_{22} + a_{23}) V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_b^- D_s^+ \eta$	$\frac{(a_{25} - 2(a_{27} + a_{28})) V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^0 \pi^0$	$-\frac{(a_{23} - a_{24} + a_{26}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 D^0 \pi^-$	$\frac{(a_{22} + a_{23} + a_{25} + a_{26}) V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^0 \bar{K}^0$	$a_{23} V_{us}^*$

末态为六重态粲重子的衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} K^- \ell^+ \nu_\ell) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell) &= 2\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell) = 2\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell), \\ \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell) &= \frac{1}{4} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell) = \frac{1}{4} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell), \end{aligned}$$

表 2.7 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到粲重子(反三重态或者六重态)与轻介子。Tab 2.7 Doubly heavy-baryon Ξ_{cc} and Ω_{cc} decay into charmed baryon(anti-triplet or sextet) and a light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - a_1) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_1 V_{cs}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_1 + a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$(a_1 - a_2) V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - 2a_1) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_1 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - 2a_1) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$-a_1 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$-a_2 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_1 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$-a_1 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{(a_1 - 2a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cd}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{1}{2} a_4 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} K^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cs}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 - a_3}{2} V_{cd}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_4 - 2a_3) V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{1}{2} a_4 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_4 - 2a_3) V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{1}{2} a_3 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 - 2a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} (a_3 + a_4) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cs}^*$		

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell) &= 6\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell) = 3\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} K^0 \ell^+ \nu_\ell) \\
&= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- \ell^+ \nu_\ell) &= 2\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^{\prime +} K^0 \ell^+ \nu_\ell) = 2\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime +} \pi^- \ell^+ \nu_\ell) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell) \\
&= 4\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \pi^0 \ell^+ \nu_\ell), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime +} K^- \ell^+ \nu_\ell) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell) = \frac{3}{4}\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell).
\end{aligned}$$

根据Cabibbo的压低效应，双重味 cc 重子的非轻衰变可以分为三类（见夸克衰变模式分类 2.3节），鉴于篇幅限制本节我们只讨论Cabibbo允许的衰变过程： $\bar{c} \rightarrow \bar{s} d \bar{u}$ 。在强子层次上，其对应于双重味 cc 重子衰变到粲重子与两个轻介子，或轻重子、一个粲介子及一个轻介子的两类三体衰变过程，其中粲重子在SU(3)对称性下可以分解为反三重态与六重态重子，而轻重子则可以分解为八重态与十重态重子。利用末态强子的SU(3)表示及弱衰变算符 H 的表示，我们构造出上述两类过程的哈密顿量。

末态为反三重态粲重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= b_1(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[ij]} M_k^j M_l^m (H_{\bar{6}})_{m}^{kl} + b_2(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[jk]} M_i^j M_l^m (H_{\bar{6}})_{m}^{kl} \\
&+ b_3(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[lm]} M_i^j M_j^k (H_{\bar{6}})_{k}^{lm} + b_4(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[lm]} M_i^j M_k^m (H_{\bar{6}})_{j}^{kl} \\
&+ b_5(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[jk]} M_m^l M_l^m (H_{\bar{6}})_{i}^{jk} + b_6(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[jl]} M_m^l M_k^m (H_{\bar{6}})_{i}^{jk} \\
&+ b_7(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[lm]} M_j^l M_k^m (H_{\bar{6}})_{i}^{jk} + b_8(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[ij]} M_k^j M_l^m (H_{15})_{l}^{km} \\
&+ b_9(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[ij]} M_m^l M_k^m (H_{15})_{l}^{jk} + b_{10}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[jk]} M_i^j M_l^m (H_{15})_{m}^{kl} \\
&+ b_{11}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[lm]} M_i^j M_k^m (H_{15})_{j}^{kl} + b_{12}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[jl]} M_m^l M_k^m (H_{15})_{i}^{jk} \\
&+ \bar{b}_1(T_{cc})^i (\bar{T}_{c\bar{3}})_{[ij]} M_m^l M_k^m (H_{\bar{6}})_{l}^{jk}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

末态为六重态粲重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= b_1(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[ij]} M_k^j M_l^m (H_{15})_{m}^{kl} + b_2(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[ij]} M_m^l M_k^m (H_{15})_{l}^{jk} \\
&+ b_3(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[jk]} M_i^j M_l^m (H_{15})_{m}^{kl} + b_4(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[lm]} M_i^j M_j^k (H_{15})_{k}^{lm} \\
&+ b_5(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[lm]} M_i^j M_k^m (H_{15})_{j}^{kl} + b_6(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[jk]} M_m^l M_l^m (H_{15})_{i}^{jk} \\
&+ b_7(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[jl]} M_m^l M_k^m (H_{15})_{i}^{jk} + b_8(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[lm]} M_j^l M_k^m (H_{15})_{i}^{jk} \\
&+ b_9(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[ij]} M_k^j M_l^m (H_{\bar{6}})_{l}^{km} + b_{10}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[jk]} M_i^j M_l^m (H_{\bar{6}})_{m}^{kl} \\
&+ b_{11}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[lm]} M_i^j M_k^m (H_{\bar{6}})_{j}^{kl} + b_{12}(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[jl]} M_m^l M_k^m (H_{\bar{6}})_{i}^{jk} \\
&+ \bar{b}_9(T_{cc})^i (\bar{T}_{c6})_{[ij]} M_m^l M_k^m (H_{\bar{6}})_{l}^{jk}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

表 2.8 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到粲重子(反三重态或者六重态)与轻介子。Tab 2.8 Doubly heavy-baryon Ξ_{cc} and Ω_{cc} decay into charmed baryon(anti-triplet or sextet) and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - a_1) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_1 V_{cs}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_1 + a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$(a_1 - a_2) V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - 2a_1) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_1 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_2 - 2a_1) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$-a_1 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_2 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$-a_2 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_1 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$(a_2 - a_1) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$-a_1 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{(a_1 - 2a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cd}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{1}{2} a_4 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} K^- \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cs}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 - a_3}{2} V_{cd}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_4 - 2a_3) V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cd}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{1}{2} a_4 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_4 - 2a_3) V_{cs}^*}{2\sqrt{3}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{1}{2} a_3 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 - 2a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 K^+ \ell^+ \nu_\ell$	$a_4 V_{cs}^*$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} (a_3 + a_4) V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_3 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \eta \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^0 \ell^+ \nu_\ell$	$-\frac{(a_3 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- \ell^+ \nu_\ell$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \bar{K}^0 \ell^+ \nu_\ell$	$a_3 V_{cs}^*$		

末态为八重态轻重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} = & c_1(T_{cc})^i \bar{D}^j \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_6)_n^{lm} + c_2(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_6)_n^{jm} \\
& + c_3(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_l^m (T_8)_n^k (H_6)_m^{nj} + c_4(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_n^j (T_8)_m^k (H_6)_l^{mn} \\
& + c_5(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_n^m (T_8)_m^k (H_6)_l^{jn} + c_6(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_6)_n^{jm} \\
& + c_7(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_6)_n^{ij} + c_8(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_n^i (T_8)_l^k (H_6)_m^{jn} \\
& + c_9(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_l^n (T_8)_m^k (H_6)_n^{jm} + c_{10}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_l^n (T_8)_m^k (H_6)_n^{ij} \\
& + c_{11}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_l^n (T_8)_n^k (H_6)_m^{ij} + c_{12}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_l^i (T_8)_n^k (H_6)_m^{jn} \\
& + c_{13}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_n^j (T_8)_m^k (H_6)_l^{mn} + c_{14}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_n^m (T_8)_m^k (H_6)_l^{jn} \\
& + c_{15}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_n^i (T_8)_m^k (H_6)_l^{jn} + c_{16}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_n^k (H_6)_l^{ij} \\
& + c_{17}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_m^j (T_8)_n^k (H_6)_l^{in} \\
& + c_{18}(T_{cc})^i \bar{D}^j \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_{15})_n^{lm} + c_{19}(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_{15})_n^{jm} \\
& + c_{20}(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_l^m (T_8)_n^k (H_{15})_m^{nj} + c_{21}(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_n^j (T_8)_m^k (H_{15})_l^{mn} \\
& + c_{22}(T_{cc})^i \bar{D}^l \epsilon_{ijk} M_n^m (T_8)_m^k (H_{15})_l^{jn} + c_{23}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_{15})_n^{jm} \\
& + c_{24}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_n^i (T_8)_l^k (H_{15})_m^{jn} + c_{25}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_l^n (T_8)_m^k (H_{15})_l^{jm} \\
& + c_{26}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_l^i (T_8)_n^k (H_{15})_m^{jn} + c_{27}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_n^j (T_8)_m^k (H_{15})_l^{mn} \\
& + c_{28}(T_{cc})^l \bar{D}^i \epsilon_{ijk} M_m^n (T_8)_l^k (H_{15})_i^{jm} + c_{29}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_n^i (T_8)_m^k (H_{15})_l^{jn} \\
& + c_{30}(T_{cc})^l \bar{D}^m \epsilon_{ijk} M_n^i (T_8)_m^k (H_{15})_l^{jn}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

末态为十重态轻重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} = & c_1(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{iml} M_n^j (H_{15})_j^{in} + c_2(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijl} M_m^n (H_{15})_n^{ij} \\
& + c_3(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijl} M_n^i (H_{15})_m^{nj} + c_4(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijm} M_l^n (H_{15})_n^{ij} \\
& + c_5(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijn} M_l^i (H_{15})_m^{jn} + c_6(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijm} M_n^i (H_{15})_l^{jn} \\
& + c_7(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijn} M_m^i (H_{15})_l^{jn} + c_8(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{iml} M_n^j (H_6)_j^{in} \\
& + c_9(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijl} M_n^i (H_6)_m^{nj} + c_{10}(T_{cc})^l \bar{D}^m (T_{10})_{ijm} M_n^i (H_6)_l^{jn}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

对于末态为粲重子的过程，衰变振幅的结果列在表格 2.9 与表格 2.10 中。从表格中可以发现，振幅中 \bar{b}_1 或 \bar{b}_9 总是伴随 b_1 或 b_9 同时出现，这表明它们是不独立的，因此可以将 \bar{b}_1 与 \bar{b}_9 分别吸收到 b_1 与 b_9 中。值得注意的是这些哈密顿量项所导致的动力学效应并不是完全相同的。对于产生两个轻介子末态的过程，这些哈密顿量项中既有包含一个QCD耦合顶点的过程，也有包含两个QCD耦合顶点的过程。展开末态为反三重态的哈密顿量，我们得到衰变振幅的结果，见表格 2.9，末态为六重态的衰变振

幅见表格 2.10。根据衰变振幅的结果，我们推导出衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \pi^+) &= 4\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ \pi^0) = 4\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \pi^0), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^+ \pi^-) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ K^- K^+) = 4\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^0 \pi^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 \pi^0) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \eta \eta) = \frac{3}{2}\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \eta \pi^0), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ K^+) = 4\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \pi^0) = 4\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \pi^0), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \pi^0) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 \pi^-), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ K^0) = \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ K^+ \bar{K}^0), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^- K^+) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+ K^-), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ K^0) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \bar{K}^0), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+ \pi^-), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ \pi^-) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^- K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ K^0 \bar{K}^0) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+ \pi^-) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^+ K^-), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ K^0) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ K^+ \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^+ \pi^-) = \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} K^- K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 K^0) &= 3\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} K^0 \eta), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 \bar{K}^0) = 3\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \bar{K}^0 \eta), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 K^+ K^+), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \pi^0) = \frac{1}{4}\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^0 K^+) &= 3\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 K^+ \eta), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^- K^+) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^+ K^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \bar{K}^0) &= 1\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \bar{K}^0 K^-), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \pi^-) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- K^+), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ K^0) &= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 K^+ \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ K^+) = 1\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^0 K^+ K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^0 \bar{K}^0) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ K^0 \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- K^0) = 1\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ K^0 K^0), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ K^0) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 K^+ \bar{K}^0), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- \bar{K}^0) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} K^0 K^-).
\end{aligned}$$

对末态为轻重子的过程，我们展开末态为八重态轻重子的哈密顿量，将衰变振幅的结果列在表格 2.11 中；展开末态为十重态轻重子的哈密顿量，我们将衰变振幅的结果列在表格 2.12 中。我们进一步得到衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^+ D^+ K^0) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow p D_s^+ \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow p D^0 \pi^+) = \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^+ D^0 K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^0 K^0) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow p D^0 \bar{K}^0), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D_s^+ \pi^-) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow p D^+ K^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^0 \eta) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D^+ \eta), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^- D_s^+ \pi^+) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi^- D^+ K^+), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow p D^+ \pi^-) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D_s^+ K^-), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^+ \pi^-) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow p D_s^+ K^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi^- D_s^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^- D^+ K^+), \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^0 D_s^+ \pi^+) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D_s^+ \pi^-), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma'^0 D_s^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma'^0 D^+ K^+), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^{++} D^0 \pi^-) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^{++} D^0 K^-), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^- D_s^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^{++} D_s^+ \pi^-), \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^+ D_s^+ \pi^-) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^+ K^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D^0 \pi^+) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^+ \pi^-), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D_s^+ \bar{K}^0) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D_s^+ K^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^- D^+ \pi^+) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^{++} D^0 \pi^-), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^- D_s^+ \pi^+) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^+ D_s^+ \pi^-), \\
\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi'^- D_s^+ \pi^+) &= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^- D^+ K^+), \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^0 \pi^0) = \frac{1}{4}\Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D^+ \pi^0), \\
\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^+ D_s^+ \pi^0) &= \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D_s^+ \pi^0).
\end{aligned}$$

表 2.9 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到反三重态粲重子与两个轻介子。Tab 2.9 Doubly heavy-baryon Ξ_{cc} and Ω_{cc} decay into anti-triplet baryon cqq and two light mesons.

channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+ \bar{K}^0$	$b_2 + b_4 + 2b_8 - b_{10} + b_{11}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ \pi^0$	$\frac{b_2 + b_4 + b_{10} - b_{11}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ \eta$	$\frac{-2b_1 + b_2 - 4b_3 - b_4 - 2b_8 + 2b_9 + b_{10} - 3b_{11}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ K^+ \bar{K}^0$	$-b_1 + b_2 - 2b_3 + b_8 + b_9 - b_{10}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \pi^+$	$2(b_2 + b_4 + b_{10} - b_{11})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^+ K^-$	$-b_1 - b_6 + 2b_7 - b_8 - b_9 + b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{b_1 - b_2 - b_4 + b_6 - 2b_7 - b_8 + b_9 + b_{10} - b_{11} - b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{K}^0 \eta$	$\frac{b_1 + b_2 + b_4 + b_6 - 2b_7 - b_8 + b_9 - b_{10} + b_{11} - b_{12}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ \pi^-$	$b_2 - 2b_3 - 4b_5 - b_6 + b_{10} - b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \pi^0$	$-2b_3 - b_4 - 4b_5 - b_6 + b_{11} - b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \eta$	$\frac{2b_3 + b_4 - b_6 + 2b_7 + b_{11} - b_{12}}{\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^+ K^-$	$-2(2b_5 + b_6 - b_7)$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ K^0 \bar{K}^0$	$b_2 - 2b_3 - 4b_5 - b_6 - b_{10} + b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \eta \eta$	$\frac{1}{3}(-2b_3 - b_4 - 12b_5 - 5b_6 + 4b_7 - 3b_{11} + 3b_{12})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \pi^0$	$-\frac{b_2 + b_4 + b_{10} - b_{11}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \eta$	$\frac{-2b_1 + b_2 + b_4 - 2b_6 + 4b_7 - 2b_8 + 2b_9 + b_{10} - b_{11} - 2b_{12}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 K^+ \bar{K}^0$	$-b_1 - b_6 + 2b_7 + b_8 + b_9 - b_{12}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Lambda_c^+ \bar{K}^0 \bar{K}^0$	$2(b_2 + b_4 - b_{10} + b_{11})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+ K^-$	$-b_1 + b_2 - 2b_3 - b_8 - b_9 + b_{10}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{b_1 + 2b_3 + b_4 - b_8 + b_9 - b_{11}}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \bar{K}^0 \eta$	$\frac{b_1 - 2b_2 + 2b_3 - b_4 - b_8 + b_9 + 2b_{10} - 3b_{11}}{\sqrt{6}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+ \bar{K}^0$	$b_2 + b_4 - 2b_8 + b_{10} - b_{11}$

2.4.3 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc}

双重味 bc 重子 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc} 可以发生底夸克与粲夸克的衰变。为了得到它们的衰变振幅以及衰变宽度的关系，对于 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc} 发生粲夸克衰变的过程，我们可以利用双重味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 的衰变结果，并做相关替换 $T_{cc} \rightarrow T_{bc}$ ， $T_c \rightarrow T_b$ 与 $D \rightarrow B$ 。对于双重味 bc 重子发生底夸克衰变的过程，我们则利用双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 的结

表 2.10 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到粲重子与两个轻介子。Tab 2.10 Doubly heavy-baryon Ξ_{cc} and Ω_{cc} decay into singly heavy baryon cqq and two light mesons.

channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^+ K^-$	$b_1 + b_2 + b_5 + b_9 + b_{11}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_9 - b_{10}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^{++} \bar{K}^0 \eta$	$\frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_9 - b_{10}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^+ \bar{K}^0$	$\frac{2b_1 + b_3 + b_5 - b_{10} + b_{11}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \pi^0$	$\frac{1}{2} (b_3 + b_5 + b_{10} - b_{11})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \eta$	$\frac{-2b_1 + 2b_2 + b_3 + 4b_4 - b_5 - 2b_9 + b_{10} - 3b_{11}}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ K^+ \bar{K}^0$	$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4 - b_9 - b_{10}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \pi^+$	$\sqrt{2} (b_3 + b_5 + b_{10} - b_{11})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ K^+$	$b_3 + b_5 + b_{10} - b_{11}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^0 K^-$	$-\frac{b_5 - b_7 - 2b_8 + b_{11} + b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \pi^- \bar{K}^0$	$b_3 + b_7 - b_{10} - b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ K^- \eta$	$\frac{b_5 - b_7 + 2b_8 + b_{11} + b_{12}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^+ K^-$	$\frac{b_1 + b_2 + b_7 + 2b_8 + b_9 - b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{1}{2} (b_1 - b_2 - b_3 - b_5 - b_7 + 2b_8 - b_9 + b_{10} - b_{11} + b_{12})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \eta$	$\frac{b_1 - b_2 + b_3 + b_5 - b_7 + 2b_8 - b_9 - b_{10} + b_{11} + b_{12}}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 \pi^+ \bar{K}^0$	$2(b_1 + b_8)$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ \pi^-$	$\frac{b_3 + 2b_4 + 4b_6 + b_7 + b_{10} + b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ K^0$	$b_3 + b_7 + b_{10} + b_{12}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^0 K^+$	$-\frac{b_5 + b_7 + b_{11} + b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} \bar{K}^0 K^-$	$b_3 + b_5 - b_{10} + b_{11}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^+ \bar{K}^0 \bar{K}^0$	$\sqrt{2} (b_3 + b_5 - b_{10} + b_{11})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+ K^-$	$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4 + b_9 + b_{10}}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{1}{2} (b_1 - b_2 - 2b_4 + b_5 - b_9 - b_{11})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \bar{K}^0 \eta$	$\frac{b_1 - b_2 - 2b_3 - 2b_4 - b_5 - b_9 + 2b_{10} - 3b_{11}}{2\sqrt{3}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \bar{K}^0$	$\frac{2b_1 + b_3 + b_5 + b_{10} - b_{11}}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+ \eta$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} (b_1 - b_2 + b_3 + b_9 + b_{10})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^+ \bar{K}^0$	$b_1 + b_2 + b_5 - b_9 - b_{11}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^0 \pi^0$	$\frac{2b_4 - b_5 + 4b_6 + b_7 + b_{11} + b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^0 \eta$	$\frac{-2b_4 + b_5 + b_7 - 2b_8 + b_{11} + b_{12}}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ K^+ K^-$	$\sqrt{2} (2b_6 + b_7 + b_8)$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^+ K^0 \bar{K}^0$	$\frac{b_3 + 2b_4 + 4b_6 + b_7 - b_{10} - b_{12}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \pi^0$	$\frac{1}{2} (-b_3 - b_5 - b_{10} + b_{11})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 \pi^+ \eta$	$\frac{-2b_1 + 2b_2 + b_3 + b_5 + 2b_7 - 4b_8 - 2b_9 + b_{10} - b_{11} + 2b_{12}}{2\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c'^0 K^+ \bar{K}^0$	$\frac{b_1 + b_2 + b_7 + 2b_8 - b_9 + b_{12}}{\sqrt{2}}$

表 2.11 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到轻重子八重态、粲介子及轻介子。

Tab 2.11 Doubly charmed baryon decays into a light baryon in the octet, a charmed meson and a light meson.

channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda^0 D^+ \pi^+$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(2c_1 + c_2 + 2c_4 + c_5 - c_6 - c_8 + c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} + c_{12} + 2c_{18} + c_{19} + 2c_{21} + c_{22} - c_{23} - c_{24} - 3c_{25} - 3c_{26})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^+ D^0 \pi^+$	$-c_2 + c_3 - c_6 + 2c_7 - c_9 + 2c_{10} - c_{19} - c_{20} - c_{23} - c_{25}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^+ D^+ \pi^0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(c_3 + c_5 + 2c_7 + c_8 - 2c_{11} + c_{12} - c_{20} + c_{22} + c_{24} + c_{26})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^+ D^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(c_3 - 2c_4 - c_5 + 2c_7 + c_8 + 2c_{11} - c_{12} - c_{20} + 2c_{21} - c_{22} - 3c_{24} - c_{26})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma^0 D^+ \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 + c_5 + c_6 + c_8 + c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} + c_{12} + c_{19} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_{25} + c_{26})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow p D^+ \bar{K}^0$	$-c_1 - c_4 + c_6 + c_8 + c_{18} + c_{21} - c_{23} - c_{24}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi^0 D_s^+ \pi^+$	$-c_1 - c_2 - c_9 + 2c_{10} - c_{18} - c_{19} + c_{25}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda^0 D^0 \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2c_1 + c_2 + c_3 - c_6 + 2c_7 - 2c_{13} - c_{14} + c_{15} + 2c_{16} + c_{17} + 2c_{18} + c_{19} + 3c_{20} - c_{23} - 2c_{27} - c_{28} + c_{29} - 3c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda^0 D^+ \pi^0$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(c_3 - 2c_4 - c_5 + 2c_7 + c_8 - c_9 + 2c_{10} + 2c_{11} - c_{12} - 2c_{13} - c_{14} + c_{15} + 2c_{16} + c_{17} + 3c_{20} - 2c_{21} - c_{22} + c_{24} + 3c_{25} + 3c_{26} - 2c_{27} - c_{28} + c_{29} - 3c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda^0 D^+ \eta$	$\frac{1}{6}(c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 2c_7 + c_8 - c_9 + 2c_{10} + 2c_{11} - c_{12} + 4c_{13} + 5c_{14} + c_{15} + 2c_{16} + c_{17} + 3c_{20} - 3c_{22} - 3c_{24} + 3c_{25} + 3c_{26} - 3c_{28} - 3c_{29} - 3c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Lambda^0 D_s^+ \bar{K}^0$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-c_1 - 2c_2 + c_3 - c_6 + 2c_7 + c_{13} - c_{14} - 2c_{15} + 2c_{16} + c_{17} + c_{18} + 2c_{19} + 3c_{20} + c_{23} - c_{27} + c_{28} + 2c_{29} - 3c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^0 \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(c_9 - 2c_{10} - c_{14} - c_{15} + 2c_{16} + c_{17} + c_{25} - c_{28} - c_{29} + c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^0 \eta$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(c_9 - 2c_{10} + 2c_{13} + c_{14} - c_{15} - 2c_{16} - c_{17} + c_{25} - 2c_{27} + c_{28} + 3c_{29} - c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^+ \pi^-$	$2c_{11} - c_{12} + 2c_{16} + c_{17} - c_{26} + c_{30}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^0 D^0 \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(c_2 - c_3 + c_6 - 2c_7 + c_{14} + c_{15} - 2c_{16} - c_{17} + c_{19} + c_{20} + c_{23} + c_{28} + c_{29} - c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^0 D^+ \pi^0$	$\frac{1}{2}(c_3 + c_5 + 2c_7 + c_8 - c_9 + 2c_{10} + 2c_{11} - c_{12} + c_{14} + c_{15} + 2c_{16} + c_{17} - c_{20} + c_{22} + c_{24} - c_{25} - c_{26} + c_{28} + c_{29} + c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^0 D^+ \eta$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(-c_3 + 2c_4 + c_5 - 2c_7 - c_8 + c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} + c_{12} + 2c_{13} + c_{14} - c_{15} - 2c_{16} - c_{17} + c_{20} - 2c_{21} + c_{22} + 3c_{24} + c_{25} + c_{26} - 2c_{27} + c_{28} + 3c_{29} - c_{30})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^- D^+ \pi^+$	$c_2 + c_5 + c_6 + c_8 + c_{14} + c_{15} + c_{19} + c_{22} + c_{23} + c_{24} + c_{28} + c_{29}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow p D^0 \bar{K}^0$	$c_1 + c_2 - c_{13} + c_{15} - c_{18} - c_{19} + c_{27} - c_{29}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow p D^+ K^-$	$c_4 + c_5 + c_{13} + c_{14} - c_{21} - c_{22} - c_{27} - c_{28}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi^- D_s^+ \pi^+$	$c_1 + c_2 - c_{13} + c_{15} + c_{18} + c_{19} - c_{27} + c_{29}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi^0 D^+ K^0$	$2c_{11} - c_{12} + 2c_{16} + c_{17} + c_{26} - c_{30}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi^0 D_s^+ \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(c_9 - 2c_{10} + c_{13} - c_{15} - c_{25} + c_{27} - c_{29})$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi^0 D_s^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-c_9 + 2c_{10} + c_{13} + 2c_{14} + c_{15} - 4c_{16} - 2c_{17} + c_{25} + c_{27} - 2c_{28} - 3c_{29} + 2c_{30})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^0 \bar{K}^0$	$-c_1 - c_2 - c_9 + 2c_{10} + c_{18} + c_{19} - c_{25}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^+ D^+ K^-$	$-c_4 - c_5 + 2c_{11} - c_{12} + c_{21} + c_{22} - c_{26}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Sigma^0 D^+ \bar{K}^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} + c_{12} - c_{18} - c_{19} - c_{21} - c_{22} + c_{25} + c_{26})$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi^- D^+ \pi^+$	$-c_1 - c_4 + c_6 + c_8 - c_{18} - c_{21} + c_{23} + c_{24}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi^0 D^0 \pi^+$	$c_1 + c_3 - c_6 + 2c_7 + c_{18} + c_{20} - c_{23}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi^0 D^+ \pi^0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}c_3 - c_4 + 2c_7 + c_8 + c_{20} - c_{21} + c_{24}$

表 2.12 双粲味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 衰变到轻重子十重态、粲介子及轻介子。

Tab 2.12 Doubly charmed baryon decays into a light baryon in the decuplet, a charmed meson and a light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^{++} D^0 \bar{K}^0$	$c_1 - c_8$	$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^{++} D^+ K^-$	c_3
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Delta^+ D^+ \bar{K}^0$	$\frac{c_1 + c_3 - c_8}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma'^+ D^0 \pi^+$	$\frac{c_1 + 2c_2 + 2c_4 + c_8}{\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma'^+ D^+ \pi^0$	$\frac{-2c_2 + c_3 + 2c_5}{\sqrt{6}}$	$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma'^0 D^+ \pi^+$	$\frac{c_1 + c_3 + 2c_4 + 2c_5 + c_8}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi'^0 D_s^+ \pi^+$	$\frac{c_1 + 2c_4 + c_8}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^{++} D^0 K^-$	c_6
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^0 \bar{K}^0$	$\frac{c_1 + c_6 - c_8}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^+ D^+ K^-$	$\frac{c_3 + c_6}{\sqrt{3}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Delta^0 D^+ \bar{K}^0$	$\frac{c_1 + c_3 + c_6 - c_8}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^+ D^0 \pi^0$	$\frac{-2c_4 + c_6 + 2c_7}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^+ D^+ \pi^-$	$\frac{2(c_5 + c_7)}{\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^0 D^0 \pi^+$	$\frac{c_1 + 2c_2 + c_6 + 2c_7 + c_8}{\sqrt{6}}$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^0 D^+ \pi^0$	$\frac{-2c_2 + c_3 - 2c_4 - 2c_5 + c_6 - 2c_7}{2\sqrt{3}}$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma'^- D^+ \pi^+$	$\frac{c_1 + c_3 + c_6 + c_8}{\sqrt{3}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi'^0 D^0 \pi^+$	$\frac{c_1 + 2c_2 + c_8}{\sqrt{3}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi'^0 D^+ \pi^0$	$\frac{c_3 - 2c_2}{\sqrt{6}}$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi'^- D^+ \pi^+$	$\frac{c_1 + c_3 + c_8}{\sqrt{3}}$		

果，并做相关替换 $T_{bb} \rightarrow T_{bc}$, $T_b \rightarrow T_c$ 与 $B \rightarrow D$ 。原则上我们不需要重复计算双重味 bc 重子的 b -夸克或者 c -夸克衰变。但是当考虑双重味 bc 重子的非轻衰变时，会发生 $bc \rightarrow ud/s$ 的W玻色子交换过程，此时我们无法通过替换来得到该过程的衰变振幅，因此需要构建W玻色子交换过程的哈密顿量。双重味 bc 重子在W玻色子交换过程的详细讨论参考文献 [40]。

2.4.4 黄金衰变道

通过SU(3)对称性的方法，我们得到了众多双重味(bb, cc, bc)重子的多体衰变道。为了方便实验上的探测，我们基于如下规则对上述衰变道进行筛选，并得到一些实验上容易观测的黄金衰变道。

- 我们筛选出具有较大衰变分支比的衰变道。根据弱衰变的Cabibbo的压低效果，对于半轻衰变过程，我们选择出与 $c \rightarrow sl^+\nu$ 与 $b \rightarrow cl^-\bar{\nu}$ 过程相关的衰变道；对于非轻衰变过程，我们选择出与 $c \rightarrow s\bar{d}u$ 、 $b \rightarrow c\bar{c}s$ 与 $b \rightarrow c\bar{u}d$ 过程相关的衰变道。
- 我们筛选出具有较高实验探测效率的衰变道。在实验上由于带电的粒子更容易被测量到，而一些中性粒子如 $\omega, \pi^0, \eta, \phi, \rho^\pm (\rightarrow \pi^\pm \pi^0), K^{*\pm} (\rightarrow K^\pm \pi^0)$ 不容易被探测到，所以我们排除末态含有这些中性粒子的衰变过程，但保留末态含

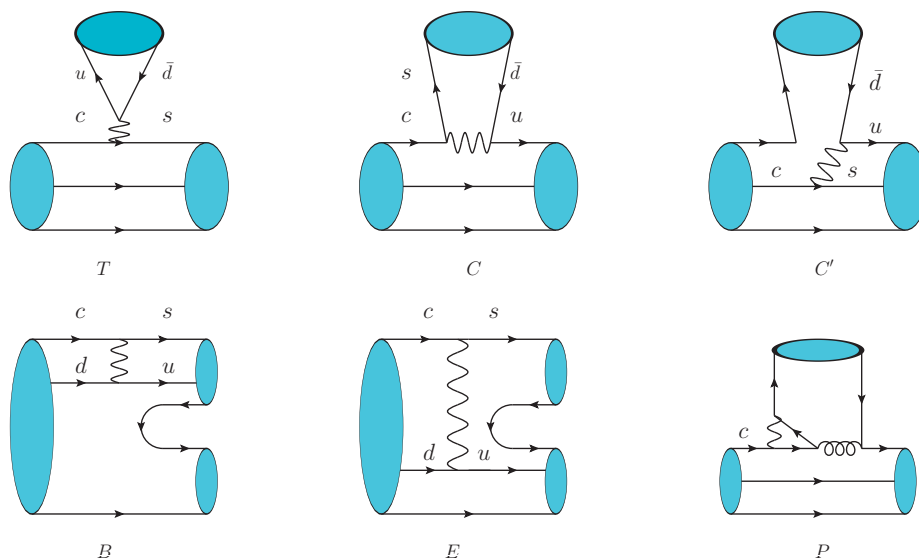


图 2.4 双粲味重子非轻衰变的费曼图，这里只画出一种企鹅图。费曼图 C, C', B, E 是受到 $1/N_c$ 压低的。

Fig 2.4 Feynman diagrams for two-body decays of doubly charmed baryons. We only show one type of penguin diagrams. The C, C', B, E diagrams are suppressed by $1/N_c$.

有 $\pi^\pm, K^0(\rightarrow \pi^+\pi^-), \rho^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)$ 的衰变过程。

根据上述的筛选规则，我们依次选择出双重味(cc, bc, bb)重子的衰变黄金道。与黄金衰变道相关的费曼图在图 2.4 给出，其中我们只给出一种可能企鹅图，与树图 T 的振幅相比，图 C, C', B, E 是受到 $1/N_c$ 压低的。对于双重味 cc 重子 Ξ_{cc} 与 Ω_{cc} 的衰变，我们筛选出具有Cabibbo允许的黄金衰变道的结果并列在表格 2.13 中。从 D 介子与 Λ_c 重子衰变的实验数据中，我们可以推断出这些黄金衰变道具有的典型衰变分支比在 10^{-2} 左右。

对于双重味 bc 重子 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc} 的衰变，我们筛选出具有Cabibbo允许的黄金衰变道的结果并列在表格 2.14 中。双重味 bc 重子中可以发生底夸克与粲夸克的衰变，但由于底夸克衰变的典型分支(小于 10^{-3})小于粲夸克的衰变分支比，所以双重味 bc 重子的衰变以粲夸克衰变为主。由于粲夸克衰变的典型衰变分支比在 10^{-2} 左右，此外重建末态的 B 介子或底重子需要额外的 10^{-3} 因子，所以重建双重味 bc 重子 Ξ_{bc} 与 Ω_{bc} 的分支比的大小在 10^{-5} 左右。

对于双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 的衰变，我们筛选出具有Cabibbo允许的黄金衰变道的结果并列在表格 2.15 中。考虑底夸克衰变的典型分支比的大小在 10^{-3} 左右，此外重建末态 B 介子或者底重子需要额外的 10^{-3} 因子，而重建末态 J/ψ 或 D 介子或粲重子

表 2.13 Cabibbo允许的双重味 cc 重子的衰变黄金道。Tab 2.13 Cabibbo allowed ccq decays whose typical branching ratios are at a few percents level.

$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Lambda_c^+ \bar{K}^0, \Lambda_c^+ \bar{K}^{*0})$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ \bar{K}^0, \Xi_c^+ \bar{K}^{*0})$
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \rho^0$	
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+$	
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow (\Sigma_c^{++} \bar{K}^0, \Sigma_c^{++} \bar{K}^{*0})$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} K^-$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c'^+ \bar{K}^0, \Xi_c'^+ \bar{K}^{*0})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ \pi^+$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Sigma_c^+ \bar{K}^0, \Sigma_c^+ \bar{K}^{*0})$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+$
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c'^+ \rho^0, \Xi_c'^0 \pi^+)$	
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^+$	
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow (\Sigma^+ D^+, \Sigma'^+ D^+)$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Lambda^0 D^+, \Sigma^0 D^+, \Sigma'^0 D^+)$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi^0 D^+, \Xi'^0 D^+)$
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Sigma^+ D^0, \Sigma'^+ D^0)$	
	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Xi^0 D_s^+, \Xi'^0 D_s^+)$	

表 2.14 Cabibbo允许的双重味 bc 重子的衰变黄金道。Tab 2.14 Decay modes of the bcq baryons. Typical branching ratios for charm quark decays might be a few percents, while BR for decays induced by b quark may reach the order 10^{-3} .

Charm: Ξ_{bc}^+	Ξ_{bc}^0	Ω_{bc}^0
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 \pi^+$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Lambda_b^0 \bar{K}^0, \Lambda_b^0 \bar{K}^{*0})$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \bar{K}^0, \Xi_b^0 \bar{K}^{*0})$
	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \rho^0, \Xi_b^- \pi^+)$	
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Sigma_b^+ \bar{K}^0, \Sigma_b^+ \bar{K}^{*0})$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ K^-$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b'^0 \bar{K}^0, \Xi_b'^0 \bar{K}^{*0})$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 \pi^+$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma_b^0 \bar{K}^0, \Sigma_b^0 \bar{K}^{*0})$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- \pi^+$
	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b'^0 \rho^0, \Xi_b'^- \pi^+)$	
	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- K^+$	
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Sigma^+ B^0, \Sigma'^+ B^0)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma^+ B^-, \Sigma'^+ B^-)$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi^0 B^0, \Xi'^0 B^0)$
	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma^0 B^0, \Sigma'^0 B^0, \Lambda^0 B^0)$	
	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi^0 B_s^0, \Xi'^0 B_s^0)$	
Bottom: Ξ_{bc}^+	Ξ_{bc}^0	Ω_{bc}^0
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ J/\psi, \Xi_c'^+ J/\psi)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_c^0 J/\psi, \Xi_c'^0 J/\psi)$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_c^0 J/\psi$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^{++} D_s^-$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ D_s^-$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ D_s^-$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Omega_{cc}^+ \bar{D}^0$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ D^-$	
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_{cc}^{++} \pi^-, \Xi_{cc}^+ \rho^0)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ \pi^-$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ K^-$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Omega_{cc}^+ K^0, \Omega_{cc}^+ K^{*0})$		$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ \pi^-$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Lambda_c^+ D^0, \Sigma_c^+ D^0, \Sigma_c^0 D^+)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_c^0 D^0$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_c^0 D^0, \Xi_c'^0 D^0)$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_c^0 D_s^+, \Xi_c'^0 D_s^+)$		

表 2.15 Cabibbo允许的双重味 bb 重子的衰变黄金道。Tab 2.15 Doubly bottom baryon decays with branching fractions at the order of 10^{-3} .

$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 J/\psi, \Xi_b^0 J/\psi)$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow (\Xi_b^- J/\psi, \Xi_b'^- J/\psi)$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- J/\psi$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^-$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^-$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^-$	
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_{bc}^+ \pi^-, \Xi_{bc}^0 \rho^0)$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^-$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Omega_{bc}^0 K^0, \Omega_{bc}^0 K^{*0})$		$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Lambda_b^0 D^0, \Sigma_b^0 D^0)$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^0$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow (\Xi_b^- D^0, \Xi_b'^- D^0)$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^+$		
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_b^- D_s^+, \Xi_b'^- D_s^+)$		

需要 10^{-2} 因子, 所以重建双重味 bb 重子 Ξ_{bb} 与 Ω_{bb} 的分支比的大小在 10^{-8} 左右。

2.5 双重味Tetraquark的弱衰变

目前实验上已经观测到了许多四夸克态候选者, Belle实验组通过 $B^\pm \rightarrow K^\pm X (X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)$ 过程发现了隐藏粲味 cc 的四夸克态候选者 $X(3872)$ [12], 之后又通过 $e^+ e^- \rightarrow \Upsilon(nS) \pi^+ \pi^- (n = 1, 2, 3)$ 与 $e^+ e^- \rightarrow h_b(nP) \pi^+ \pi^- (n = 1, 2)$ 过程发现了隐藏底味 $b\bar{b}$ 的四夸克态候选者 $Z_b^\pm(10610, 10650)$ [13]。2012年BES III实验通过 $Y(4260) \rightarrow \pi^- \pi^+ J/\psi$ 过程发现了夸克组分为 $c\bar{c}u\bar{d}$ 的四夸克态候选者 $Z_c^+(3900)$ [13]。这些奇特态绝大多数都具有 $Q\bar{Q}q\bar{q}$ 的夸克组分, 在2016年D0实验组发现了疑似味道打开($us\bar{d}\bar{b}$)的奇异态 $X(5568)$ [41], 尽管该发现还没有被其他实验组所确认, 但是这类味道打开的四夸克态也暗示了双重味四夸克态 $QQ\bar{q}\bar{q}$ 的存在。在Diquark模型下, 双重味四夸克态可以由一个具有色吸引势的双重味的diquark(QQ)与一个同样具有色吸引势轻的anti-diquark($\bar{q}\bar{q}$)构成。依据QCD的基本原理, 轻夸克与胶子之间的长程相互作用的标度约为300MeV。而对于两个重夸克来说, 它们之间相互作用的标度远大于QCD标度, 因此它们之间的间隔将远小于轻夸克对之间的距离, 此时的双重味四夸克态被称为双重味tetraquark。然而如果两重夸克/轻夸克之间的相互作用较弱, 即有大的分离, diquark的效应不再明显, 此时双重味四夸克态会由两个介子态($Q\bar{q}$)($Q\bar{q}$)束缚, 称为双重味的四夸克分子态。由于四夸克分子态的束缚作用微弱, 通常它们可以强衰变到两个介子。目前关于双重味四夸克态的组成结构还处于讨论中, 物理的四夸克态还可能是上述可能态的混合, 因此对它们的讨论将有助于理解强子内部结构以及QCD。

本文考虑四夸克态为tetraquark的情况，双重味tetraquark的质量谱已经在很多文献中被讨论过 [42–50]。其中大部分文献的结果都支持双重味tetraquark是可以稳定存在，然而关于双重味tetraquark的质量谱的预测及其结构的描述却不尽相同。本节我们将利用Sakharov-Zeldovich公式详细讨论双重味tetraquark的质量。如果双重味tetraquark可以稳定存在，那么对它们衰变的研究将是理解四夸克态结构的重要手段。因此我们将进一步利用SU(3)轻夸克味道对称性的方法来讨论双重味 bb -tetraquark、 cc -tetraquark以及 $bc/b\bar{c}$ -tetraquark的两体、三体及四体的弱衰变过程。

2.5.1 质量

Tetraquark的波函数由四部分组成：坐标空间、味道空间，颜色空间及自旋空间的波函数

$$\begin{aligned} \Psi(Q, Q', \bar{q}, \bar{q}') &= R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \otimes \chi_f(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ &\quad \otimes \chi_\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \otimes \chi_s(s_1, s_2, s_3, s_4), \end{aligned} \quad (2.47)$$

这里 $R(\mathbf{x}_i)$ 、 $\chi_f(f_i)$ 、 $\chi_\lambda(\lambda_i)$ 与 $\chi_s(s_i)$ 分别表示空间径向、味道、颜色和自旋波函数。其中下标1、2、3、4分别表示 Q 、 Q' 、 \bar{q} 、 \bar{q}' 。

对于两夸克系统 $[qq]$ ，在味道 \otimes 颜色 \otimes 自旋空间中会有八种不同的diquark多重态。根据泡利不相容原理，双重味tetraquark $[QQ'][\bar{q}\bar{q}']$ 只有四种可能的组合

$$|\mathbf{1}_f(S), \mathbf{3}_f(A)\rangle \otimes |\bar{\mathbf{3}}_c(A), \mathbf{3}_c(A)\rangle \otimes |1_s(S), 0_s(A)\rangle, \quad (2.48)$$

$$|\mathbf{1}_f(S), \mathbf{3}_f(A)\rangle \otimes |\mathbf{6}_c(S), \bar{\mathbf{6}}_c(S)\rangle \otimes |0_s(A), 1_s(S)\rangle, \quad (2.49)$$

$$|\mathbf{1}_f(S), \bar{\mathbf{6}}_f(S)\rangle \otimes |\bar{\mathbf{3}}_c(A), \mathbf{3}_c(A)\rangle \otimes |1_s(S), 1_s(S)\rangle, \quad (2.50)$$

$$|\mathbf{1}_f(S), \bar{\mathbf{6}}_f(S)\rangle \otimes |\mathbf{6}_c(S), \bar{\mathbf{6}}_c(S)\rangle \otimes |0_s(A), 0_s(A)\rangle, \quad (2.51)$$

这里下标 f 、 c 、 s 分别表示味道、颜色、自旋， S 与 A 表示对称与反对称。每个半括号表示一个由diquark与anti-diquark组成的四夸克态。如 $|\mathbf{1}_f(S), \mathbf{3}_f(A)\rangle$ 表示在味道空间中由一个味道单态的diquark $[QQ']$ 与一个味道三重态的anti-diquark $[\bar{q}\bar{q}']$ 组成的四夸克系统。

由于颜色六重态的diquark不是能量最低态因此不是物理的，所以我们只考虑由颜色三重态diquark(anti-diquark)组成的tetraquark。等式 (2.48)与等式 (2.50)中的diquark多重态 $|\mathbf{3}_c(A)\rangle \otimes |0_s(A)\rangle$ 与diquark多重态 $|\bar{\mathbf{3}}_c(A)\rangle \otimes |1_s(S)\rangle$ 分别被称为“标量”diquark与“轴矢量”diquark，Jaffe在文献 [51] 中把它们称为“好的”diquark与

表 2.16 颜色为 $\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{8}$ 的两夸克矩阵元 $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ 。Tab 2.16 Matrix elements $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ for two quarks in color $\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{8}$ configurations.

	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}$
$\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle (s=0)$	2	-1	4	$-\frac{1}{2}$
$\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \rangle (s=1)$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$

“坏的” diquark。根据Jaffe的Diquark理论，“好的”和“坏的” diquark 之间具有质量差别。大致来说对于上下([ud])diquark，“好的”与“坏的” diquark之间的质量相差210MeV左右，而对于([us])diquark来说，它们的质量相差约150MeV [51]。对于含有一个重味夸克 c 与一个轻夸克 q 构成的([cq])diquark，“好的”和“坏的” diquark之间质量差别较小，约为60MeV [52]。而对于由双重味夸克构成的([QQ'])diquark，我们假定这两类双重味diquark之间的质量相差50MeV。

Sakharov与Zeldovich在1966年提出了一种描述强子态的组分夸克模型。该模型可以很好的预测强子的质量谱，尤其是S-波的强子态，其中与强子质量相关的哈密顿量 [51, 53]如下：

$$\mathcal{H}_{mass} = \sum_i m_i + \sum_{i < j} \left(-\frac{3}{8}\right) \frac{C^{ij}}{m_i m_j} \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (2.52)$$

上述哈密顿量中第一项为有效夸克的质量项，第二项考虑了颜色-自旋的相互作用对质量的贡献，其中总强度参数 $C^{ij} = v^{ij} \langle \delta(r_{ij}) \rangle$ 依赖于强子中组分夸克的味道，耦合参数 v^{ij} 及径向波函数的强度 $\langle \delta(r_{ij}) \rangle$ 定义在相互作用的零点时。 $\vec{\lambda}_i$ 为色SU(3)群的生成元(Gell-Mann 矩阵)， $\vec{s}_i = \vec{\sigma}_i/2$ 为夸克自旋算符， $\vec{\sigma}_i$ 为泡利矩阵。

哈密顿量中的参数可以通过强子谱来拟合 [54]，相关的拟合结果在表格 2.17中给出。我们利用强子的质量差来抽取整体因子 $C^{ij}/(m_i m_j)$ ，得到如下结果：当(QQ' $\bar{q}\bar{q}'$)构成tetraquark时，整体因子 $C^{qq}/m_u^2 = 193\text{MeV}$ ， $C^{sq}/(m_u m_s) = 118\text{MeV}$ ， $C^{cq}/(m_u m_c) = 23\text{MeV}$ ， $C^{bq}/(m_u m_b) = 2.3\text{MeV}$ ；当(QQ' $\bar{q}\bar{q}'$)构成夸克-反夸克时，整体因子 $C^{q\bar{q}}/m_u^2 = 318\text{MeV}$ ， $C^{s\bar{q}}/(m_u m_s) = 199\text{MeV}$ ， $C^{c\bar{q}}/(m_u m_c) = 69\text{MeV}$ ， $C^{b\bar{q}}/(m_u m_b) = 23\text{MeV}$ ， $C^{s\bar{s}}/m_s^2 = 118\text{MeV}$ ， $C^{c\bar{s}}/(m_s m_c) = 72\text{MeV}$ ， $C^{c\bar{c}}/m_c^2 = 57\text{MeV}$ ， $C^{b\bar{s}}/(m_s m_b) = 24\text{MeV}$ ， $C^{b\bar{b}}/m_b^2 = 31\text{MeV}$ 。我们对有效夸克的质量进行拟合：方案一(利用介子质量谱拟合 [52, 55])， $m_{u,d} = 305\text{MeV}$ ， $m_s = 490\text{MeV}$ ， $m_c = 1670\text{MeV}$ ，与 $m_b = 5008\text{MeV}$ ；方案三(利用广义夸克势模型 [56])， $m_{u,d} = 330\text{MeV}$ ， $m_s = 500\text{MeV}$ ， $m_c = 1550\text{MeV}$ ，与 $m_b = 4880\text{MeV}$ ；方案二(利用重子质量谱拟合 [52, 55])， $m_{u,d} = 362\text{MeV}$ ， $m_s = 546\text{MeV}$ ， $m_c = 1721\text{MeV}$ ， $m_b = 5050\text{MeV}$ 。

表 2.17 根据重子与介子的质量谱拟合出参数 $C^{ij}/(m_i m_j)$ 。

Tab 2.17 Fitting the overall factors $C^{ij}/(m_i m_j)$ from the baryon and meson spectra. The fitted results for these factors become: $C^{qq}/m_u^2 = 193\text{MeV}$, $C^{sq}/(m_u m_s) = 118\text{MeV}$, $C^{cq}/(m_u m_c) = 23\text{MeV}$, $C^{bq}/(m_u m_b) = 2.3\text{MeV}$ for the diquark configuration; $C^{q\bar{q}}/m_u^2 = 318\text{MeV}$, $C^{s\bar{q}}/(m_u m_s) = 199\text{MeV}$, $C^{c\bar{q}}/(m_u m_c) = 69\text{MeV}$, $C^{b\bar{q}}/(m_u m_b) = 23\text{MeV}$, $C^{s\bar{s}}/m_s^2 = 118\text{MeV}$, $C^{c\bar{s}}/(m_s m_c) = 72\text{MeV}$, $C^{b\bar{s}}/(m_s m_b) = 24\text{MeV}$, $C^{c\bar{c}}/m_c^2 = 57\text{MeV}$, $C^{b\bar{b}}/m_b^2 = 31\text{MeV}$ for the quark-antiquark configuration. These fitted results are consistent the previous literatures [52, 55, 57, 58].

Mass	$M_\Delta - M_n$	$M_\Sigma - M_\Lambda$	$M_{\Sigma_c} - M_{\Lambda_c}$	$M_{\Sigma_b} - M_{\Lambda_b}$
Form.	$3C^{qq}/(2m_u^2)$	$C^{qq}/m_u^2 - C^{sq}/(m_s m_u)$	$C^{qq}/m_u^2 - C^{cq}/(m_c m_u)$	$C^{qq}/m_u^2 - C^{bq}/(m_b m_u)$
Exp. [59]	290MeV	75MeV	170MeV	191MeV
Mass	$M_\rho - M_\pi$	$M_{K^*} - M_K$	$M_{D^*} - M_D$	$M_{B^*} - M_B$
Form.	$2C^{q\bar{q}}/m_u^2$	$2C^{s\bar{q}}/(m_s m_u)$	$2C^{c\bar{q}}/(m_c m_u)$	$2C^{b\bar{q}}/(m_b m_u)$
Exp. [59]	635MeV	397MeV	137MeV	46MeV
Mass	$M_\omega - M_\eta$	$M_{D_s^*} - M_{D_s}$	$M_{B_s^*} - M_{B_s}$	
Form.	$2C^{s\bar{s}}/m_s^2$	$2C^{c\bar{s}}/(m_c m_s)$	$2C^{b\bar{s}}/(m_b m_s)$	
Exp. [59]	235MeV	144MeV	48MeV	
Mass	$M_{J/\psi} - M_{\eta_c}$	$M_\Upsilon - M_{\eta_b}$		
Form.	$2C^{c\bar{c}}/m_c^2$	$2C^{b\bar{b}}/m_b^2$		
Exp. [59]	113MeV	61MeV		

利用方案一的结果，我们计算了三重态双重味 cc -tetraquark的质量谱为

$$m(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+(\mathbf{3})) = 3.86\text{GeV}, \quad J^P = 1^+, \quad (2.53)$$

$$m(T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+(\mathbf{3})) = m(T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++}(\bar{\mathbf{3}})) = 4.10\text{GeV}, \quad J^P = 1^+. \quad (2.54)$$

其中tetraquark $(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+(\mathbf{3}))$ 的质量比 DD^* 的阈值小16MeV，但其比 DD 的阈值高约120 MeV，然而P宇称的守恒性会禁戒掉轴矢量介子 $T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+(\mathbf{3})$ 强衰变到 DD 的过程。因此自旋宇称为 1^+ 的tetraquark $(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+(\mathbf{3}))$ 很可能是一个稳定的四夸克态。

三重态双重味 bc -tetraquark的质量谱（方案一）为

$$m(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})) = 7.20\text{GeV}, \quad J^P = 1^+, \quad (2.55)$$

$$m(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0(\mathbf{3})) = m(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+(\bar{\mathbf{3}})) = 7.43\text{GeV}, \quad J^P = 1^+. \quad (2.56)$$

其中 $T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})$ 的质量比 BD^* 的阈值低约86MeV，但其却比 B^*D 的阈值高约5.8MeV。所以tetraquark $T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})$ 容易强衰变到 B^*D 过程。 $T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 与 $T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+(\bar{\mathbf{3}})$ 的质量比 $B_s D^*$ 的阈值高约56MeV，此外它们还比 B^*D_s 的阈值高约137MeV，所以 $T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 与 $T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+(\bar{\mathbf{3}})$ 不是稳定的四夸克态。

三重态双重味 bb -tetraquark的质量谱（方案一）为

$$m(T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})) = 10.53\text{GeV}, \quad J^P = 1^+, \quad (2.57)$$

$$m(T_{bb\bar{u}\bar{s}}^-(\mathbf{3})) = m(T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0(\bar{\mathbf{3}})) = 10.77\text{GeV}, \quad J^P = 1^+. \quad (2.58)$$

$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})$ 的质量比 BB^* 的阈值低约73MeV。因此自旋宇称为 1^+ 的 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})$ 很可能是一个稳定的tetraquark。而 $T_{bb\bar{u}\bar{s}}^-(\mathbf{3})$ 与 $T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0(\bar{\mathbf{3}})$ 的质量分别高于 $B_s B^*$ 与 $B_s^* B$ 的阈值，所以它们不是稳定的四夸克态。

由于有效夸克质量与重diquark质量差的不确定性，我们可以采用另一种输入参数：利用方案二的有效夸克质量并增加重diquark的质量差约100MeV。在此输入参数下， $T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+(\mathbf{3})$ 、 $T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+(\mathbf{3})$ 与 $T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++}(\mathbf{3})$ 的质量将分别减小90MeV、105MeV与105MeV左右，但是它们仍然不是稳定的四夸克态。 $T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})$ 、 $T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 与 $T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+(\mathbf{3})$ 的质量将分别减小98MeV、113MeV与113MeV左右，于是 $T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})$ 的质量将低于 BD^* 与 B^*D 的阈值，因此 $T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0(\mathbf{3})$ 成为了一个稳定的四夸克态。 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})$ 、 $T_{bb\bar{u}\bar{s}}^-(\mathbf{3})$ 与 $T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 的质量将分别减小86MeV、101MeV与101MeV左右，因此 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})$ 变得更加稳定，而 $T_{bb\bar{u}\bar{s}}^-(\mathbf{3})$ 与 $T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 的质量将低于 $B_s B^*$ 与 $B_s^* B$ 的阈值，于是 $T_{bb\bar{u}\bar{s}}^-(\mathbf{3})$ 与 $T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0(\mathbf{3})$ 也成为了稳定的四夸克态。此外如果在上述过程中采用方案三的有效夸克质量，我们会发现除了 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^-(\mathbf{3})$ 靠近它的强衰变阈值以外，其他所有的双重味tetraquark都会远离它们的强衰变阈值。

2.5.2 双重味 bb -tetraquark

本小节我们主要讨论双重味 bb -tetraquark的半轻弱衰变与非轻弱衰变过程。双重味 bb -tetraquark的半轻衰变为 $b \rightarrow ul^-\bar{\nu}_\ell$ 与 $b \rightarrow cl^-\bar{\nu}_\ell$ ，衰变算符的系数在2.3节给出，在强子层次上，其对应于末态为三体、四体的衰变过程。

双重味 bb -tetraquark的三体半轻衰变过程如下，相关的费曼图如图2.5(c)，

$$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 \ell^-\bar{\nu}_\ell, \quad T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 \ell^-\bar{\nu}_\ell,$$

对于双重味 bb -tetraquark四体半轻衰变过程，我们只构建出它们的哈密顿量形式，相关的衰变振幅及宽度关系可以参考文献[60]。

在SU(3)对称性下，双重味 bb -tetraquark可以分为三重态 T_{bb3} 与六重态 T_{bb6} ，强子的SU(3)表示见等式(2.23)。三重态 T_{bb3} 可以分别衰变到两个介子或单重味重子与轻重子，或双重味重子与轻重子三类四体非轻过程。我们分别构造出它们的强子层次的哈密顿量。

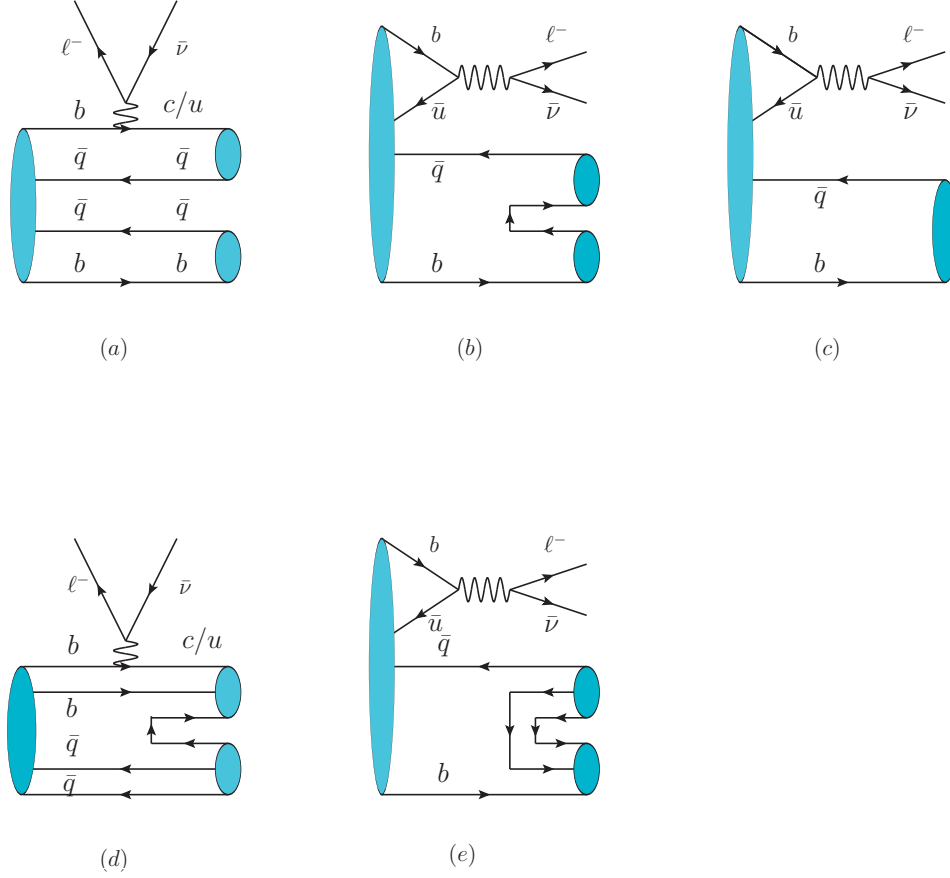


图 2.5 双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 半轻衰变的费曼图。(a,b) 图表示双重味 bb -tetraquark 衰变到一对介子的过程, 图(c)表示末态只含有一个介子的过程。图(d,e)表示末态为重子的过程。

Fig 2.5 Feynman diagrams for semileptonic decays of doubly bottom tetraquark. Panels (a,b) correspond to the decays into a pair of mesons. In panel (c), there is only one meson in the final states. Panels (d,e) denote the decays into baryonic states. In panels (b,c,e), the two $b\bar{u}$ quarks in the initial state can annihilate, but such contributions are usually power suppressed.

末态为两个介子的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = a_3(T_{bb3})_{[ij]}\bar{B}^i\bar{D}^j\bar{\ell}\nu_\ell + a_4(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^i\bar{B}^k M_k^j\bar{\ell}\nu_\ell + a_5(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^k\bar{B}^i M_k^j\bar{\ell}\nu_\ell. \quad (2.59)$$

末态为单重味重子与轻重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & b_1(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xjk}(F_8)_x(H_3)^i(\bar{F}_{b\bar{3}})_{[kl]}\bar{\ell}\nu_\ell + b_2(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xkl}(F_8)_x(H_3)^i(\bar{F}_{b\bar{3}})_{[kl]}\bar{\ell}\nu_\ell \\ & + b_3(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xij}(F_8)_x(H_3)^k(\bar{F}_{b\bar{3}})_{[kl]}\bar{\ell}\nu_\ell + b_4(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xil}(F_8)_x(H_3)^k(\bar{F}_{b\bar{3}})_{[kl]}\bar{\ell}\nu_\ell \end{aligned}$$

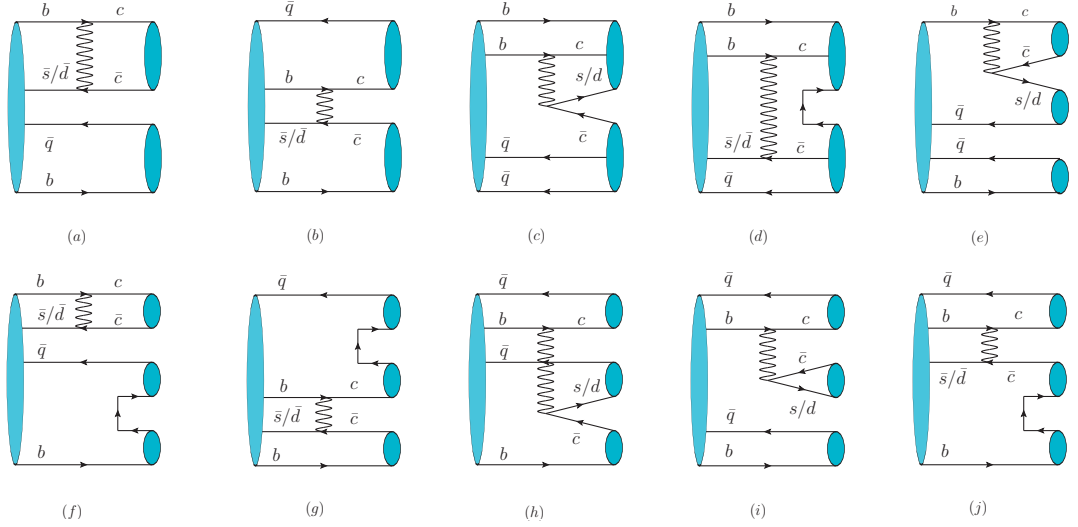


图 2.6 $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 衰变对应的双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 非轻衰变的费曼图。(a,b)图表示末态为两个介子的过程；(c,d)图表示末态生成重子与反重子的过程。(e,f,g,h,i,j) 图表示末态为三个介子的过程。

Fig 2.6 Feynman diagrams for nonleptonic decays of doubly heavy tetraquark. (a,b) are corresponding to the two mesons W-exchange process; (c,d) are corresponding to the baryon and anti-baryon process; (e,f,g,h,i,j) are corresponding to three mesons process ((e,f) match with J/ψ plus B meson and light meson, (g,h) match with B_c^- plus D and light meson, (i,j) match with B plus \bar{D} and D).

$$\begin{aligned}
& + b_5(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xjk}(F_8)_x^l(H_3)^i(\bar{F}_{b6})_{\{kl\}}\bar{\ell}\nu_\ell + b_6(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xij}(F_8)_x^l(H_3)^k(\bar{F}_{b6})_{\{kl\}}\bar{\ell}\nu_\ell \\
& + b_7(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xil}(F_8)_x^j(H_3)^k(\bar{F}_{b6})_{\{kl\}}\bar{\ell}\nu_\ell + b_8(T_{bb3})_{[ij]}(F_{10})^{\{jkl\}}(H_3)^i(\bar{F}_{b6})_{\{kl\}}\bar{\ell}\nu_\ell.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

末态为双重味重子与轻重子的哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = b_9(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xij}(F_8)_x^k(\bar{F}_{bc})_k\bar{\ell}\nu_\ell + b_{10}(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xik}(F_8)_x^j(\bar{F}_{bc})_k\bar{\ell}\nu_\ell. \tag{2.61}$$

a_i, b_i 是与模型无关的非微扰参数。对于末态为介子态的过程，其中与 a_3 和 a_5 项对应的费曼图为 2.5(a)，而 a_4 项与湮灭图 2.5(b)相关。对于末态为单重味重子与轻重子的过程，其中底重子在SU(3)对称性下可以分为 $\bar{3}$ 重态与6重态，而轻重子则可分为8重态与 $\bar{10}$ 重态，与末态为 $\bar{10}$ 重态轻重子和6重态底重子相关的费曼图为 $b\bar{u}$ 的湮灭图 2.5(c)。与末态为双重味重子和轻重子相关的费曼图为 2.5(d)。展开上述构造的哈密顿量，我们可以得到三重态 T_{bb3} 的半轻衰变的衰变道及衰变振幅。

对于 T_{bb3} 的非轻衰变过程，我们主要讨论具有CKM矩阵元压低不明显的衰变过程，相应的夸克层次的衰变为： $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 与 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ 。在强子层次上，它们均可

以对应于三重态 T_{bb3} 非轻衰变到两体介子或两体重子或三体介子的过程。为了简洁我们将省略两体重子与三体介子的衰变振幅及衰变宽度的关系。

首先考虑第一类非轻衰变过程 $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 或 $b\bar{d}/\bar{s} \rightarrow c\bar{c}$ 。在强子层次上，我们可以分别构造出 T_{bb3} 衰变到两体介子或两体重子或三体介子过程的有效哈密顿量。

末态为两体介子的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = f_1(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^j(H_3)^i J/\psi + f_2(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{D})^j(H_3)^i \bar{B}_c, \quad (2.62)$$

末态为双重味 bc 重子与反粲重子（三重态或反六重态重子）的两体重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & a_1(T_{bb3})_{[ij]}(F_{c3})^{[jk]}(H_3)^i(\bar{F}_{bc})_k + a_2(T_{bb3})_{[ij]}(F_{c3})^{[ij]}(H_3)^k(\bar{F}_{bc})_k \\ & + a_3(T_{bb3})_{[ij]}(F_{c\bar{6}})^{\{jk\}}(H_3)^i(\bar{F}_{bc})_k. \end{aligned} \quad (2.63)$$

末态为三体介子（ B 、 j/ψ 与轻介子或 B_c 、 D 与轻介子，或 D 、 \bar{D} 与 B ）的相关哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & a_1(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^k M_k^j(\bar{B})^i J/\psi + a_2(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^i M_k^j(\bar{B})^k J/\psi \\ & + a_3(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^k M_k^j(\bar{D})^i \bar{B}_c + a_4(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^i M_k^j(\bar{D})^k \bar{B}_c \\ & + a_5(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^j D_k(\bar{D})^i \bar{B}^k + a_6(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^k D_k(\bar{D})^i \bar{B}^j \\ & + a_7(T_{bb3})_{[ij]}(H_3)^i D_k(\bar{D})^k \bar{B}^j. \end{aligned} \quad (2.64)$$

对于末态为两介子态的过程，相关费曼图为图 2.6，其衰变振幅的结果见表格 2.18。我们从衰变振幅中进一步得到衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned} \Gamma(T_{bb\bar{u}s}^- \rightarrow B^- J/\psi) &= \Gamma(T_{bb\bar{d}s}^0 \rightarrow \bar{B}^0 J/\psi), \quad \Gamma(T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- J/\psi) = \Gamma(T_{bb\bar{d}s}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 J/\psi), \\ \Gamma(T_{bb\bar{u}s}^- \rightarrow D^0 B_c^-) &= \Gamma(T_{bb\bar{d}s}^0 \rightarrow D^+ B_c^-), \quad \Gamma(T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^0 B_c^-) = \Gamma(T_{bb\bar{d}s}^0 \rightarrow D_s^+ B_c^-). \end{aligned}$$

考虑第二类非轻衰变过程 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ ，在强子层次上其对应于三重态 T_{bb3} 衰变到两体介子或两体重子或三体介子的衰变过程。我们依次构造相关强子层次的哈密顿量。

末态为两体介子的哈密顿量为

$$\mathcal{H} = f_3(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^j(H_8)_k^i(\bar{D})^k + f_4(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^k(H_8)_k^i(\bar{D})^j. \quad (2.65)$$

表 2.18 双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 衰变到两体介子末态的衰变振幅。

Tab 2.18 Amplitudes for the W-exchange $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ decays induced by the $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ transition. Note that these amplitudes have an additional identical CKM factor V_{cb} .

channel	amplitude($/V_{cb}$)	channel	amplitude($/V_{cb}$)
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- J/\psi$	$-f_1 V_{cs}^*$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 J/\psi$	$-f_1 V_{cs}^*$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 J/\psi$	$f_1 V_{cd}^*$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- J/\psi$	$-f_1 V_{cd}^*$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^0 B_c^-$	$-f_2 V_{cs}^*$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ B_c^-$	$-f_2 V_{cs}^*$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ B_c^-$	$f_2 V_{cd}^*$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^0 B_c^-$	$-f_2 V_{cd}^*$

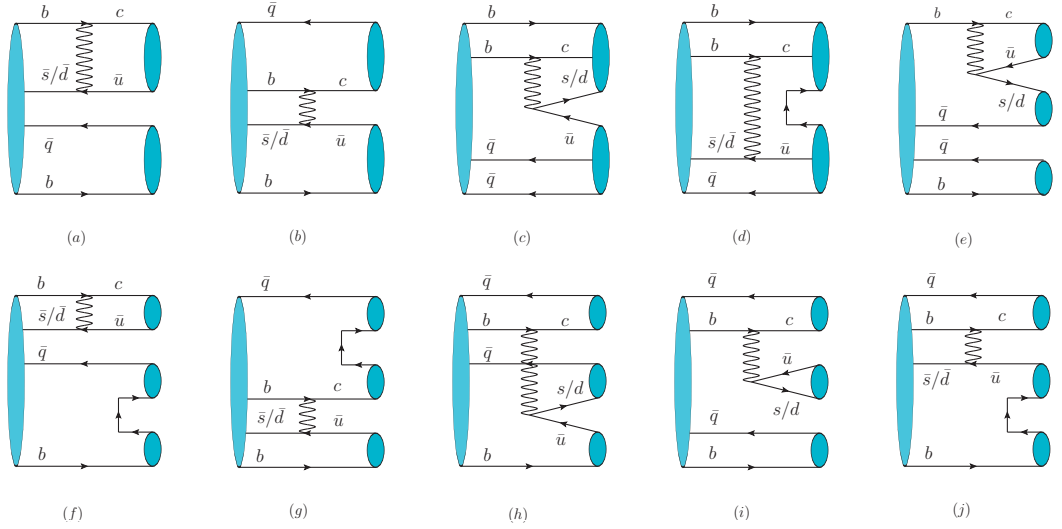


图 2.7 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ 衰变对应的双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 半轻衰变的费曼图。(a,b) 图表示末态生成两个介子的过程；(c,d) 图表示末态生成重子与反重子的过程。(e,f,g,h,i,j) 图表示末生成 B 、 D 介子与一个轻介子的过程。

Fig 2.7 Feynman diagrams for nonleptonic decays of doubly heavy tetraquark. (a,b) are corresponding with two mesons W-exchange process; (c,d) are corresponding with the baryon and anti-baryon process; (e,f,g,h,i,j) are corresponding with the B plus D and light meson process.

末态为两体重子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & a_4(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xjk}(F_8)_x^l(H_8)_k^i(\bar{F}_{bc})_l + a_5(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xjl}(F_8)_x^k(H_8)_k^i(\bar{F}_{bc})_l \\
& + a_6(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xkl}(F_8)_x^j(H_8)_k^i(\bar{F}_{bc})_l + a_7(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xij}(F_8)_x^k(H_8)_k^l(\bar{F}_{bc})_l \\
& + a_8(T_{bb3})_{[ij]}(F_{10})^{\{jkl\}}(H_8)_k^i(\bar{F}_{bc})_l + \bar{a}_7(T_{bb3})_{[ij]}\epsilon^{xik}(F_8)_x^j(H_8)_k^l(\bar{F}_{bc})_l. \quad (2.66)
\end{aligned}$$

表 2.19 双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 衰变到 B 介子与 D 介子的衰变振幅。Tab 2.19 Doubly bottom tetraquark $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ decays into a bottom meson and a charmed meson.

channel	amplitude($/V_{cb}$)	channel	amplitude($/V_{cb}$)
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D^0$	$-(f_3 + f_4) V_{us}^*$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D^+$	$-f_4 V_{us}^*$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D_s^+$	$f_4 V_{ud}^*$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 D^0$	$-f_3 V_{us}^*$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0$	$f_3 V_{ud}^*$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D^0$	$-(f_3 + f_4) V_{ud}^*$

末态为三体介子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & a_5(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^i(\bar{D})^l M_l^k(H_8)_k^j + a_6(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^i(\bar{D})^j M_l^k(H_8)_k^l \\
& + a_7(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^i(\bar{D})^k M_l^j(H_8)_k^l + a_8(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^l(\bar{D})^j M_l^k(H_8)_k^i \\
& + a_9(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^l(\bar{D})^k M_k^j(H_8)_i^l + a_{10}(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^k(\bar{D})^l M_k^j(H_8)_i^l \\
& + a_{11}(T_{bb3})_{[ij]}(\bar{B})^l(\bar{D})^i M_k^j(H_8)_l^k.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

对于末态为两体介子的过程，我们展开哈密顿量并得到相关衰变振幅的结果，见表格 2.19。我们进一步得到衰变宽度之间的关系：

$$\frac{\Gamma(T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D_s^+)}{\Gamma(T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D^+)} = \frac{\Gamma(T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0)}{\Gamma(T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 D^0)} = \frac{\Gamma(T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D^0)}{\Gamma(T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D^0)} = \frac{|V_{ud}^*|^2}{|V_{us}^*|^2}.$$

对于末态为两体重子的哈密顿量做展开，其中因子 $2a_7 + \bar{a}_7$ 总是同时出现在衰变振幅中，因此我们可以将哈密顿量中与 \bar{a}_7 相关的项去掉。

2.5.3 双重味 cc -tetraquark

双重味 cc -tetraquark可以发生半轻衰变过程 $c \rightarrow q\ell^+\nu$ ，在强子层次上，其对应于 T_{cc3} 三体半轻衰变到一个 D 介子与 $\ell^+\nu$ ，或四体半轻衰变到一个 D 介子与一个轻介子与 $\ell^+\nu$ 的衰变过程，其中三体半轻过程对应的费曼图如图 2.8(c)，四体半轻过程的相关费曼图如图 2.8(a,b)。我们依次构造出 T_{cc3} 的三体、四体半轻过程的哈密顿量

$$\mathcal{H} = a_1(T_{cc3})_{[ij]}(H_3)^i(\bar{D})^j \bar{\nu}_\ell \ell, \tag{2.68}$$

$$\mathcal{H} = a_1(T_{cc3})_{[ij]}(H_3)^i(\bar{D})^k M_k^j \bar{\nu}_\ell \ell + a_2(T_{cc3})_{[ij]}(H_3)^k(\bar{D})^i M_k^j \bar{\nu}_\ell \ell. \tag{2.69}$$

对于三体半轻过程，我们容易得到如下的衰变过程：

$$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ / T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0 \ell^+ \nu, \quad T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^+ \ell^+ \nu, \quad T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D_s^+ \ell^+ \nu, \tag{2.70}$$

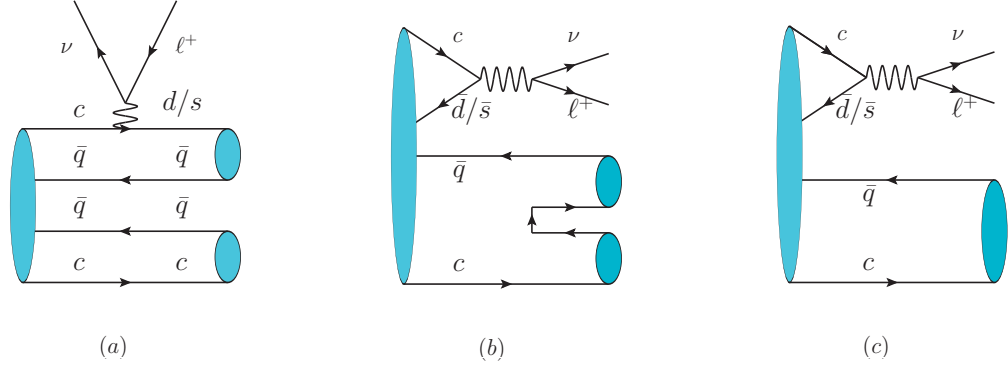


图 2.8 双重味 $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ 半轻衰变的费曼图。(a,b) 图表示末态生成一对介子的过程，(c) 图表示末态只含有一个介子的过程。

Fig 2.8 Feynman diagrams for semileptonic decays of doubly charmed tetraquark. Panel (a,b) correspond to the decays into a pair of mesons, and in panel (c), there is only one meson in the final state. In panels (b,c), the two $c\bar{d}/\bar{s}$ quarks in the initial state can annihilate, and usually such contributions are power suppressed.

根据上述衰变过程，我们推导出衰变宽度的关系为：

$$\Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 l^+ \nu) = \Gamma(T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^+ l^+ \nu), \Gamma(T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D_s^+ l^+ \nu) = \Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0 l^+ \nu).$$

对于 T_{cc3} 的非轻衰变过程，我们只讨论其中Carbibbo允许的过程。在强子层次上， T_{cc3} 可以弱衰变到两体介子或三体介子的过程，我们可以分别构造出强子层次的哈密顿量。

当末态为两体介子时，相关的费曼图为图 2.9(a,b)。我们构造的强子层次的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & f_1(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^i M_l^k (H_{\bar{6}})_k^{[jl]} + f_2(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^l M_l^k (H_{\bar{6}})_k^{[ij]} \\ & + f_3(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^k M_l^j (H_{\bar{6}})_k^{[il]} + f_4(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^i M_l^k (H_{15})_k^{\{jl\}} \\ & + f_5(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^k M_l^j (H_{15})_k^{\{il\}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

当末态为三体介子时，相关的费曼图为图 2.9。我们构造的强子层次的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & b_1(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^i M_m^l M_k^m (H_{\bar{6}})_l^{[jk]} + b_2(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^m M_k^i M_l^j (H_{\bar{6}})_m^{[kl]} \\ & + b_3(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^l M_m^i M_k^m (H_{\bar{6}})_l^{[jk]} + b_4(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^m M_k^i M_l^m (H_{\bar{6}})_l^{[jk]} \\ & + b_5(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^m M_m^i M_k^l (H_{\bar{6}})_l^{[jk]} + b_6(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^k M_m^l M_l^m (H_{\bar{6}})_k^{[ij]} \\ & + b_7(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^m M_l^k M_m^l (H_{\bar{6}})_k^{[ij]} + b_8(T_{cc3})_{[ij]} (\bar{D})^i M_k^j M_l^m (H_{15})_m^{\{kl\}} \end{aligned}$$

表 2.20 双重味 $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ 衰变到D介子与轻介子的衰变振幅。sC 是 $\sin(\theta_C)$ 的缩写。

Tab 2.20 Doubly charmed tetraquark $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ decays into a charmed meson and a light meson. sC is the abbreviation of $\sin(\theta_C)$.

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0\pi^+$	$f_1 - 2f_2 + f_4$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0K^+$	$(f_1 - 2f_2 + f_4) \text{sC}$
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+\pi^0$	$\frac{2f_2 - f_3 - f_5}{\sqrt{2}}$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+K^0$	$(-2f_2 + f_3 - f_5) \text{sC}$
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+\eta$	$\frac{-2f_2 + f_3 - 3f_5}{\sqrt{6}}$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+\pi^0$	$\frac{(f_1 - f_3 - f_4 - f_5) \text{sC}}{\sqrt{2}}$
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+\bar{K}^0$	$f_1 - 2f_2 - f_4$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+\eta$	$\frac{(-3f_1 + 4f_2 + f_3 + 3f_4 - 3f_5) \text{sC}}{\sqrt{6}}$
$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+\pi^+$	$f_1 - f_3 + f_4 - f_5$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+K^+$	$(f_1 - f_3 + f_4 - f_5) \text{sC}$
$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+\bar{K}^0$	$f_1 - f_3 - f_4 + f_5$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+\pi^+$	$(f_1 - f_3 + f_4 - f_5) \text{sC}$
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+K^0$	$(f_1 - f_3 - f_4 + f_5) \text{sC}^2$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0\pi^+$	$(f_1 - 2f_2 + f_4) (-\text{sC})$
$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+K^+$	$(-f_1 + f_3 - f_4 + f_5) \text{sC}^2$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+\pi^0$	$\frac{(f_1 - 2f_2 - f_4 + 2f_5) \text{sC}}{\sqrt{2}}$
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0K^+$	$(f_1 - 2f_2 + f_4) \text{sC}^2$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+\eta$	$\frac{(-3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4) \text{sC}}{\sqrt{6}}$
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+K^0$	$(f_1 - 2f_2 - f_4) \text{sC}^2$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+\bar{K}^0$	$(2f_2 - f_3 + f_5) \text{sC}$
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+\pi^0$	$-\sqrt{2}f_5 \text{sC}^2$		
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+\eta$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(2f_2 - f_3) \text{sC}^2$		

$$\begin{aligned}
& +b_9(T_{cc3})_{[ij]}(\bar{D})^i M_m^l M_k^m (H_{15})_l^{\{jk\}} + b_{10}(T_{cc3})_{[ij]}(\bar{D})^l M_m^i M_k^m (H_{15})_l^{\{jk\}} \\
& +b_{11}(T_{cc3})_{[ij]}(\bar{D})^m M_k^i M_m^l (H_{15})_l^{\{jk\}} + b_{12}(T_{cc3})_{[ij]}(\bar{D})^m M_m^i M_k^l (H_{15})_l^{\{jk\}} \\
& +\bar{b}_1(T_{cc3})_{[ij]}(\bar{D})^i M_k^j M_l^m (H_6)_m^{\{kl\}}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

对于末态为两体介子的过程，我们将衰变振幅的结果列在表格 2.20 中，进一步推导出衰变宽度的关系如下：

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+K^0) &= \Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+\bar{K}^0), \Gamma(T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+\pi^+) = \Gamma(T_{cc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+K^+), \\
\Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0\pi^+) &= \Gamma(T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0K^+).
\end{aligned}$$

对于末态为含有两个轻介子的三体介子的过程， b_1 与 \bar{b}_1 总是伴随因子 $b_1 - \bar{b}_1$ 同时出现的，所以我们构造的哈密顿量中有一项是不独立的，我们可以去掉与 \bar{b}_1 相关的哈密顿量项。 T_{cc3} 非轻衰变到三体介子末态的详细讨论参考文献 [60]。

2.5.4 双重味 bc -tetraquark

在双重味 bc -tetraquark中，底夸克与粲夸克都可以发生半轻弱衰变。对于双重味 bc -tetraquark底夸克衰变的振幅，我们可以利用双重味 bb -tetraquark的结果，并通过替换 $T_{bb\bar{q}\bar{q}} \rightarrow T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ ， $B \rightarrow D$ 来得到。对于双重味 bc -tetraquark粲夸克衰变的振幅，

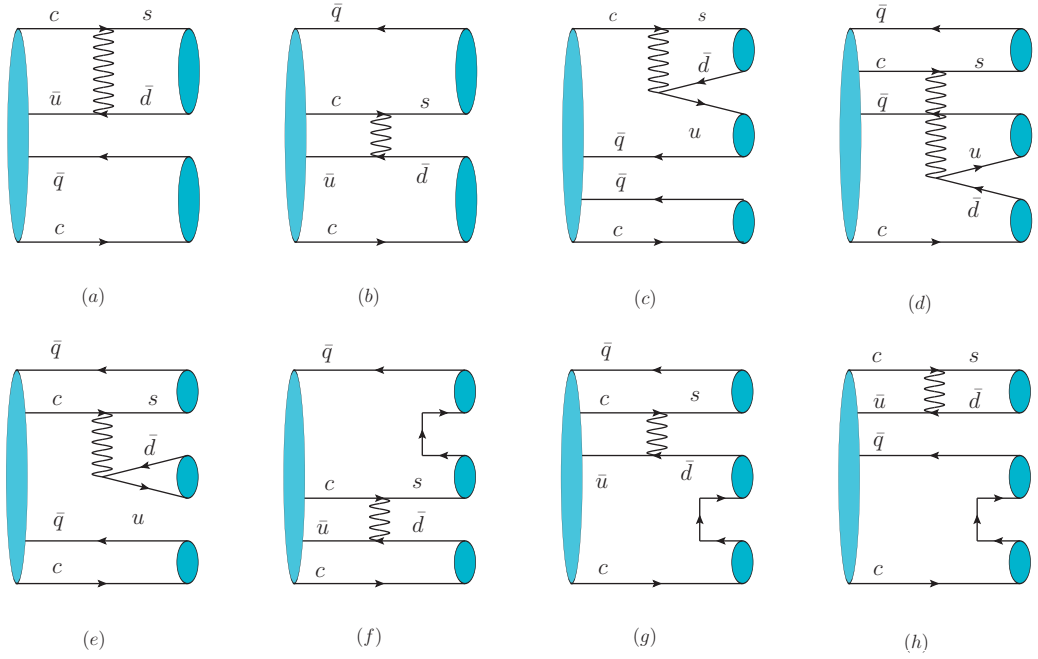


图 2.9 双重味 $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ 非轻衰变的费曼图。(a,b)图表示末态产生 D 介子与轻介子的过程。图(c,d,e,f,g,h)表示末态为 D 介子与两个轻介子的三体衰变过程。

Fig 2.9 Feynman diagrams for nonleptonic decays of doubly charmed tetraquark $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$. (a,b) are corresponding with a charmed meson and a light meson final states by W-exchange process. (c,d,e,f,g,h) are corresponding with a charmed meson and two light mesons final states process.

我们可以利用双重味 cc -tetraquark的结果，并通过替换 $T_{cc\bar{q}\bar{q}} \rightarrow T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ ， $D \rightarrow B$ 来得到。所以我们不重复讨论双重味 bc -tetraquark的半轻衰变。

在双重味 bc -tetraquark发生非轻弱衰变的过程中，会存在初态底夸克的W玻色子交换过程 $bc \rightarrow ud/s$ 或 $bc \rightarrow cd/s$ ，相关费曼图如图 2.10(a)。我们不能直接通过替换规则来得到它们的衰变振幅，因此我们需要构建出该过程的哈密顿量。在强子层次上，底夸克的W 玻色子交换过程对应于双重味 bc -tetraquark衰变到两个介子或三个介子的过程，我们可以构造出相关强子层次的哈密顿量。

末态为 D 介子与轻介子或两个轻介子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & f_1(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^i M_k^j (H_3)^k + f_2(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^k M_k^j (H_3)^i \\ & + f_3(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_l^k (H_3)^{[jl]} + f_4(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_l^j (H_3)^{[kl]} \\ & + f_5(T_{bc3})_{[ij]} M_k^l M_l^k (H_3)^{[ij]} + f_6(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_l^k (H_6)^{\{jl\}}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

末态为三个介子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} = & d_1(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^i M_k^j M_l^k (H_3)^l + d_2(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^i M_l^k M_k^l (H_3)^j \\
& + d_3(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^k M_k^i M_l^j (H_3)^l + d_4(T_{bc3})_{[ij]}(\bar{D})^k M_l^i M_k^l (H_3)^j \\
& + d_5(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_m^j M_l^k (H_3)^{[lm]} + d_6(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_l^k M_m^l (H_3)^{[jm]} \\
& + d_7(T_{bc3})_{[ij]} M_m^i M_l^k M_k^l (H_3)^{[jm]} + d_8(T_{bc3})_{[ij]} M_m^k M_k^l M_l^m (H_3)^{[ij]} \\
& + d_9(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_m^j M_l^k (H_6)^{\{lm\}} + d_{10}(T_{bc3})_{[ij]} M_k^i M_l^k M_m^l (H_6)^{\{jm\}} \\
& + d_{11}(T_{bc3})_{[ij]} M_m^i M_l^k M_k^l (H_6)^{\{jm\}}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

对于双重味 bc -tetraquark衰变到 D 介子与一个轻介子的两体介子过程，我们得到衰变振幅的结果列在表格 2.21 中，从中推导出衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \pi^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ \pi^-) = \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \pi^+) = \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \pi^0), \\
\Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 K^+) &= \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D_s^+ K^-), \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0) = \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ K^-), \\
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \bar{K}^0) &= \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ K^-), \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \eta) = \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \eta), \\
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ \pi^-) &= \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 K^0) = 2\Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \pi^0), \\
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \pi^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^0) = \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ \pi^-).
\end{aligned}$$

对于双重味 bc -tetraquark衰变到两个轻介子的两体介子过程，我们将衰变振幅的结果列在表格 2.22 中，从中推导出衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^+ K^-) = 3\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \eta \bar{K}^0), \\
\Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^0 K^+) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ K^0) = 3\Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow \eta K^+), \\
\Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow K^+ \bar{K}^0) &= \frac{3}{2} \Gamma(T_{bc\bar{d}\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ \eta) = 3\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 \eta), \\
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-), \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 K^0) = 3\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \eta K^0), \\
\Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{2} \Gamma(T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-).
\end{aligned}$$

对于双重味 bc -tetraquark衰变到三体介子的过程，相关的费曼图为图 2.10(b,c,d)。三体介子过程的详细的讨论参考文献 [60]。

2.5.5 双重味 $b\bar{c}$ -tetraquark

在SU(3)味道对称性下，具有自旋宇称量子数为 $J^P = 0^+$ 的tetraquark $[bq][\bar{c}\bar{q}]$ ，可以形成一个 $\mathbf{8}$ 重态 $T_{b\bar{c}8}$ 与一个味道单态 $T_{b\bar{c}1}$ 。

表 2.21 双重味 $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ 衰变到 D 介子与轻介子的衰变振幅。Tab 2.21 Doubly heavy tetraquark $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ decays into a charmed meson and a light meson .

channel	amplitude($/V_{cb}$)	channel	amplitude($/V_{cb}$)
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \pi^0$	$-\frac{f_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 K^0$	$f_1 V_{cd}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \eta$	$-\frac{(2f_1+f_2)V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ \pi^-$	$-f_2 V_{cs}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ \pi^-$	$-f_1 V_{cd}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ K^-$	$-(f_1 + f_2) V_{cs}^*$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \pi^+$	$-f_2 V_{cs}^*$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 K^+$	$f_2 V_{cd}^*$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \pi^0$	$\frac{f_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^0$	$(f_1 + f_2) V_{cd}^*$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \eta$	$-\frac{(2f_1+f_2)V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \pi^0$	$\frac{f_1 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0$	$-(f_1 + f_2) V_{cs}^*$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \eta$	$-\frac{(f_1+2f_2)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \pi^0$	$-\frac{(f_1+f_2)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \bar{K}^0$	$f_1 V_{cs}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \eta$	$\frac{(f_1-f_2)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ \pi^-$	$-(f_1 + f_2) V_{cd}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ K^-$	$-f_1 V_{cs}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D_s^+ K^-$	$-f_2 V_{cd}^*$

表 2.22 双重味 $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ 衰变到两个轻介子的衰变振幅。Tab 2.22 Doubly heavy tetraquark $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ decays into two light mesons.

channel	amplitude($/V_{cb}$)	channel	amplitude($/V_{cb}$)
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$(-f_3 + 4f_5 + f_6) V_{cs}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$(-f_3 + 4f_5 + f_6) V_{cs}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 K^0$	$\frac{(f_3+2f_4+f_6)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^0 \eta$	$\frac{(-f_3-2f_4+f_6)V_{cs}^*}{\sqrt{3}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^- K^+$	$-(f_3 + 2f_4 + f_6) V_{cd}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow K^+ K^-$	$-2(f_3 + f_4 - 2f_5) V_{cs}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$-(f_3 - 4f_5 + f_6) V_{cs}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow K^0 \eta$	$\frac{(f_3+2f_4+f_6)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \eta \eta$	$-\frac{1}{3}(5f_3 + 4f_4 + 3(f_6 - 4f_5)) V_{cs}^*$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ K^0$	$(f_3 + 2f_4 - f_6) V_{cd}^*$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ \eta$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(-f_3 - 2f_4 + f_6) V_{cs}^*$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^0 K^+$	$\frac{(f_3+2f_4-f_6)V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow K^+ \bar{K}^0$	$(-f_3 - 2f_4 + f_6) V_{cs}^*$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow K^+ \eta$	$\frac{(-f_3-2f_4+f_6)V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$-2(f_3 + f_4 - 2f_5) V_{cd}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^+ K^-$	$-(f_3 + 2f_4 + f_6) V_{cs}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$-2(f_3 + f_4 - 2f_5) V_{cd}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{(f_3+2f_4+f_6)V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^0 \eta$	$\frac{2f_6 V_{cd}^*}{\sqrt{3}}$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow K^+ K^-$	$(-f_3 + 4f_5 + f_6) V_{cd}^*$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$-(f_3 - 4f_5 + f_6) V_{cd}^*$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \eta$	$\frac{(f_3+2f_4+f_6)V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \eta \eta$	$\frac{2}{3}(-f_3 + f_4 + 6f_5) V_{cd}^*$		

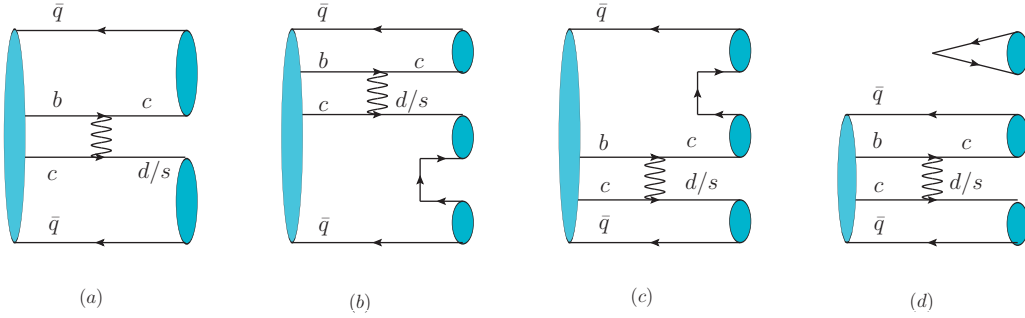


图 2.10 双重味 $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ 非轻衰变的费曼图。(a)图表示末态产生两个介子的过程。(b,c,d)图表示末态产生三个介子的过程。

Fig 2.10 Feynman diagrams for nonleptonic decays of doubly heavy tetraquark $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$. (a) is corresponding with two mesons by the new W-exchange process. (b,c,d) are corresponding with three mesons by the new W-exchange process.

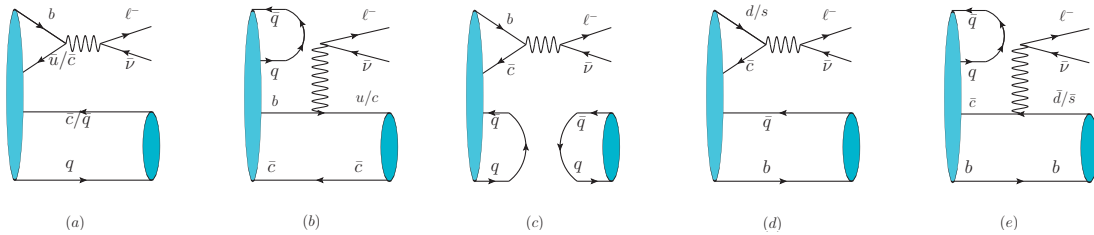


图 2.11 双重味 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 半轻衰变的费曼图。图(a,b,c)与 b 夸克的衰变相关,图(d,e)与 \bar{c} 夸克的衰变相关。

Fig 2.11 Topological diagrams for semileptonic decays of tetraquark $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$. Panels (a,b,c) correspond to the b quark decay and panels (d,e) denotes the \bar{c} quark decay.

首先研究 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 的半轻衰变过程, $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 既可以发生底夸克衰变也可以发生粲夸克衰变。对于底夸克衰变过程 $b \rightarrow c/ul^-\bar{\nu}_\ell$, 在强子层次上其对应于 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 衰变到一个介子与 $\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 的过程。我们构建出SU(3)不变的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = a_1(T_{b\bar{c}8})_j^i (H'_3)^j D_i \bar{\ell} \nu + a'_1(T_{b\bar{c}1})_i^j (H'_3)^j D_j \bar{\ell} \nu, \quad (2.75)$$

$$\mathcal{H}_{eff} = a_2(T_{b\bar{c}8})_j^i M_i^j \bar{\ell} \nu + a'_2(T_{b\bar{c}1})_i^j M_j^i \bar{\ell} \nu + a'_3(T_{b\bar{c}1})_i^j J/\Psi \bar{\ell} \nu. \quad (2.76)$$

上述哈密顿量依次对应于 $b \rightarrow ul^-\bar{\nu}_\ell$ 与 $b \rightarrow cl^-\bar{\nu}_\ell$ 的衰变过程, 其中衰变算符 H'_3 在 2.3 节给出。由于初态可以是 $T_{b\bar{c}1}$ 味道单态, 所以对于末态轻介子, 我们同时考虑八重态与味道单态的情况, 相对应的费曼图为图 2.11。我们展开上述哈密顿量得到 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 衰变到介子与 $\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 的衰变振幅, 并列在表格 2.23 中。我们进一步诱导出衰变宽度的

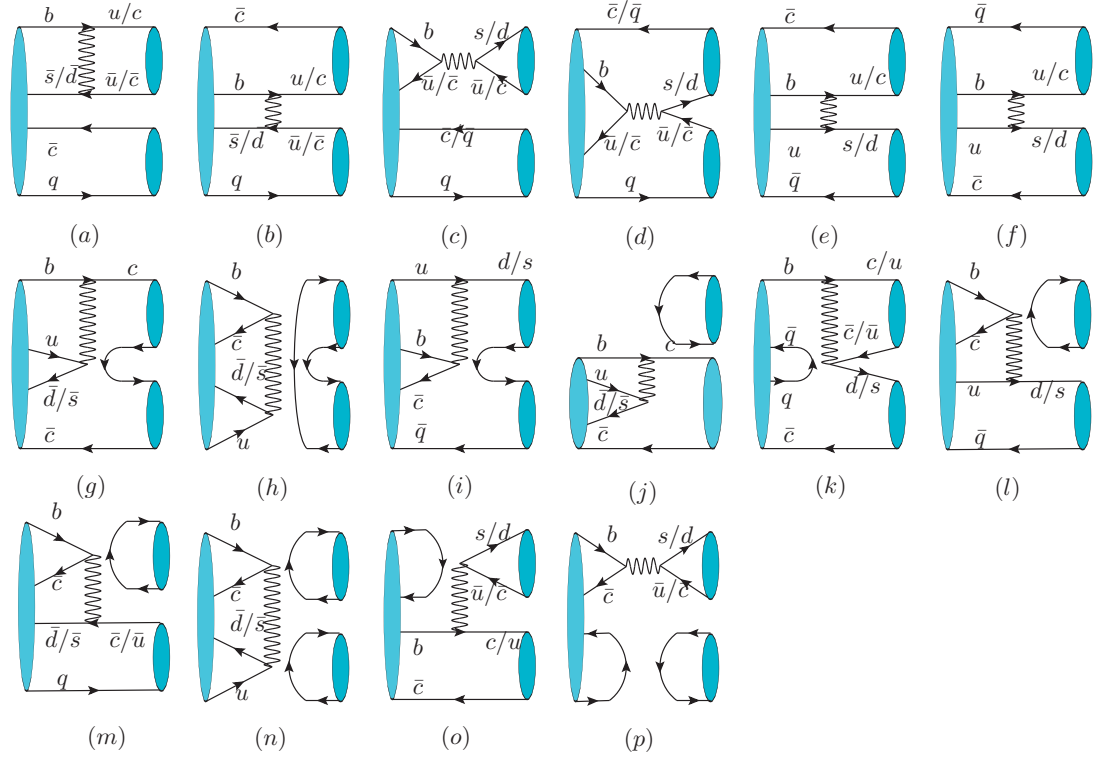


图 2.12 双重味 $T_{bc\bar{s}}/T_{b\bar{c}1}$ 底夸克非轻衰变的费曼图。图(a-p)表示末态生成一对介子的过程。图(j,l,m,n,p)表示末态生成味道单态强子的过程。图(k,o,p)表示味道单态 $T_{b\bar{c}1}$ 的衰变过程。图(c,d,g,h,i)中由于初态正反夸克可以相互湮灭，所以通常是受到压低的过程。

Fig 2.12 Topological diagrams for the b -quark non-leptonic decays of tetraquark $T_{bc\bar{s}}/T_{b\bar{c}1}$. Panels (a-p) correspond to the decays into a pair of mesons. In panels (j,l,m,n,p), the final meson produced by gluons is the flavor singly state. In panels (k,o,p), the initial state is the flavor singlet $T_{b\bar{c}1}$. The diagrams in panels(c,d,g,h,i) are usually power suppressed as a pair of quark and anti-quark in the initial state can annihilate.

关系为：

$$\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow D^- l^- \bar{\nu}) = 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 l^- \bar{\nu}) = \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow D_s^- l^- \bar{\nu}) = 6\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 l^- \bar{\nu}).$$

值得注意的是，在 $b \rightarrow cl^- \bar{\nu}_\ell$ 过程中所有的衰变道具有相同的衰变宽度。

对于 $T_{bc\bar{s}}/T_{b\bar{c}1}$ 的反粲夸克半轻衰变 $\bar{c} \rightarrow \bar{d}/\bar{s} l^- \bar{\nu}$ ，在强子层次上其对应于 $T_{bc\bar{s}}/T_{b\bar{c}1}$ 衰变到 B 介子与 $l^- \bar{\nu}$ 的过程。我们构造的强子层次哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = c_1 (T_{bc\bar{s}})_j^i (H_3)_i \bar{B}^j \bar{l} \nu + c'_1 (T_{b\bar{c}1})_i^j (H_3)_j \bar{B}^i \bar{l} \nu. \quad (2.77)$$

将上述哈密顿量展开，我们得到相关衰变振幅见表格 2.24，从表格可以诱导出衰变

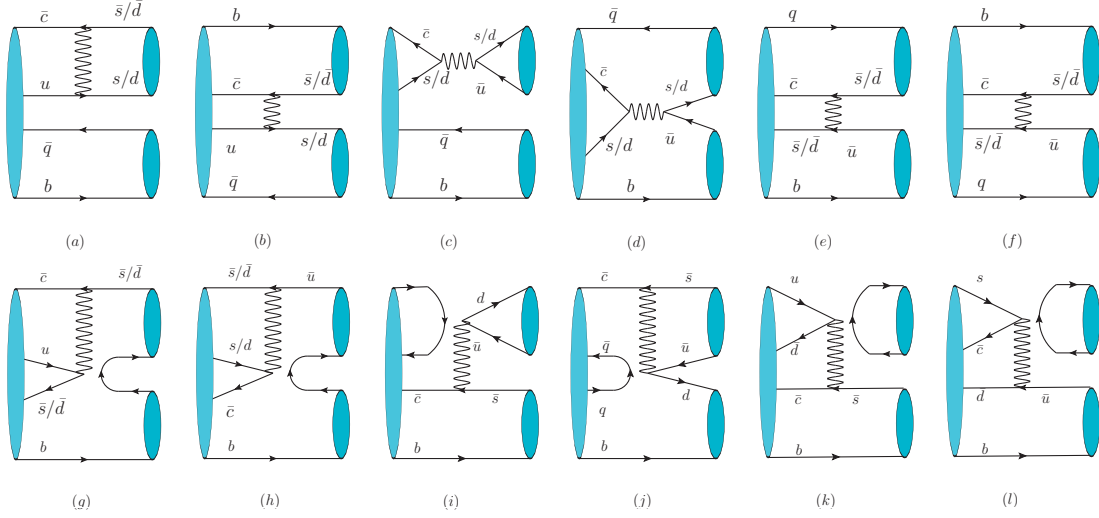


图 2.13 双重味 $T_{b\bar{c}s}/T_{b\bar{c}1}$ 粲夸克非轻衰变的费曼图。图(a-l)表示 $T_{b\bar{c}s}/T_{b\bar{c}1}$ 衰变到 B 介子与轻介子的两体非轻衰变的过程。

Fig 2.13 Topological diagrams for the \bar{c} -quark non-leptonic decays of tetraquark $T_{b\bar{c}s}/T_{b\bar{c}1}$. The two-body processes are given in panels(a-l). The \bar{c} -quark decays have the similar structures with the b -quark decays. The panels(a-l) contribute to the process of $T_{b\bar{c}s}/T_{b\bar{c}1}$ decays into B plus a light meson.

表 2.23 双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变到反粲介子与轻介子或 J/ψ 的衰变振幅。

Tab 2.23 Amplitudes for tetraquark $T_{b\bar{c}s}/T_{b\bar{c}1}$ decays into anti-charmed meson, a light meson or J/ψ .

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow D^- l^- \bar{\nu}$	$a_1 V_{ub}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_1 V_{ub}}{\sqrt{2}}$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow D_s^- l^- \bar{\nu}$	$a_1 V_{ub}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_1 V_{ub}}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 l^- \bar{\nu}$	$\sqrt{3} a_1' V_{ub}$		
channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- l^- \bar{\nu}$	a_2	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 l^- \bar{\nu}$	a_2
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}$	a_2	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- l^- \bar{\nu}$	a_2
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 l^- \bar{\nu}$	a_2	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 l^- \bar{\nu}$	a_2
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ l^- \bar{\nu}$	a_2	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_8 l^- \bar{\nu}$	a_2
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_1 l^- \bar{\nu}$	$3a_2'$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow J/\psi l^- \bar{\nu}$	$\sqrt{3} a_3'$

表 2.24 双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变到 B 介子的衰变振幅。Tab 2.24 Amplitudes for tetraquark $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ decays into a B meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow B^- l^- \bar{\nu}$	$c_1 V_{cd}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}$	$-\frac{c_1 V_{cd}}{\sqrt{2}}$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- l^- \bar{\nu}$	$c_1 V_{cs}$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}$	$c_1 V_{cs}$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}$	$c_1 V_{cd}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}$	$\frac{c_1 V_{cd}}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} c_1 V_{cs}$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}$	$\sqrt{3} c_1' V_{cd}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}$	$\sqrt{3} c_1' V_{cs}$		

宽度的关系为:

$$\begin{aligned} \Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow B^- l^- \bar{\nu}) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}) = \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}) = 6\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}), \\ \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- l^- \bar{\nu}) &= \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}) = \frac{3}{2}\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}). \end{aligned}$$

对于 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 的非轻衰变过程, 我们首先讨论Cabibbo压低不明显的底夸克衰变过程: $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 与 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ 。 $b \rightarrow c\bar{c}d/s$ 过程对应于强子层次上 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 的两体介子衰变, 我们可以构造出它的有效哈密顿量

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} &= a_1(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_3)^j D_i J/\psi + a_1'(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_3)^j D_j J/\psi, \\ \mathcal{H}_{eff} &= a_2(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_3)^j D_k M_i^k + a_3(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_3)^k D_k M_i^j + a_4(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_3)^k D_i M_k^j \\ &\quad + a_2'(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_3)^j D_k M_j^k + a_3'(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_3)^k D_k M_j^j + a_4'(T_{b\bar{c}8})_k^i (H_3)^k D_i M_j^j, \end{aligned} \quad (2.78)$$

相关的费曼图为图 2.12, 其中图 2.12(a-d) 对应于八重态 $T_{b\bar{c}8}$ 的衰变过程, 而费曼图 2.12(k,o,m,p)表示初态为单态 $T_{b\bar{c}1}$ 或末态生成单态介子的过程。图 2.12(a,b)表示八重态 $T_{b\bar{c}8}$ 衰变到 D 介子与 J/ψ 的过程, 图 2.12(c,d)表示末态生成 D 介子与轻介子的过程。我们将衰变振幅的结果列在表格 2.25中, 并进一步推导出衰变宽度的关系为:

$$\begin{aligned} \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow K^- D^-) = \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-) = \frac{1}{2}\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \bar{D}^0), \\ \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \bar{D}^0) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-) = 2\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-) = \Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0), \\ \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0) &= 2\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-) = \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D^-) = 2\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0), \\ \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-) = \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D_s^-), \\ \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D_s^-) &= \Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D_s^-) = \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D_s^-), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \bar{D}^0) &= \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D_s^-) = 2\Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D_s^-), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \bar{D}^0) &= \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-), \Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0) = \Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-), \\
\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D^-) &= \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D^-), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D^-) = \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-), \\
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0) &= \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0), \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D_s^-) = \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- D_s^-), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D^-) &= \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- D^-), \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D_s^-) = \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-), \\
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}^0) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-) = \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-) = 6\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}^0) &= \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-) = \frac{3}{2}\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}_s^-), \\
\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0) &= 2\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-) = \Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-) = 6\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-), \\
\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-) &= \Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0) = \frac{3}{2}\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D_s^-), \\
2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi) &= \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 J/\psi) = \Gamma(T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi) = 6\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi), \\
\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi) &= \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 J/\psi) = \frac{3}{2}\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi).
\end{aligned}$$

这里需要强调的是，对于所有含有 $\eta(\eta')$ 的衰变道我们都应该考虑混合效应带来的修正。若考虑轻介子为矢量介子的时候，我们只需要将赝标介子做替换 $\pi \rightarrow \rho$, $K \rightarrow K^*$, $\eta_8 \rightarrow V_8$ 与 $\eta_1 \rightarrow V_1$ ，并考虑矢量多重态的混合效应 $\omega - \phi$ ，即可得到相应的衰变振幅。

对于非轻衰变过程 $b \rightarrow c\bar{u}d/s$ ，在强子层次上，其对应于 $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ 的两体介子衰变，我们可以构造出相关有效哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= a_6(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^j M_k^j J/\psi + a_7(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^j M_i^k J/\psi + a'_6(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_8)_j^k M_k^j J/\psi \\
&\quad + a'_7(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^j M_k^k J/\psi, \\
\mathcal{H}_{eff} &= a_8(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^j D_k \bar{D}^k + a_9(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^k D_k \bar{D}^j + a_{10}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^j D_i \bar{D}^k \\
&\quad + a'_8(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_8)_k^j D_j \bar{D}^k, \\
\mathcal{H}_{eff} &= a_{11}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^j M_k^l M_l^k + a_{12}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^l M_k^j M_l^k + a_{13}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^j M_i^l M_l^k \\
&\quad + a_{14}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^l M_i^j M_l^k \\
&\quad + a_{15}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_k^l M_i^k M_l^j + a'_{11}(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_8)_j^l M_k^j M_l^k + a'_{12}(T_{b\bar{c}1})_i^i (H_8)_k^l M_j^j M_l^k \\
&\quad + a'_{13}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_l^j M_i^l M_k^k \\
&\quad + a'_{14}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^l M_j^j M_k^k + a'_{15}(T_{b\bar{c}8})_j^i (H_8)_i^j M_l^l M_k^k. \tag{2.79}
\end{aligned}$$

相应的夸克层次的费曼图见图 2.12。其中图 2.12(a-i)表示初末态不含味道单态的过程。图 2.12(j-p)表示与单态tetraquark/单态介子相关的衰变过程。图 2.12(b,e)表示

表 2.25 双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变到反粲介子与轻介子或反粲介子与 J/ψ 的衰变振幅。Tab 2.25 Tetraquark $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ decays into anti-charmed meson plus light meson or anti-charmed meson plus J/ψ .

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D^-$	$(a_3 + a_4) V_{cd}^*$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D_s^-$	$a_3 V_{cs}^*$
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow K^- D^-$	$a_4 V_{cs}^*$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-$	$\frac{1}{2} (a_2 + 2a_3 + a_4) V_{cd}^*$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D_s^-$	$a_3 V_{cs}^*$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0$	$\frac{(a_4 - a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-$	$-\frac{a_2 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$-\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$\frac{a_4 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-$	$-\frac{(a_2 + a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D^-$	$(a_2 + a_3) V_{cd}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D_s^-$	$a_3 V_{cs}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0$	$\frac{(a_2 - a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D_s^-$	$a_2 V_{cd}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \bar{D}^0$	$a_4 V_{cs}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \bar{D}^0$	$\frac{(a_2 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D_s^-$	$a_4 V_{cd}^*$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- D^-$	$a_3 V_{cd}^*$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- D_s^-$	$(a_3 + a_4) V_{cs}^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D_s^-$	$-\frac{a_4 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$(a_2 + a_3) V_{cd}^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D_s^-$	$(a_3 + a_4) V_{cs}^*$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$a_2 V_{cd}^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D_s^-$	$\frac{(a_4 - 2a_2) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-$	$-\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0$	$a_2 V_{cs}^*$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D^-$	$(a_3 + a_4) V_{cd}^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-$	$(a_2 + a_3) V_{cs}^*$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-$	$\frac{(a_2 - 2a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D^-$	$a_2 V_{cs}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D^-$	$a_3 V_{cd}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D_s^-$	$(a_2 + a_3) V_{cs}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \bar{D}^0$	$a_4 V_{cd}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \bar{D}^0$	$\frac{(a_2 - 2a_4) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-$	$-\frac{(a_2 + a_4) V_{cd}^*}{2\sqrt{3}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0$	$\frac{(a_2 + a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-$	$\frac{(a_2 - 2a_4) V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$\frac{(a_4 - 2a_2) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$\frac{(a_4 - 2a_2) V_{cs}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-$	$\frac{1}{6} (a_2 + 6a_3 + a_4) V_{cd}^*$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D_s^-$	$\frac{1}{3} (2a_2 + 3a_3 + 2a_4) V_{cs}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}^0$	$\sqrt{3} a'_4 (V_{cd})^*$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} a'_4 (V_{cd})^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}^0$	$\sqrt{3} a'_4 (V_{cs})^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-$	$\sqrt{3} a'_4 (V_{cs})^*$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-$	$\sqrt{3} a'_4 (V_{cd})^*$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-$	$\frac{a'_4 (V_{cd})^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-$	$-\sqrt{2} a'_4 (V_{cs})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^0 D^-$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} a'_2 (V_{cd})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0$	$\sqrt{3} a'_2 (V_{cd})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-$	$\sqrt{3} a'_2 (V_{cd})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$\sqrt{3} a'_2 (V_{cs})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$\sqrt{3} a'_2 (V_{cs})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D^-$	$\frac{a'_2 (V_{cd})^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D_s^-$	$-\sqrt{2} a'_2 (V_{cs})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-$	$(a'_2 + 3a'_3 + a'_4) (V_{cd})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-$	$(a'_2 + 3a'_3 + a'_4) (V_{cs})^*$
channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi$	$-\frac{a_1 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 J/\psi$	$a_1 V_{cd}^*$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi$	$a_1 V_{cd}^*$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi$	$a_1 V_{cs}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 J/\psi$	$a_1 V_{cs}^*$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi$	$\frac{a_1 V_{cd}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi$	$-\sqrt{\frac{2}{3}} a_1 V_{cs}^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi$	$\sqrt{3} a'_1 (V_{cd})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi$	$\sqrt{3} a'_1 (V_{cs})^*$		

八重态 T_{bc8} 衰变到轻介子与 J/ψ 的过程，图 2.12(a,f,g)表示末态为 D 与 \bar{D} 的过程，图 2.12(c,d,h,i)表示八重态 T_{bc8} 衰变到两个轻介子的过程。我们将衰变振幅的结果收集到表格 2.26中，并进一步推导出衰变宽度的关系为：

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 J/\psi) &= \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 J/\psi) = 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 J/\psi) &= \frac{1}{2}\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi). \\
\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-) &= \frac{1}{2}\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^+ D_s^-). \\
\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- \pi^-) &= 2\Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- \pi^-) = 2\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 \pi^-) = 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \pi^-), \\
\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^-) &= \frac{1}{2}\Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- K^-) = \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 K^-), \\
\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) &= 3\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \bar{K}^0) = \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{2}\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ \pi^-), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_8) = \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8), \\
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \eta_8) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8), \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-) = 3\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \eta_8 K^-), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^0) &= 3\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 K^0), \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_8) = \frac{1}{2}\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8), \\
\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) &= 2\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-) = 6\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8), \\
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_1) &= \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_1) = \Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1), \\
\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1) &= 2\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_1), \Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-) = \frac{3}{2}\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8), \\
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \eta_1) &= 2\Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1).
\end{aligned}$$

关于反粲夸克的非轻衰变过程 $\bar{c} \rightarrow \bar{s}d\bar{u}$ ，在强子层次上其对应于 T_{bc8}/T_{bc1} 的两体介子衰变，我们可以构造出相关的有效哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= f_3(T_{bc8})_j^i (H_6)_{[ik]}^j \bar{B}^l M_l^k + f_4(T_{bc8})_j^i (H_6)_{[ik]}^l \bar{B}^j M_l^k + f_5(T_{bc8})_j^i (H_6)_{[ik]}^l \bar{B}^k M_l^j \\
&+ f_6(T_{bc8})_j^i (H_6)_{[kl]}^j \bar{B}^k M_l^i + f_7(T_{bc8})_j^i (H_{15})_{\{ik\}}^j \bar{B}^l M_l^k + f_8(T_{bc8})_j^i (H_{15})_{\{ik\}}^l \bar{B}^j M_l^k \\
&+ f_9(T_{bc8})_j^i (H_{15})_{\{ik\}}^l \bar{B}^k M_l^j + f_{10}(T_{bc8})_j^i (H_{15})_{\{kl\}}^j \bar{B}^k M_l^i + f'_3(T_{bc1})_i^i (H_6)_{[jk]}^l \bar{B}^j M_l^k \\
&+ f'_4(T_{bc8})_j^i (H_6)_{[ik]}^j \bar{B}^k M_l^i + f'_5(T_{bc1})_i^i (H_{15})_{\{jk\}}^l \bar{B}^j M_l^k + f'_6(T_{bc8})_j^i (H_{15})_{\{ik\}}^j \bar{B}^k M_l^i.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

相应的费曼图如图 2.13，衰变振幅的结果见表格 2.27，我们进一步推导出衰变宽度的关系为：

$$\Gamma(T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^-) = \Gamma(T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- K^-), \Gamma(T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0) = \Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8),$$

表 2.26 双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变到粲介子与反粲介子或轻介子与 J/ψ 或两个轻介子的衰变振幅。Tab 2.26 Tetraquark $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ decays into J/ψ plus light meson or charmed meson plus anti-charmed meson or two light mesons.

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$\frac{(a_6 - a_7)V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi$	$\frac{a_6 V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 J/\psi$	$\frac{(a_7 - a_6)V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 J/\psi$	$a_6 V_{us}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 J/\psi$	$\frac{(a_6 + a_7)V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi$	$a_7 V_{ud}^*$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$a_7 V_{us}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 J/\psi$	$\frac{a_7 V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 J/\psi$	$a_6 V_{ud}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 J/\psi$	$\frac{(a_7 - 2a_6)V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$\frac{(a_6 + a_7)V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi$	$\frac{(a_6 - 2a_7)V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 J/\psi$	$\sqrt{3}a_7' (V_{ud})^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 J/\psi$	$\sqrt{3}a_7' (V_{us})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$\sqrt{3}a_6' (V_{ud})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi$	$\sqrt{3}a_6' (V_{us})^*$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$\frac{(a_9 - a_{10})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-$	$\frac{a_9 V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^0 \bar{D}^0$	$(a_8 + a_{10}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^+ D^-$	$(a_8 + a_9) V_{ud}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^+ D_s^-$	$a_9 V_{us}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D_s^+ D_s^-$	$a_8 V_{ud}^*$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-$	$a_{10} V_{ud}^*$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$a_{10} V_{us}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow D^0 \bar{D}^0$	$(a_8 + a_{10}) V_{us}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow D^+ D^-$	$a_8 V_{us}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow D_s^+ D^-$	$a_9 V_{ud}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow D_s^+ D_s^-$	$(a_8 + a_9) V_{us}^*$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$\frac{(a_9 + a_{10})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-$	$\frac{(a_9 - 2a_{10})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$\sqrt{3}a_8' (V_{ud})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-$	$\sqrt{3}a_8' (V_{us})^*$
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- \pi^-$	$2(a_{14} + a_{15}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^-$	$(a_{14} + a_{15}) V_{us}^*$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \pi^-$	$(a_{14} + a_{15}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-$	$\frac{1}{2}(a_{12} + 2a_{14} + a_{15}) V_{us}^*$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$	$\frac{(a_{12} - a_{15})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8$	$\frac{(a_{12} - a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{3}}$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$\frac{(a_{12} - a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8$	$\frac{(a_{15} - a_{12})V_{us}^*}{2\sqrt{3}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$(2a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ K^-$	$(a_{12} + a_{14}) V_{us}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$(2a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{15}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$	$\frac{(a_{15} - a_{12})V_{us}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_8$	$\frac{(a_{13} - a_{12})V_{ud}^*}{\sqrt{3}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^+ K^-$	$(2a_{11} + a_{13}) V_{ud}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$(2a_{11} + a_{12}) V_{ud}^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \eta_8$	$\frac{(a_{15} - a_{12})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_8$	$\frac{1}{3}(6a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{15}) V_{ud}^*$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^-$	$(a_{14} + a_{15}) V_{ud}^*$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- K^-$	$2(a_{14} + a_{15}) V_{us}^*$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-$	$\frac{(a_{13} - a_{15})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$	$(a_{13} + a_{14}) V_{ud}^*$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 K^-$	$(a_{14} + a_{15}) V_{us}^*$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8$	$\frac{(a_{15} - a_{13})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^0$	$(a_{14} + a_{15}) V_{ud}^*$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^+ \eta_8$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(a_{13} - a_{15}) V_{us}^*$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$(a_{13} + a_{14}) V_{us}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$(2a_{11} + a_{13}) V_{us}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$(2a_{11} + a_{13}) V_{us}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^0$	$\frac{(a_{15} - a_{12})V_{ud}^*}{\sqrt{2}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_8$	$\frac{(a_{13} - a_{15})V_{us}^*}{\sqrt{3}}$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^+$	$(a_{12} + a_{14}) V_{ud}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ K^-$	$(2a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}) V_{us}^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$(2a_{11} + a_{12}) V_{us}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \eta_8$	$\frac{(a_{15} - a_{12})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_8$	$\frac{1}{3}(6a_{11} + 4a_{12} + a_{13} - 2a_{15}) V_{us}^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-$	$\frac{(a_{12} - 2a_{13} + a_{15})V_{us}^*}{2\sqrt{3}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$	$\frac{(a_{12} - 2a_{13} + a_{15})V_{us}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8$	$\frac{1}{3}(a_{12} + a_{13} + 3a_{14} + a_{15}) V_{ud}^*$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$\frac{(a_{12} + a_{13} - 2a_{15})V_{ud}^*}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8$	$\frac{1}{6}(-a_{12} + 2a_{13} + 6a_{14} + 5a_{15}) V_{us}^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(a_{13}' - a_{14}') (V_{ud})^*$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \eta_1$	$\sqrt{3}a_{14}' (V_{us})^*$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_1$	$\frac{(a_{13}' + a_{14}') (V_{ud})^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \eta_1$	$2(a_{13}' + a_{14}' + 3a_{15}') (V_{ud})^*$
$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(a_{14}' - a_{13}') (V_{ud})^*$	$T_{\pi^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}a_{14}' (V_{us})^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}a_{13}' (V_{us})^*$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \eta_1$	$\sqrt{3}a_{14}' (V_{ud})^*$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_1$	$\frac{(a_{13}' - 2a_{14}') (V_{us})^*}{\sqrt{2}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \eta_1$	$2(a_{13}' + a_{14}' + 3a_{15}') (V_{us})^*$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$	$\sqrt{3}a_{13}' (V_{us})^*$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1$	$\sqrt{3}a_{13}' (V_{ud})^*$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$	$\frac{(a_{13}' + a_{14}') (V_{ud})^*}{\sqrt{2}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1$	$\frac{(a_{14}' - 2a_{13}') (V_{us})^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^0 K^-$	$\sqrt{\frac{3}{2}}a_{11}' (V_{us})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$	$\sqrt{3}a_{11}' (V_{us})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8$	$\sqrt{2}a_{11}' (V_{ud})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$	$(2a_{11}' + 3a_{12}' + a_{13}' + a_{14}') (V_{ud})^*$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$\sqrt{3}a_{11}' (V_{ud})^*$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_8$	$-\frac{a_{11}' (V_{us})^*}{\sqrt{2}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1$	$(2a_{11}' + 3a_{12}' + a_{13}' + a_{14}') (V_{us})^*$		

表 2.27 双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变到 B 介子与轻介子的衰变振幅。Tab 2.27 Tetraquark $T_{b\bar{c}8}/T_{b\bar{c}1}$ decays into a B meson and light meson.

channel	amplitude	channel	amplitude
$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$-\frac{f_4+f_6+f_8-f_{10}}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$	$-\frac{f_5+f_6-f_9+f_{10}}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow B^- K^+$	$-f_3 - f_6 + f_7 + f_{10}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^0$	$-f_3 - f_4 + f_7 + f_8$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^0$	$\frac{f_5+f_6-f_9+f_{10}}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_8$	$\frac{(2f_3-f_5+f_6-2f_7+f_9+f_{10})}{\sqrt{6}}$
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^-$	$f_4 + f_5 + f_8 + f_9$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0$	$\frac{f_3-f_5+f_7-f_9}{\sqrt{2}}$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8$	$\frac{f_3+f_5+2f_6+f_7+f_9-2f_{10}}{\sqrt{6}}$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$f_3 + f_4 + f_7 + f_8$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$f_3 + f_6 + f_7 + f_{10}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^0$	$-f_4 - f_5 + f_8 + f_9$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$-\frac{f_4+2f_5+f_6-f_8+2f_9-f_{10}}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$	$-\frac{2f_4-f_5+f_6-2f_8+f_9+f_{10}}{\sqrt{6}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_1$	$\sqrt{3}(f'_6 - f'_4)$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1$	$\sqrt{3}(f'_4 + f'_6)$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$\sqrt{3}(f'_5 - f'_3)$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$	$\sqrt{3}(f'_3 + f'_5)$
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^-$	$(f_4 + f_5 + f_8 + f_9) (-sC)$	$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0$	$\frac{(f_3-f_4-f_5+f_6+f_7+f_8-f_9-f_{10})sC}{2}$
$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8$	$\frac{(f_3+3f_4+f_5-f_6+f_7-3f_8+f_9+f_{10})sC}{2\sqrt{3}}$	$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$\frac{(f_3+f_4+f_5+f_6+f_7+f_8-f_9+f_{10})sC}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$\frac{(f_3-f_5+f_7+f_9)sC}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^+$	$(f_3 + f_6 - f_7 - f_{10}) sC$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^0$	$-\frac{(f_3+f_4+f_5+f_6-f_7-f_8-f_9+f_{10})sC}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \eta_8$	$\frac{(f_3+3f_4+f_5-f_6-f_7-3f_8-f_9-f_{10})sC}{\sqrt{6}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^0$	$(f_3 - f_5 - f_7 + f_9) sC$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- K^-$	$(f_4 + f_5 + f_8 + f_9) sC$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \bar{K}^0$	$(f_5 + f_6 + f_9 - f_{10}) sC$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^-$	$(f_4 - f_6 + f_8 - f_{10}) sC$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$(f_5 + f_6 + f_9 - f_{10}) (-sC)$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$	$(f_4 - f_6 + f_8 - f_{10}) (-sC)$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow B^- K^+$	$(f_3 + f_6 - f_7 - f_{10}) (-sC)$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^0$	$(f_3 - f_5 - f_7 + f_9) (-sC)$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^0$	$\frac{(-f_4+f_6+f_8+f_{10})sC}{\sqrt{2}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_8$	$\frac{(2f_3+3f_4+2f_5+f_6-2f_7-3f_8-2f_9+f_{10})sC}{\sqrt{6}}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0$	$-\frac{(3f_3+f_4-f_5+f_6+3f_7-f_8-f_9-f_{10})sC}{2\sqrt{3}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8$	$-\frac{(f_3-f_4-f_5+f_6+f_7+f_8-f_9-f_{10})sC}{2}$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$-\frac{(3f_3+f_4-f_5+f_6+3f_7+f_8+f_9+f_{10})sC}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$-\frac{(3f_3+2f_4+f_5+2f_6+3f_7+2f_8-f_9+2f_{10})sC}{\sqrt{6}}$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \eta_1$	$\sqrt{3}(f'_4 - f'_6) sC$	$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(f'_4 + f'_6) sC$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_1$	$\sqrt{3}(f'_6 - f'_4) sC$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1$	$-\frac{3(f'_4+f'_6)sC}{\sqrt{2}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(f'_3 - f'_5) sC$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8$	$\frac{3(f'_3-f'_5)sC}{\sqrt{2}}$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$-\sqrt{3}(f'_3 + f'_5) sC$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$\sqrt{3}(f'_3 + f'_5) sC$
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow B^- K^-$	$(f_4 + f_5 + f_8 + f_9) sC^2$	$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- \bar{K}^0$	$-\frac{(f_4+f_5-f_8+f_9)sC^2}{\sqrt{2}}$
$T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^-$	$-\frac{(f_4+f_5+f_8-f_9)sC^2}{\sqrt{2}}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \bar{K}^0$	$(f_4 + f_5 - f_8 - f_9) (-sC^2)$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0$	$\frac{(f_3+f_6+f_7-f_{10})sC^2}{\sqrt{2}}$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8$	$\frac{(f_3-2f_5-f_6+f_7-2f_9+f_{10})sC^2}{\sqrt{6}}$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$(f_3 + f_6 + f_7 + f_{10}) sC^2$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$(f_3 + f_4 + f_7 + f_8) sC^2$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^+$	$(f_3 + f_6 - f_7 - f_{10}) (-sC^2)$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(f_3 + f_6 - f_7 + f_{10}) sC^2$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \eta_8$	$-\frac{(f_3-2f_5-f_6-f_7+2f_9-f_{10})sC^2}{\sqrt{6}}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^0$	$(f_3 + f_4 - f_7 - f_8) (-sC^2)$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \bar{K}^0$	$-\frac{(f_4-f_5-2f_6-f_8-f_9+2f_{10})sC^2}{\sqrt{6}}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^-$	$\frac{(f_4-f_5-2f_6+f_8+f_9-2f_{10})sC^2}{\sqrt{6}}$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \eta_1$	$-\sqrt{3}(f'_4 - f'_6) sC^2$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- \bar{K}^0$	$-\sqrt{3}(f'_3 - f'_5) sC^2$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^-$	$\sqrt{3}(f'_3 + f'_5) sC^2$		

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^+) &= \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow B^- K^+), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^0) = \Gamma(T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-), \\
\Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- K^0) &= \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow B^- \bar{K}^0), \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-) = \Gamma(T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^-), \\
\Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^0) &= \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^0), \Gamma(T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \eta_1) = \Gamma(T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_1), \\
\Gamma(T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1) &= 3\Gamma(T_{\pi_0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1), \Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_8) = 3\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^0), \\
\Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-) &= \Gamma(T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-).
\end{aligned}$$

2.5.6 黄金衰变道

我们利用SU(3)对称性的方法研究了双重味($bb, cc, bc, b\bar{c}$)-tetraquark的衰变, 根

表 2.28 Cabibbo 允许的双重味 $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ 衰变黄金道。Tab 2.28 Cabibbo allowed $T_{bb\bar{q}\bar{q}}$ decays. \bar{K}^0 can be replaced by vector meson \bar{K}^{*0} .

Two body decays				
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- J/\psi$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^0 B_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- \bar{D}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 D_s^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \Lambda_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Lambda_c^+ \Lambda_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \Sigma_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \Xi_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \Xi_c'^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_{bc}^+ \Sigma_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Xi_{bc}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Lambda_c^+ \Sigma_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c^- \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c^- \Xi_b'^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b'^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Sigma_c^- \Lambda_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_b^+$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_b^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c'^- \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Sigma_b^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c'^0 \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \Xi_c'^0 \Xi_b'^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{\Omega}_c^0 \Omega_b^-$				
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ B_c^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 J/\psi$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D_s^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 \bar{D}^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B_c^- \pi^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \Xi_{bc}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Xi_{bc}^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}'^- \Xi_{bc}^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \Xi_c^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^0 \bar{\Sigma}_c^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \Lambda_c^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ \Sigma_c^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \Xi_{bc}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}'^0 \Xi_{bc}^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_{bc}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_{bc}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Lambda_c^- \Sigma_b^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b'^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_b^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Sigma_b^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Lambda_b^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_b^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \Xi_c'^0$				
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D_s^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B_c^- \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Delta}^{--} \Xi_c^+$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Delta}^- \Xi_{bc}^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Omega_{bc}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}'^- \Omega_{bc}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{p} \Xi_{bc}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \Lambda_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Lambda_c^- \Xi_b^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_b^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Sigma_c^- \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Xi_b^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Sigma_c^- \Xi_b^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Xi_b'^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \Xi_c'^0 \Omega_b^-$				
Three body decays				
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}^0 \pi^- J/\psi$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 K^- J/\psi$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^+ \pi^- B_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D_s^+ K^- B_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D^0 K^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D_s^+ \pi^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0 \pi^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D^- \pi^+$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B^- D_s^- K^+$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}^0 \bar{D}^0 \pi^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D_s^- K^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{D}^0 K^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D^- \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B_c^- \pi^+ \pi^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B_c^- K^0 \bar{K}^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow B_c^- K^+ K^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^0 \bar{D}^0 B^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^0 D^- \bar{B}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^0 D_s^- \bar{B}_s^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D^+ D^- B^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{s}}^- \rightarrow D_s^+ D_s^- B^-$				
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- \pi^+ J/\psi$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{K}^0 J/\psi$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \pi^+ B_c^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0 B_c^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D^0 K^+$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- D^+ K^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0 K^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 D_s^+ \pi^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D^+ \pi^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D_s^+ K^-$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- \bar{D}^0 \pi^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 D^- \pi^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 D_s^- K^+$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{D}^0 \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 D_s^- \pi^+$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow B_c^- K^+ \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \bar{B}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ \bar{D}^0 B^-$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ D^- \bar{B}^0$	$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ D_s^- \bar{B}_s^0$
$T_{bb\bar{d}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ D_s^- \bar{B}^0$				
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- \bar{K}^0 J/\psi$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 K^- J/\psi$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^0 \bar{K}^0 B_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^+ K^- B_c^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D^+ \pi^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D_s^+ K^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D^0 \pi^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 D^0 K^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- \bar{D}^0 \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 \bar{D}^0 K^-$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}^0 D^- \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B^- D_s^- \pi^+$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{B}_s^0 D_s^- \bar{K}^0$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow B_c^- \pi^+ K^-$	$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^0 D_s^- \bar{B}^0$
$T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow D^+ D_s^- B^-$				

据 2.4.4 节的筛选规则，我们选择出双重味四夸克态的黄金衰变道以方便实验的探测。对于双重味 bb -tetraquark 的弱衰变过程，我们得到具有 Cabibbo 允许的黄金衰变道，见表格 2.28。重建末态 B 介子与底重子需要分支比的大小约为 10^{-3} ，而重建末态 J/ψ 或 D 介子或粲重子则需要分支比的大小为 10^{-2} ，衰变道如 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- \rightarrow \bar{p} \Xi_{bc}^0 (\rightarrow p \Sigma + B^-)$ 是重建双重味 bb -tetraquark 的一个很好的选择，重建该过程需要分支比的大小约为 10^{-6} 。

对于双重味 cc -tetraquark 的弱衰变过程，我们得到具有 Cabibbo 允许的黄金衰变道，见表格 2.29。粲夸克衰变的典型衰变分支比在百分之几左右，而重建末态粲介子需要额外的 10^{-3} 因子，因此重建双重味 cc -tetraquark 的分支比的大小在 10^{-4} 左右。

表 2.29 Cabibbo允许的双重味 $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ 衰变黄金道。Tab 2.29 Cabibbo allowed $T_{cc\bar{q}\bar{q}}$ decays. \bar{K}^0 can be replaced by vector meson \bar{K}^{*0} .

Two body decays				
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 l^+ \nu$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \pi^+$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0$		
$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^+ l^+ \nu$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^+ \pi^+$			
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+ \bar{K}^0$				
Three body decays				
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \pi^- l^+ \nu$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ K^- l^+ \nu$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 K^+ \bar{K}^0$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \pi^+ \pi^-$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^+ K^-$
$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^0 \bar{K}^0$	$T_{cc\bar{u}\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \pi^+ K^-$			
$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^0 \pi^+ l^+ \nu$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0 l^+ \nu$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^0 \pi^+ \pi^+$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D^+ K^+ \bar{K}^0$	$T_{cc\bar{d}\bar{s}}^{++} \rightarrow D_s^+ \pi^+ \bar{K}^0$
$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0 \bar{K}^0 l^+ \nu$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+ K^- l^+ \nu$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^0 \pi^+ \bar{K}^0$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D^+ \pi^+ K^-$	$T_{cc\bar{u}\bar{d}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0 \bar{K}^0$

对于双重味($bc, b\bar{c}$)-tetraquark的弱衰变过程，我们分别得到它们的衰变黄金衰变道，见表格 2.30与 2.31。粲夸克/反粲夸克衰变的典型衰变分支比在百分之几左右，而通常底夸克衰变的典型分支比在 10^{-3} 以下，所以双重味($bc, b\bar{c}$)-tetraquark的弱衰变以粲夸克/反粲夸克的衰变为主。

2.6 本章总结

本章我们利用轻夸克SU(3)对称性的方法，讨论了双重味重子的弱衰变与双重味四夸克态的质量及弱衰变过程。由于实验是通过多体衰变过程 $\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ K^- \pi^+ \pi^+$ 发现双粲味重子，因此我们着重讨论了双重味重子的多体弱衰变过程，并选择出具有Cabibbo允许的黄金衰变道以方便实验的探测。对于双重味tetraquark，我们首先通过Sakharov-Zeldovich公式计算了它们的质量谱，其中如 $T_{bb\bar{u}\bar{d}}^- (\mathbf{3})$ 在强相互作用下是可以稳定存在的。为了进一步研究双重味tetraquark的性质，我们基于SU(3)对称性的方法系统的研究了双重味tetraquark的半轻与非轻弱衰变过程，并推导出不同衰变道宽度的关系，最终我们筛选出双重味tetraquark的黄金衰变道，这些研究结果将为实验寻找与研究稳定的双重味强子提供帮助。

表 2.30 Cabibbo允许的双重味 $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ 衰变黄金道。Tab 2.30 Cabibbo allowed $T_{bc\bar{q}\bar{q}}$ decays. \bar{K}^0 can be replaced by vector meson \bar{K}^{*0} .

Two body decays (charm decays)				
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- l^+ \nu$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- \pi^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{K}^0$		
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{B}^0 l^+ \nu$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{B}^0 \pi^+$			
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 \bar{K}^0$				
Three body decays (charm decays)				
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 \pi^- l^+ \nu$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 K^- l^+ \nu$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow B^- K^+ \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 \pi^+ \pi^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 K^+ K^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 K^0 \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^+ K^-$			
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow B^- \pi^+ l^+ \nu$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{K}^0 l^+ \nu$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow B^- \pi^+ \pi^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{B}^0 K^+ \bar{K}^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^+ \bar{K}^0$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 K^- l^+ \nu$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow B^- \bar{K}^0 l^+ \nu$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow B^- \pi^+ \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{B}^0 \pi^+ K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{B}_s^0 \bar{K}^0 \bar{K}^0$
Two body decays (bottom decays)				
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 J/\psi$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{D}^0 D^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ D^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ D_s^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ \Lambda_c^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Lambda_c^- \Lambda_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_c^{\prime 0}$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^+ \Sigma_c^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Omega_c^+ \Xi_c^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Omega_c^+ \Xi_c^{\prime -}$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^+ \Sigma_c^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^- \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Lambda_c^- \Sigma_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^- \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^- \Xi_c^{\prime +}$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Xi_c^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Xi_c^{\prime 0}$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Lambda_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_c^{\prime +}$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime -} \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Sigma_c^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Xi_c^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime -} \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \bar{\Omega}_c^0 \Omega_c^0$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ J/\psi$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ D^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \bar{D}^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow J/\psi \pi^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Lambda}^0 \Xi_{cc}^+$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Omega_{cc}^+ \Xi_c^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Xi_{cc}^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}^{\prime -} \Xi_{cc}^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Omega_{cc}^+ \Xi_c^0$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \bar{\Sigma}_c^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^+ \Lambda_c^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^+ \Sigma_c^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \Xi_{cc}^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \Xi_{cc}^+$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_{cc}^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_{cc}^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Lambda_c^- \Sigma_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \Xi_c^+$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Sigma_c^- \Sigma_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Sigma_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Xi_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Lambda_c^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Xi_c^+$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ D_s^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow J/\psi \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 D^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Delta}^{\prime -} \Xi_{cc}^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Delta}^- \Xi_{cc}^+$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Omega_{cc}^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}^{\prime -} \Omega_{cc}^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{p} \Xi_{cc}^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ \Lambda_c^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Lambda_c^- \Xi_{cc}^+$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Xi_c^0 \Omega_c^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Xi_c^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Sigma_c^- \Xi_c^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \bar{\Sigma}_c^0 \Xi_c^0$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \Xi_c^{\prime 0} \Omega_c^0$				
Three body decays (bottom decays)				
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ \pi^- J/\psi$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ K^- J/\psi$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \bar{D}^0 D^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 D^- D^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \bar{D}^0 K^0$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 D_s^+ \pi^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 D^- \pi^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 D_s^- D_s^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 D_s^- K^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ \bar{D}^0 \pi^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ D_s^- K^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ \bar{D}^0 K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ D^- \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow J/\psi K^0 \bar{K}^0$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow J/\psi K^+ K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 \pi^+ \pi^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 K^+ K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^0 K^0 \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D^+ K^0 K^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow D_s^+ \pi^- \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^+ K^0 K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{s}}^0 \rightarrow \pi^- K^+ \bar{K}^0$		
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \pi^+ J/\psi$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{K}^0 J/\psi$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \bar{D}^0 D^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ D^- D^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 D^0 K^+$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 D^+ K^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ D_s^+ \pi^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ D_s^- D_s^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ D_s^+ K^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^+$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ D^- \pi^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ D_s^- K^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \bar{D}^0 \bar{K}^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ D_s^- \pi^+$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow J/\psi K^+ \bar{K}^0$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^0 K^+ \bar{K}^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ \pi^+ \pi^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^+ K^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D^+ K^0 \bar{K}^0$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow D_s^+ \pi^+ K^-$
$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ K^+ K^-$	$T_{bcd\bar{s}}^+ \rightarrow \pi^+ K^0 \bar{K}^0$		
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \bar{K}^0 J/\psi$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ K^- J/\psi$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 D_s^- D^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 D^+ \pi^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 D_s^+ K^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ \bar{D}^0 K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ D^- \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 D_s^- \pi^+$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D_s^+ D_s^- \bar{K}^0$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^0 \pi^+ K^-$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow D^+ \pi^- \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \bar{K}^0$	$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow K^+ \bar{K}^0 K^-$
$T_{bc\bar{u}\bar{d}}^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0 \bar{K}^0$				

表 2.31 Cabibbo允许的双重味 $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ 衰变黄金道。Tab 2.31 Cabibbo allowed $T_{b\bar{c}q\bar{q}'}$ decays. \bar{K}^0 can be replaced by vector meson \bar{K}^{*0} .

Two body decays (charm decays)				
$T_{\pi_0^{Bc}} \rightarrow B^- K^0$	$T_{\pi_0^{Bc}} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$			
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow B^- K^+$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 K^0$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \eta_1$		
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- l^- \bar{\nu}$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow B^- \pi^-$			
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}^0 \pi^-$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^-$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow B^- \eta_1$	
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 K^0$				
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$		
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow B^- K^0$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{B}_s^0 \pi^-$		
Two body decays (bottom decays)				
$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- l^- \bar{\nu}$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- D_s^-$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow K^- D^-$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- \pi^-$	$T_{\pi^-}^{Bc} \rightarrow D^- D_s^-$
$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow \pi_0^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$
$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 D_s^-$	$T_{\pi_0^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$		
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D_s^-$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 \bar{D}^0$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^0 \bar{D}^0$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D^+ D^-$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow D_s^+ D_s^-$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^+ K^-$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 J/\psi$
$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \pi^0 \eta_1$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_8 \eta_1$	$T_{\pi^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \eta_1$		
$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- l^- \bar{\nu}$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow K^- D_s^-$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^-$	$T_{K^-}^{Bc} \rightarrow D_s^- D_s^-$	
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^- J/\psi$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D_s^-$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow D^0 D_s^-$	$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$
$T_{\bar{K}^0}^{Bc} \rightarrow K^- \eta_1$				
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 l^- \bar{\nu}$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow D^- J/\psi$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- \bar{D}^0$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow K^0 D_s^-$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^0$
$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 D^-$	$T_{K^0}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D^-$			
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ l^- \bar{\nu}$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 J/\psi$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 J/\psi$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^+ D^-$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^+ D_s^-$
$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow D_s^+ D^-$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \pi^- K^+$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 \bar{D}^0$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow \eta_1 \bar{D}^0$	$T_{K^+}^{Bc} \rightarrow K^0 \eta_1$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_8 l^- \bar{\nu}$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$
$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 D_s^-$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-$	$T_{\eta_8}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_1 l^- \bar{\nu}$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow J/\psi l^- \bar{\nu}$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{K}^0 D^-$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^- \bar{D}^0$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_8 D_s^-$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \eta_1 D_s^-$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D_s^- J/\psi$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- J/\psi$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow D^0 D^-$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_8$
$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow K^0 K^-$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \bar{D}^0 D_s^-$	$T_{\eta_1}^{Bc} \rightarrow \pi^- \eta_1$		

第三章 QCD 因子化

在粒子物理中，因子化是研究强子QCD的一个重要手段。由于强相互作用在低能与高能区域具有截然不同的效应：低能区域的色紧闭效应以及高能区域的渐进自由的特点，因此强子的QCD过程可以分为低能非微扰与高能微扰的两部分。为了实现强子QCD过程的微扰计算，Collins、Soper和Sterman等人基于对高能强子散射过程的分析而提出了因子化 [61, 62]，因子化的一般思想就是分离散射过程中的微扰部分与非微扰部分，并将散射过程（夸克-胶子层次）中的红外发散吸收到非微扰的强子分布函数中，而其余部分则放到微扰的硬散射核中。非微扰效应的强子分布函数可以从实验抽取或通过其他非微扰途径获得，微扰部分则可以直接利用微扰理论来计算。除此之外因子化还需要引入一个因子化标度用来分离微扰与非微扰部分，而最终的散射振幅需要保证微扰与非微扰部分的标度依赖性相互抵消，从而使物理的截面不依赖于因子化标度的选取。

目前常见的QCD因子化如共线因子化与 k_T 因子化，它们已经广泛应用于各类强子QCD过程的计算。如基于共线因子化的QCD因子化方法（QCDF） [14, 15] 成功应用于研究重味强子的衰变过程，基于 k_T 因子化的微扰QCD方法（PQCD）则很好的应用于 B 介子的非轻遍举过程。本章我们将利用 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程分别对共线因子化与 k_T 因子化进行介绍。

3.1 共线因子化

在强子的QCD过程中，夸克-胶子层次的衰变/散射中通常会存在两种红外发散：软发散与共线发散。根据Kinoshita-Lee-Nauenberg（KLN）定理 [63]，软发散可以由费曼图的求和而相互抵消。但是由于描述非微扰效应的强子分布函数可能包含多个共线的物理夸克或胶子，因此共线发散需要吸收到强子的非微扰分布函数中。最终强子QCD过程的因子化公式表示为红外有限的微扰部分与包含共线发散的强子分布函数的卷积，其中微扰部分可以直接在QCD微扰理论下计算，而强子的分布函数尽管是不可计算的，但却是普适的与过程无关的量，可以通过QCD求和规则、格点QCD或从实验中抽取。目前共线因子化已经取得广泛的应用，其中描述非微扰的部分如：部分子分布函数、喷注函数、碎裂函数等都已经得到了详细的研究。基于共线因子化思想已经发展出许多计算强子QCD的理论方法：QCDF因子化方法（QCDF）、软共线有效理论（SCET）等，这些因子化方法在强子的QCD过程中都取

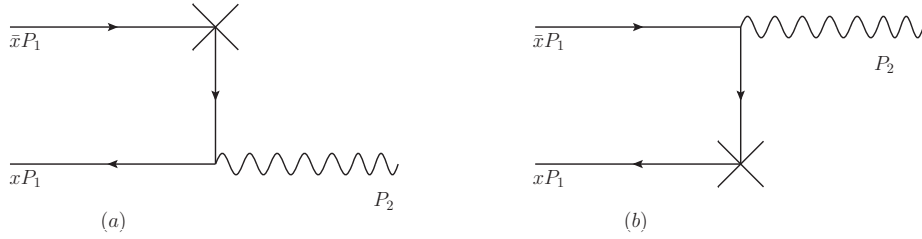


图 3.1 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 的最低阶费曼图，这里的 \times 表示虚光子(弱衰变)顶点，两个图分别用(a,b)标记。
Fig 3.1 Lowest-order diagrams for $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$, where the symbol \times represents the virtual photon (weak decay) vertex. The two diagrams are labeled as (a,b).

得了很大的成功。

将共线因子化应用于强子QCD过程时，我们首先要将强子QCD过程中的动量、自旋与颜色空间分别分离，并在不同空间中分别对它进行因子化，在动量空间的因子化意味着软胶子或者共线胶子会被吸收到分布函数中。在自旋与颜色空间的因子化意味着在硬核与分布函数之间有各自分离的味道与颜色结构。对动量空间中软胶子或共线胶子与硬核部分的分离可以通过应用eikonal 近似来实现，费米子流的味道、颜色的分离可以通过插入Fierz恒等式（Fierz恒等式可以将完整的振幅分解为不同扭度的分布振幅）来实现。此外利用ward恒等式对不同颜色结构求和，我们最终实现强子QCD过程的非微扰部分与微扰部分的分离。

以 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程为例，该过程的领头阶具有两个费曼图，见图 3.1。为了方便讨论我们采用光锥坐标系 $(x_\mu = (x^+, x^-, x_T), x^\pm = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}, x_T = (x_1, x_2))$ ，并分别选取pion 介子的动量 P_1 与末态光子的动量 P_2 为

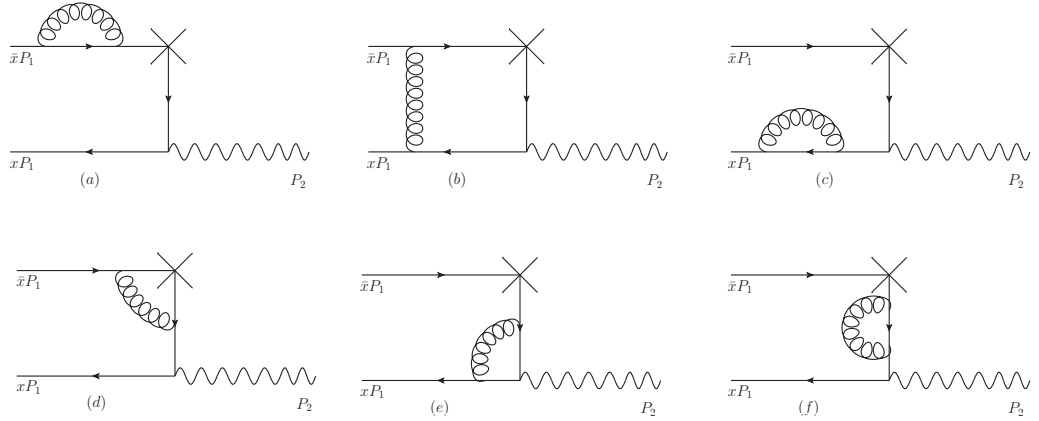
$$P_1 = (P_1^+, 0, 0_T) = \frac{Q}{\sqrt{2}}(1, 0, 0_T), P_2 = (0, P_2^-, 0_T) = \frac{Q}{\sqrt{2}}(0, 1, 0_T). \quad (3.1)$$

末态光子的极化矢量为 ϵ 。为了保证微扰展开的合理性，我们考虑虚光子在动量为 $Q^2 = -q^2, q = P_2 - P_1$ 的区域中运动。

假定在壳的夸克与反夸克携带的动量分数分别为 $\bar{x}P_1$ 与 xP_1 ，这里 $\bar{x} = 1 - x$ 。从图 3.1(a,b) 中，我们可以得到 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程的领头阶的振幅

$$\begin{aligned} A_a^{(0)}(x) &= -ie^2 \bar{q}(xP_1) \not{\epsilon} \frac{\not{P}_2 - x\not{P}_1}{(P_2 - xP_1)^2} \gamma_\mu q(\bar{x}P_1), \\ A_b^{(0)}(x) &= -ie^2 \bar{q}(xP_1) \gamma_\mu \frac{x\not{P}_1 - \not{P}_2}{(xP_1 - P_2)^2} \not{\epsilon} q(\bar{x}P_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

内线夸克的动量 k 在硬区间（硬区间的动量 $l^\mu \sim Q(1, 1, 1)$ ）内， $k = P_2 - xP_1 = \frac{Q}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0_T)$ 。

图 3.2 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 的单圈阶费曼图, 依次标记为(a-f)。Fig 3.2 One-loop order diagrams for $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$, which labeled as (a-f).

在等式 (3.2)(a)中我们插入Fierz恒等式以分离费米子流, Fierz恒等式为

$$I_{ij}I_{lk} = \frac{1}{4}I_{ik}I_{lj} + \frac{1}{4}(\gamma_5)_{ik}(\gamma_5)_{lj} + \frac{1}{4}(\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma^\alpha)_{lj} + \frac{1}{4}(\gamma_5\gamma_\alpha)_{ik}(\gamma_5\gamma^\alpha)_{lj} + \frac{1}{8}(\sigma_{\alpha\beta})_{ik}(\sigma^{\alpha\beta})_{lj}, \quad (3.3)$$

其中 I 表示单位矩阵, $\sigma_{\alpha\beta}$ 的定义为 $\sigma_{\alpha\beta} \equiv [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]/2$ 。我们可以形式化地写出 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程领头阶的因子化公式如下

$$A_a^{(0)}(x) = \int d\xi \phi^{(0)}(x, \xi) \mathcal{H}^{(0)}(\xi), \quad (3.4)$$

定义波函数 $\phi^{(0)}$ 与散射硬核 $\mathcal{H}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(x, \xi) &= \phi^{(0)}(x)\delta(x - \xi), \quad \phi^{(0)}(x) = \frac{1}{4P_1^+} \bar{q}(xP_1)\gamma_5 \not{n} q(\bar{x}P_1), \\ \mathcal{H}^{(0)}(x) &= ie^2 \frac{\text{Tr}(\not{\epsilon} \not{P}_2 \gamma_\mu \not{P}_1 \gamma_5)}{2xP_1 \cdot P_2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中光锥矢量 $\bar{n} = (0, 1, 0_T)$ 。在得到上述因子化公式前, 我们应用了等式 (3.1), 并对 $\phi^{(0)}(x)$ 与 $\mathcal{H}^{(0)}(x)$ 进行了化简。在领头阶计算中, $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 的波函数中仅有赝矢量 $\gamma_+\gamma_5$ 定义分布振幅的贡献不为零, 它与硬核中的因子收缩得到 $(P_{1\gamma_5}/P_1^+)$ 。值得注意的是, 在 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程中只有领头阶的分布振幅具有贡献, 而对于其他强子QCD过程, 如计算pion介子的形状因子, 高扭度的分布振幅也会被保留, 但是因子化的过程都是相似的。

$\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程领头阶的因子化是直接的, 我们考虑其单圈辐射修正 [64]的因子化。相关费曼图如图 3.2。首先我们形式化的写出 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程单圈辐射修正的因子

化公式

$$A^{(1)}(x) = \sum_{i=a}^e A_i^{(1)}(x),$$

$$A_i^{(1)}(x) = \int d\xi \phi_i^{(1)}(x, \xi) \mathcal{H}^{(0)}(\xi) + \phi^{(0)} \mathcal{H}_i^{(1)}(x), \quad (3.6)$$

其中 $\phi_i^{(1)}(x, \xi)$ 表示 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的分布振幅， $\mathcal{H}_i^{(1)}(x)$ 表示 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的硬散射核。图 3.2(a-e)会贡献到 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的分布振幅中，而图 3.2(f)会贡献到 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的硬散射核中（本文我们将只考虑含有次领头阶分布振幅过程的因子化）。

次领头阶过程的圈动量分别在软区域与共线区域时

$$l^\mu = (l^+, l^-, l_T) \sim Q(\lambda, \lambda, \lambda), \quad l^\mu \sim Q(1, \lambda^2, \lambda), \quad (3.7)$$

这里 λ 是一个小的参数。两个区域的圈动量的不变质量为 λ^2 ，因此对圈动量积分时会出现发散 $d^4l \sim \lambda^4$ ，它们分别对应于软发散与共线发散。图 3.2(a-c)表示两粒子的可约图，其中一个胶子连接到pion介子的价夸克上。考虑圈动量 l 在软区域内，对三个图的计算表明，(b)图的软发散可以与(a,c)图相互抵消。此外由于内线夸克是离壳的，所以对于胶子连接到内线夸克的图 3.2(d,e)也不会产生软发散，因此在公式(3.6)中第一项的因子化振幅不产生软发散问题。与软发散的情况不同，共线发散通常是不能够相互抵消的。当我们考虑圈动量 l 在共线区域的时候，图 3.2(a-c)的振幅都是发散，因为图 3.2(b)的圈动量 l 流入内线夸克 k ，而图 3.2(a,c)的圈动量 l 则与内线夸克 k 无关，因此这三个图的共线发散不能够相互抵消。一般来说共线发散是由于夸克与胶子共线而导致的，通常我们可以将共线发散形式化的吸收到非微扰的分布振幅中。

我们对图 3.2(a-c)应用因子化。在协变规范下 $\partial \cdot A = 0$ ，以图(b)为例，其圈积分为

$$A_b^{(1)} = e^2 g^2 C_F \sqrt{\frac{N_c}{2}} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} \bar{q}(xP_1) \left[\frac{\gamma_\nu (x\not{P}_1 - \not{l}) \not{\epsilon} (\not{P}_2 - x\not{P}_1 + \not{l}) \gamma_\mu}{(xP_1 - l)^2 (P_2 - xP_1 + l)^2} \right. \\ \left. \frac{((1-x)\not{P}_1 + \not{l}) \gamma^\nu \not{P}_1 \gamma_5}{((1-x)P_1 + l)^2} \right] q(\bar{x}P_1), \quad (3.8)$$

在上式中插入Fierz恒等式得到

$$A_b^{(1)} = ig^2 C_F \bar{q}(xP_1) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} \left[\frac{\gamma_\nu (x\not{P}_1 - \not{l}) \gamma_5 \gamma_\alpha (\bar{x}\not{P}_1 + \not{l}) \gamma^\nu \gamma^- \gamma_5}{2(xP_1 - l)^2 2(\bar{x}P_1 + l)^2} \right] q(\bar{x}P_1) \\ \times (-ie^2) \sqrt{\frac{N_c}{2}} \frac{\text{Tr}(\not{\epsilon} - x\not{P}_1 + \not{l}) \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma_5 P_1^+}{(P_2 - xP_1 + l)^2}$$

$$\approx \phi_b^{(1)}(x, \xi) \mathcal{H}_b^{(0)}(\xi), \quad (3.9)$$

在共线区域中, 其中 γ_α 与 γ^α 只能取 γ_- 与 γ^- 分量。我们将圈积分等式(3.9)写成因子化公式(等式(3.6))的形式, 其中硬核部分 $\mathcal{H}_b^{(0)}$ 只依赖于圈动量 l 的小分量 l^- 与 l_T , 所以可以被忽略。(b)图的 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的分布振幅 $\phi_b^{(1)}(x, \xi)$ 是

$$\phi_b^{(1)}(x, \xi) = \frac{ig^2 C_F}{4P_1^+} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \bar{q}(xP_1) \frac{\gamma^\nu (xP_1 - l) \gamma^5 \bar{n} (\bar{x}P_1 + l) \gamma_\nu}{(xP_1 - l)^2 (\bar{x}P_1 + l)^2 l^2} q(\bar{x}P_1) \delta(\xi - x + \frac{l^+}{P_1^+}), \quad (3.10)$$

$\phi_b^{(1)}(x, \xi)$ 中包含了图 3.2(b)振幅的共线发散。

我们对图 3.2(d,e)应用因子化, 图(b)的圈积分为

$$A_d^{(1)} = -e^2 g^2 C_F \sqrt{\frac{N_c}{2}} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} \bar{q}(xP_1) \left[\frac{\not{\epsilon}(P_2 - xP_1) \gamma_\nu (P_2 - xP_1 + l) \gamma_\mu}{(xP_1 - P_2)^2 (P_2 - xP_1 + l)^2} \frac{(\bar{x}P_1 + l) \gamma^\nu P_1 \gamma_5}{(\bar{x}P_1 + l)^2} \right] q(\bar{x}P_1), \quad (3.11)$$

其中内线夸克传播子可以化简为

$$\frac{2P_2^\nu}{(P_2 - xP_1)^2 (P_2 - xP_1 + l)^2} \approx \frac{\bar{n}^\nu}{\bar{n} \cdot l} \left[\frac{1}{(P_2 - xP_1)^2} - \frac{1}{(P_2 - xP_1 + l)^2} \right], \quad (3.12)$$

P_2^- 、 l^- 与 l_T 是小分量因此可以忽略, 传播子的分子来自于 $(P_2 - xP_1) \gamma^\nu (P_2 - xP_1 + l) \approx 2P_2^\nu P_2^-$ 。从等式(3.12)的结果我们可以看到, 在共线区域中, 对传播子的化简会产生Wilson线 $(\bar{n}^\nu / \bar{n} \cdot l)$, 其中动量空间的Wilson线表示如下

$$-ig \int_0^\infty \exp[iz(\bar{n} \cdot l + i\epsilon)] \bar{n} A(l) = g \frac{\bar{n}^\nu}{\bar{n} \cdot l} A_\nu(l), \quad (3.13)$$

我们将圈积分中的硬核部分与分布振幅部分分离

$$A_d^{(1)} = -e^2 \sqrt{\frac{N_c}{2}} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(1 - \frac{(P_2 - xP_1)^2}{(P_2 - xP_1 + l)^2} \right) \times g^2 C_F \frac{1}{l^2} \frac{\bar{n}_\nu}{\bar{n} \cdot l} \bar{q}(xP_1) \left[\frac{\not{\epsilon}(P_2 - xP_1) \gamma_\nu (\bar{x}P_1 + l) \gamma^\nu P_1 \gamma_5}{(\bar{x}P_1 + l)^2} \right] q(\bar{x}P_1), \quad (3.14)$$

从中可以抽取出 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 的分布振幅

$$\phi_d^{(1)}(x, \xi) = \frac{-ig^2 C_F}{4P_1^+} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \bar{q}(xP_1) \gamma^5 \bar{n} \frac{\bar{x}P_1 + l}{(\bar{x}P_1 + l)^2} \gamma_\nu q(\bar{x}P_1) \frac{1}{l^2} \frac{\bar{n}^\nu}{\bar{n} \cdot l} \times (\delta(\xi - x) - \delta(\xi - x + \frac{l^+}{P_1^+})), \quad (3.15)$$

其中 δ 函数分别与等式 (3.12) 右边的第一与第二项相关。

对比等式 (3.10)-(3.15)，我们可以发现上述 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶的分布振幅可以用规范不变的、非定域的算符矩阵元来重新定义

$$\phi(x, \xi) = i \int \frac{dy^-}{2\pi} e^{-i\xi P_1^+ y^-} \langle 0 | \bar{q}(y^-) \gamma_5 \not{n} \mathcal{P} \exp \left[-ig \int_0^{y^-} dz \bar{n} \cdot A(z \bar{n}) \right] q(0) | \bar{q}(x P_1) q(\bar{x} P_1) \rangle. \quad (3.16)$$

\mathcal{P} 表示Wilson线的路径顺序，Wilson线中对 z 的积分包含两部分： z 从0到 ∞ ，积分会产生等式 (3.15) 右边的第一项Delta函数； z 从 ∞ 到 y^- ，积分产生等式 (3.15) 右边的第二项Delta函数。因此容易验证分布振幅的定义（等式 (3.16)）与因子化公式（等式 (3.6)）中的定义一致，由于共线发散都被吸收到分布振幅中，所以硬散射核部分是红外有限的。

至此我们证明了 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程的次领头阶的因子化。关于 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 因子化的所有阶证明，可以从部分子分布振幅的定义 (3.16) 式出发，在动量、自旋与颜色空间分别进行因子化。其中我们可以应用Ward 恒等式来简化相关的运算过程

$$l_\mu G^\mu(l, k_1, k_2, \dots, k_n) = 0, \quad (3.17)$$

G^μ 表示一个具有动量为 l 的外腿胶子及 n 个动量分别为 k_1, k_2, \dots, k_n 的外腿夸克构成的物理振幅，其中所有的外腿粒子都是在壳的。我们应用BRST(Becchi-Rouet-Stora transformation)就可以得到非阿贝尔场的Ward恒等式。 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程所有阶因子化的证明参考文献 [65, 66]。

3.2 k_T 因子化

共线因子化目前已经成功运用到许多强子的遍举、单举过程，但是对于某些强子QCD过程来说，如 $B \rightarrow \pi$ 的形状因子 [67, 68]，共线因子化并不能很好的应用于所有的运动学区域。由于共线因子化中忽略了强子内部的横向动量，当强子中夸克（胶子）的动量分数趋近端点 $x \rightarrow 0$ 时，共线因子化会出现端点发散的问题，因此一种保留了强子内部横向动量的因子化被提出 k_T 因子化 [69, 70]。对于强子的单举过程，如深度非弹性散射(DIS)，假如强子的动量为 p ，虚光子的动量为 q ，那么在共线因子化与 k_T 因子化中，它的截面均可以表示为一个硬散射核与强子分布振幅的卷积形式。在共线因子化中强子的分布振幅以部分子的纵向动量分数 x 为参数，而在 k_T 因子化中分布振幅不仅依赖于纵向动量分数 x 还依赖于横向动量 k_T 。我们考虑Bjorken变量 $x_B = -q^2/(2p \cdot q)$ ，当 x_B 是小量且 $x \geq x_B$ 时，部分子的横向动量 k_T 将

与其纵向动量 xp 处于相同的幂次大小,因此我们不能简单的将横向动量忽略。在强子的遍举过程中,如 $B \rightarrow \pi l \nu$ 过程[71],由于强子中夸克(胶子)的动量分数 x 不是实验可控量,所以我们需要对动量分数从0到1进行积分。当积分在端点处无奇异性时,共线因子化与 k_T 因子化都可以良好的应用。但是当积分在 x 趋近端点产生发散时,共线因子化就会被破坏,而 k_T 因子化因为保留了对横向动量 k_T 的依赖,所以会将由共线胶子产生的共线发散正则化 $\ln k_T^2$,因此它可以有效的避免端点发散的行为。

为了与共线因子化相对比,我们考虑 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程的 k_T 因子化,其中初态 π 介子与末态光子的动量分别为 P_1 与 P_2 。在不忽略夸克(胶子)的横向动量时,我们直接写出它的因子化公式如下

$$A_i^{(0,1)}(x) = \int d\xi \frac{d^2b}{(2\pi)^2} \Phi_i^{(0)}(x, \xi, b) H^{(0)}(\xi, b) + \Phi_i^{(1)}(x, \xi, b) H^{(0)}(\xi, b) + \Phi_i^{(0)}(x, \xi, b) H^{(1)}(\xi, b), \quad (3.18)$$

上式中 b 为横向动量 k_T 的傅里叶变换参数, $\Phi_i^{(0,1)}(x, \xi, b)$ 与 $H_i^{(0,1)}(\xi, b)$ 分别为领头阶/次领头阶的波函数与散射硬核,其中波函数依赖于动量分数 ξ 及 b ,而硬核部分 $H_i^{(0,1)}(x)$ 是红外有限并且可以微扰计算的。

$\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程领头阶(费曼图如图3.1,因子化公式见等式(3.18)第一项)的 k_T 因子化是直接的。我们考虑该过程的次领头阶(费曼图见图3.2,因子化公式见等式(3.18)后两项)因子化,由于图3.2(a,c)的圈动量与内线夸克 k 无关,因此它们的因子化公式与其在共线因子化下的结果相同,我们不做重复的讨论。在 k_T 因子化下,图3.2(b,d)则具有新的因子化形式

$$\begin{aligned} \Phi_b^{(1)}(x, \xi, b) &= \frac{ig^2 C_F}{4P_1^+} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{q}(xP_1) \frac{\gamma^\nu(xP_1 - l) \gamma^5 \not{n}(\bar{x}P_1 + l) \gamma_\nu}{(xP_1 - l)^2 (\bar{P}_1 + l)^2 l^2} q(\bar{x}P_1) \\ &\quad \times \delta(\xi - x + \frac{l^+}{P_1^+}) e^{-il_T \cdot b}, \\ \Phi_d^{(1)}(x, \xi, b) &= \frac{-ig^2 C_F}{4P_1^+} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{q}(xP_1) \frac{\gamma^5 \not{n}(\bar{x}P_1 + l) \gamma_\nu \bar{n}^\nu}{(\bar{x}P_1 + l)^2 (\bar{n} \cdot l) l^2} q(\bar{x}P_1) \\ &\quad \times [\delta(\xi - x) - \delta(\xi - x + \frac{l^+}{P_1^+}) e^{-il_T \cdot b}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

与共线因子化的公式(等式(3.10))相对比,我们发现在 k_T 因子化公式中新引入了因子 $\text{Exp}(-il_T \cdot b)$,其中 l_T 表示流入硬核的圈动量。当圈动量 l 处于软区域中, $\text{Exp}(-il_T \cdot b) \sim 1$, $l^+/P_1^+ \sim 0$,于是等式(3.19)(d)中的两个发散项可以相互抵消,同样我们也可以证明图3.2(e)中不存在软发散。此外图3.2(a-c)中软发散可以相互抵消。因此 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 的次领头阶振幅不会产生软发散问题。

根据对 $\pi\gamma^* \rightarrow \gamma$ 过程的 k_T 因子化的讨论, 我们同样在夸克-胶子层次上定义出强子的波函数

$$\Phi(x, \xi, b) = i \int \frac{dy^-}{2\pi} e^{-i\xi P_1^+ y^-} \langle 0 | \bar{q}(y) \gamma_5 \not{n} \mathcal{P} \exp[-ig \int_0^y ds \cdot A(s)] q(0) | \bar{q}(x P_1) q(\bar{x} P_1) \rangle. \quad (3.20)$$

在光锥坐标系下 $y = (0, y^-, b)$ 。Wilson线由三部分构成, 分别为沿着 \bar{n} 方向从0到 ∞ , 从 ∞ 到 $\infty + b$ 及沿着 $-\bar{n}$ 方向从 $\infty + b$ 回到 y_0 。其中第一部分与第三部分Wilson线对应的Eikonal线分别是 $gA^\mu \bar{n}_\mu / (\bar{n} \cdot l)$ 与 $-gA^\mu \bar{n}_\mu / (\bar{n} \cdot l) e^{-il_T \cdot b + il^+ \cdot y^-}$, 它们分别与等式(3.19)(d)中的两项Delta函数相关。由于 b 与 ∞ 相比是一个可忽略的小量, 因此第二部分Wilson线对应的Eikonal线的贡献为零。

硬核部分的振幅可以表示为

$$\begin{aligned} H^{(0)}(\xi, b) &= d^2 l_T \mathcal{H}^{(0)}(\xi, l_T) \exp(il_T \cdot b), \\ \mathcal{H}^{(0)}(\xi, l_T) &= ie^2 \frac{\text{Tr}[\not{\epsilon} \not{P}_2 \gamma_\mu \not{P}_1 \gamma_5]}{2\xi P_1 \cdot P_2 + l_T^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中我们需要保留 l_T 分量而忽略 l^- 分量, 传播子可以化简为 $1/(P_2 - xP_1 + l)^2 \approx -1/(2\xi P_1 \cdot P_2 + l_T^2)$, 这与共线因子化的结果不同。由于在波函数定义中包含Wilson线, 因此波函数是规范不变的, 而硬核部分也是规范不变的量, 所以总的因子化公式具有规范不变性。

3.2.1 PQCD因子化方法

微扰QCD方法(PQCD)基于 k_T 因子化 [72-74]。对于一个含有多标度的重味强子衰变过程, 其中包括时间尺度较短的夸克胶子的产生与湮灭过程, 它们是高标度的可微扰计算的; 还包括时间尺度较长的强子碎裂与强子化过程, 它们对应于QCD标度的非微扰过程。一般多标度过程的因子化很难在完整QCD下证明, 而PQCD方法利用重夸克有效理论(对重夸克 $1/m_Q$ 进行展开), 可以完成因子化的逐阶证明。在PQCD方法下, 多标度的跃迁矩阵元可以通过算符乘积展开(OPE)为短程Wilson系数与长程非定域算符矩阵元乘积的形式, 其中Wilson系数表征高标度的可微扰计算的部分, 长程算符矩阵元表征低标度的非微扰部分。考虑 $B \rightarrow D$ 在大反冲区域的半轻衰变过程, 该过程涉及到三个不同的标度: W玻色子标度、硬散射标度 t 、强子化标度 Λ_{QCD} 。在PQCD方法下, 衰变振幅可以表示为三个部分卷积的形式: 短程系数 C 、 b 夸克的硬散射过程、非微扰介子波函数。它们分别对应于 M_W 、 t 、 Λ_{QCD} 标度。在计算各部分的圈图修正时, 会产生两种大的对数项 $\ln(m_W/t)$

与 $\ln(t/\Lambda_{QCD})$ 。通过对 $\ln(M_W/t)$ 求和可以得到从 M_W 到 t 标度的演化，我们用Wilson系数来描述。通过对对数 $\ln(t/\Lambda_{QCD})$ 的求和得到从 t 到强子化标度 Λ_{QCD} 的演化，我们用Sudakov因子来描述。前者可以在有效理论中推导，而后者需要利用重求和技术来处理。

物理量应该不依赖于标度的选取，所以不同因子化部分的标度依赖性应该相互抵消。在PQCD方法下， B 介子的两体衰变振幅可以表示为

$$A \sim \int_0^1 dx_1 dx_2 \int d^2\mathbf{b}_1 d^2\mathbf{b}_2 d^2C(\mu) \phi_B(x_1, \mathbf{b}_1, P_1, \mu) H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu) \phi_2(x_2, \mathbf{b}_2, P_2, \mu), \quad (3.22)$$

其中 $C(\mu)$ 为短程微扰系数， $H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu)$ 为硬散射核部分， $\phi_B(x_1, \mathbf{b}_1, P_1, \mu)$ 与 $\phi_2(x_2, \mathbf{b}_2, P_2, \mu)$ 分别为不同介子的波函数。微扰系数 $C(\mu)$ 从 M_W 标度演化到 μ_t 标度，硬散射核 $H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu)$ 从 μ_t 标度演化到 μ 标度，而波函数 $\phi_i(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu)$ 则从 μ 标度演化到 Λ_{QCD} 标度。因此整个物理的振幅对标度 μ 与 μ_t 的依赖性会相互抵消。

对波函数做圈图修正时，会产生软发散与共线发散。如果两个发散相互叠加，就会导致大的双对数项的出现，我们可以利用 k_T 重求和技术把双对数项求和到Sudakov因子中。如包含Sudakov因子的轻介子波函数如下

$$\phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu) = \exp[-s(x_i, b_i, Q) - s(1 - x_i, b_i, Q)] \phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, \mu). \quad (3.23)$$

其中Sudakov因子 $s(\xi, b_i, Q)$ ($\xi = x_i$ 或 $1 - x_i$)的表达形式为 [75, 76]

$$\begin{aligned} s(\xi, b, Q) = & \frac{A^{(1)}}{2\beta_1} \hat{q} \ln\left(\frac{\hat{q}}{\hat{b}}\right) + \frac{A^{(2)}}{4\beta_1^2} \left(\frac{\hat{q}}{\hat{b}} - 1\right) - \frac{A^{(1)}}{2\beta_1} (\hat{q} - \hat{b}) \\ & - \frac{A^{(1)}\beta_2}{4\beta_1^3} \hat{q} \left[\frac{\ln(2\hat{b}) + 1}{\hat{b}} - \frac{\ln(2\hat{q}) + 1}{\hat{q}} \right] - \left[\frac{A^{(2)}}{4\beta_1^2} \right. \\ & \left. - \frac{A^{(1)}}{4\beta_1} \ln\left(\frac{e^{2\gamma-1}}{2}\right) \right] \ln\left(\frac{\hat{q}}{\hat{b}}\right) + \frac{A^{(1)}\beta_2}{8\beta_1^3} [\ln^2(2\hat{q}) - \ln^2(2\hat{b})], \end{aligned} \quad (3.24)$$

新定义参数

$$\hat{q} \equiv \ln\left[\frac{\xi Q}{\sqrt{2}\Lambda_{QCD}}\right], \quad \hat{b} \equiv \ln\left[\frac{1}{b\Lambda_{QCD}}\right]. \quad (3.25)$$

我们给出精确到双圈的跑动耦合常数的结果

$$\frac{\alpha_s}{\pi} = \frac{1}{\beta_1 \log(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)} - \frac{\beta_2 \ln \ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\beta_1^3 \ln^2(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (3.26)$$

其中参数 $A^{(i)}$ 与 β_i 为

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{33 - 2n_f}{12}, \quad \beta_2 = \frac{153 - 19n_f}{24}, \\ A^{(1)} &= \frac{4}{3}, \quad A^{(2)} = \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27}n_f + \frac{8}{3}\beta_1 \ln\left(\frac{e^{\gamma_E}}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.27)$$

这里 n_f 是不同夸克味道的数目， γ_E 是欧拉常数。

除了上述双对数项以外，对强子波函数及硬核部分的辐射修正，会产生紫外发散以及单对数项。我们利用重整化群的方法把它求和起来，

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g}\right] \phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu) = -2\gamma_q \phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu), \quad (3.28)$$

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g}\right] H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu) = 4\gamma_q H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu). \quad (3.29)$$

这里夸克的反常量纲为 $\gamma_q = -\alpha_s/\pi$ 。对单对数项求和后，强子波函数以及硬散射振幅的表达式为

$$\phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu) = \exp\left[-2 \int_{1/b_i}^{\mu} \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \times \bar{\phi}_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, 1/b_i), \quad (3.30)$$

$$H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, \mu) = \exp\left[-4 \int_{\mu}^t \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu}))\right] \times H(x_1, x_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, Q, t), \quad (3.31)$$

其中 t 为硬散射过程的最大能标（硬散射从 t 能标向下跑动）。利用等式(3.23)与(3.30)，我们得到轻介子波函数 ϕ_{M_i} 在大的 b 空间下的表示形式

$$\phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, P_i, \mu) = \exp[-S(x_i, b_i, Q, \mu)] \phi_{M_i}(x_i, \mathbf{b}_i, 1/b_i), \quad (3.32)$$

新定义因子 $S(x_i, b_i, Q, \mu)$

$$S(x_i, b_i, Q, \mu) = s(x_i, b_i, Q) + s(1 - x_i, b_i, Q) + 2 \int_{1/b_i}^{\mu} \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu})). \quad (3.33)$$

此外对电磁顶点做QCD单圈修正时，会产生新的双对数项 $\alpha_s \ln^2 x_i$ 。对它进行阈值重求和进而产生喷注函数 $S_t(x_i)$ ，喷注函数会修改强子波函数的端点发散行为。一般来说，喷注函数是一种普适的量，它不依赖于内部夸克的味道或者硬散射过程的拓扑等 [77–79]，我们将在本章的最后一节对喷注函数进行详细讨论。

3.2.2 强子的光锥波函数

考虑一个四级的无穷小转动 $x_\mu \rightarrow x'_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu$ ，一个任意场 $\Phi(x)$ 的变换为 $\Phi'(x') = [1 - \epsilon_{\mu\nu}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu - \Sigma^{\mu\nu})] \Phi(x) = [1 + i\epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}] \Phi(x)$ ，其中 $\Sigma^{\mu\nu}$ 是场 Φ 的自旋群的生

成元。 $\Sigma^{\mu\nu}$ 作用到标量场、夸克场及胶子场时，分别有

$$\Sigma^{\mu\nu}\phi(x) = 0, \quad \Sigma^{\mu\nu}\psi = \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad \Sigma^{\mu\nu}A^\alpha = g^{\nu\alpha}A^\mu - g^{\mu\alpha}A^\nu, \quad (3.34)$$

这里的胶子场定义为 $A_\mu = T^a A_\mu^a$ ，我们同时定义自旋投影算符

$$\hat{P}_+ = \frac{1}{2}\gamma_- \gamma_+, \quad \hat{P}_- = \frac{1}{2}\gamma_+ \gamma_-, \quad \hat{P}_+ + \hat{P}_- = 1, \quad (3.35)$$

自旋投影算符作用到夸克场时，可以投影出夸克场的物理的自旋分量。因此自旋为 s 夸克场在其运动方向投影为

$$\Sigma_{+-}P_\pm\psi = s_\pm P_\pm\psi = \pm\frac{1}{2}P_\pm\psi. \quad (3.36)$$

我们定义共形扭度为：共形扭度(twists)=量纲(dimension)-自旋分量(spin projection)。

对于含有任意Lorentz结构的夸克场的双线性算符，我们通过插入投影算符将它进行分解

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2(x_2)\Gamma\psi_1(x_1) &= \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_-\Gamma\hat{P}_+\psi_1(x_1) \\ &\quad + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_+\Gamma\hat{P}_+\psi_1(x_1) + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_-\Gamma\hat{P}_-\psi_1(x_1) \\ &\quad + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_+\Gamma\hat{P}_-\psi_1(x_1). \end{aligned} \quad (3.37)$$

其中第一行的结果对应于共形扭度-2，第二行与第三行的结果分别对应于扭度-3与扭度-4。我们以第一行为例，计算它的共形扭度： $t = l_1 + l_2 - s_1 - s_2 = 2$ 。对于胶子场，其量纲为 $l = 2$ ，自旋投影为

$$\Sigma_{+-}G_{+\perp} = 1 \cdot G_{+\perp}, \quad \Sigma_{+-}G_{\perp\perp} = 0 \cdot G_{\perp\perp}, \quad \Sigma_{+-}G_{+-} = 0 \cdot G_{+-}, \quad \Sigma_{+-}G_{-+} = -1 \cdot G_{-+}, \quad (3.38)$$

这里 $G_{+\perp} \equiv G_{\mu\nu}n^\mu g_\perp^{\nu\alpha}$ ， $g_\perp^{\nu\alpha} = g^{\nu\alpha} - n^\nu \bar{n}^\alpha - n^\alpha \bar{n}^\nu$ 。类似对夸克场的双线性算符的分解，含有任意Loretz结构的胶子场的双线性算符可以分解如下 [80]

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2(x_2)\Gamma g_s G_{\mu\nu}(x_3)\psi_1(x_1) &= \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_-\Gamma g_s G_{\alpha\beta}(x_3)\hat{P}_+\psi_1(x_1)(g_\perp^{\alpha\mu}n^\beta \bar{n}^\nu + n^\alpha \bar{n}^\mu g_\perp^{\beta\nu}) \\ &\quad + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_+\Gamma g_s G_{\alpha\beta}(x_3)\hat{P}_+\psi_1(x_1)(g_\perp^{\alpha\mu}n^\beta \bar{n}^\nu + n^\alpha \bar{n}^\mu g_\perp^{\beta\nu}) \\ &\quad + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_-\Gamma g_s G_{\alpha\beta}(x_3)\hat{P}_-\psi_1(x_1)(g_\perp^{\alpha\mu}n^\beta \bar{n}^\nu + n^\alpha \bar{n}^\mu g_\perp^{\beta\nu}) \\ &\quad + \bar{\psi}_2(x_2)\hat{P}_+\Gamma g_s G_{\alpha\beta}(x_3)\hat{P}_-\psi_1(x_1)(g_\perp^{\alpha\mu}n^\beta \bar{n}^\nu + n^\alpha \bar{n}^\mu g_\perp^{\beta\nu}) \\ &\quad + \mathcal{O}(\text{twist} - 5, 6, 7). \end{aligned} \quad (3.39)$$

其中第一行对应扭度-3的分解，第二、三与四行分别对应扭度-4、扭度-4及扭度-5的分解。

我们将上述算符作用到初末态为真空与强子态的矩阵元中，得到具有共形扭度定义的光锥波函数，其中波函数可以展开为具有不同扭度的光锥分布振幅。下面我们给出在两粒子的轻赝标介子光锥波函数的定义 [81, 82]

$$\langle P(P)|\bar{q}_2(z)\gamma_\mu\gamma_5q_1(0)|0\rangle = -if_P P_\mu \int_0^1 dx e^{ixP\cdot z} \phi_2(x), \quad (3.40)$$

$$\langle P(P)|\bar{q}_2(z)\gamma_5q_1(0)|0\rangle = -if_P m_0 \int_0^1 dx e^{ixP\cdot z} \phi_3^P(x), \quad (3.41)$$

$$\langle P(P)|\bar{q}_2(z)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5q_1(0)|0\rangle = \frac{i}{6}f_P m_0 (P_\mu z_\nu - P_\nu z_\mu) \int_0^1 dx e^{ixP\cdot z} \phi_3^\sigma(x). \quad (3.42)$$

一般来说，波函数 $\Phi_{\alpha\beta}$ 可以分解为16个独立的分量，并用为五个独立的张量结构表示 $I_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}^\mu, (\gamma^\mu\gamma^5)_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}^5, \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ 。根据张量的分解，我们将赝标介子的光锥波函数定义为更紧凑的形式

$$\begin{aligned} \langle P(P)|\bar{q}_{2\beta}(z)q_{1\alpha}(0)|0\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{6}} \int_0^1 dx e^{ixP\cdot z} \left[\gamma_5 P \phi^A(x) + m_0 \gamma_5 \phi^P(x) - m_0 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 P_\mu z_\nu \frac{\phi^\sigma(x)}{6} \right]_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{6}} \int_0^1 dx e^{ixP\cdot z} \left[\gamma_5 P \phi^A(x) + \gamma_5 m_0 \phi^P(x) + m_0 \gamma_5 (\not{n} \not{v} - 1) \phi^T(x) \right]_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

对分布振幅重新定义

$$\phi^A(x) = \frac{f_P}{2\sqrt{6}} \phi_2(x), \quad \phi^P(x) = \frac{f_P}{2\sqrt{6}} \phi_3^P(x), \quad \phi^\sigma(x) = \frac{f_P}{2\sqrt{6}} \phi_3^\sigma(x), \quad (3.44)$$

这里 $n = (1, 0, 0_T)$ 与 $v = (0, 1, 0_T)$ 分别为两个光锥矢量， x 是夸克 q_2 携带的动量分数，轻赝标介子的手征质量为 $m_0 = m_P^2/(m_{q_1} + m_{q_2})$ 。在化简等式 (3.43) 时，我们考虑末态的轻赝标介子沿着 n 的方向运动。

我们分别给出两粒子矢量介子的光锥波函数与两粒子张量介子的光锥波函数的定义，如下

$$\begin{aligned} \langle V(p, \epsilon_T)|\bar{q}_{2\beta}(z)q_{1\alpha}(0)|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2N_C}} \int_0^1 dx e^{ixp\cdot z} \left[\not{\epsilon}_T \not{p} \phi_V^T(x) + m_V \not{\epsilon}_T \phi_V^v(x) \right. \\ &\quad \left. + m_V i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma^\mu \epsilon_T^\nu n^\rho v^\sigma \phi_V^p(x) \right]_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\langle T(p, \pm 1)|\bar{q}_{2\beta}(z)q_{1\alpha}(0)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_C}} \int_0^1 e^{ixp\cdot z} \left[\not{\xi}_T p / \phi_T^T(x) + m_T \not{\xi}_T \phi_T^V(x) \right]$$

$$+ m_T i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma^\mu \xi_T^\nu n^\rho v^\sigma \phi_T^\alpha(x) \Big]_{\alpha\beta}. \quad (3.46)$$

分布振幅原则上应该是共形不变的量，可以做Gegenbauer级数展开。

对于S-波两pion系统的光锥波函数，我们采用与标量介子的光锥波函数定义 [83] 相类似的形式

$$\begin{aligned} \Phi_{\pi\pi}^{S-wave} = & \frac{1}{\sqrt{2N_c}} [\not{p} \Phi_{\pi\pi}(z, \xi, m_{\pi\pi}^2) + m_{\pi\pi} \Phi_{\pi\pi}^s(z, \xi, m_{\pi\pi}^2) \\ & + m_{\pi\pi} (\not{n}\not{p} - 1) \Phi_{\pi\pi}^T(z, \xi, m_{\pi\pi}^2)], \end{aligned} \quad (3.47)$$

其中 z 是两pion系统中旁观正夸克携带的动量分数， $\Phi_{\pi\pi}$ ， $\Phi_{\pi\pi}^s$ 与 $\Phi_{\pi\pi}^T$ 分别是一个扭度为2与两个扭度为3的分布振幅。 $m_{\pi\pi}$ 是两pion系统的不变质量，我们定义两pion系统沿着光锥 n 方向运动，其中 ξ 是两pion系统中 π^+ 携带的动量分数。

对于含有重夸克的介子光锥波函数的定义，我们采用与轻介子的不同方式。例如 B 介子的波函数定义为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ik_1 \cdot z} \langle 0 | b_\alpha(0) \bar{q}_\beta(z) | \bar{B}(P_B) \rangle \\ & = \frac{i}{\sqrt{2N_c}} \left\{ (\not{P}_B + m_B) \gamma_5 \left[\phi_B(k_1) + \frac{\not{n} - \not{p}}{\sqrt{2}} \bar{\phi}_B(k_1) \right] \right\}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

其中 $\bar{\phi}_B(k_1)$ 与 $\phi_B(k_1)$ 是 B 介子的分布振幅， f_B 是 B 介子的衰变常数。

对于粲介子或 B_s 重介子的光锥波函数，我们采用类似 B 介子的定义。其中粲介子的光锥波函数的定义如下

$$\int_0^1 \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ik_2 \cdot z} \langle 0 | \bar{c}_\alpha(0) q_\beta(z) | \bar{D}^0(P_D) \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2N_c}} \left\{ (\not{P}_D + m_D^0) \gamma_5 \phi_D(k_2) \right\}_{\beta\alpha}, \quad (3.49)$$

$\phi_D(k_2)$ 为粲介子的光锥分布振幅，它满足归一化条件。

不同扭度的分布振幅之间并不是完全独立的，我们可以利用欧拉-拉格朗日运动方程得到它们之间简单的关系。此外我们还可以利用双线性算符的动力学关系 [84] 来得到更完整的分布振幅之间的关系，如

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) = & -i \partial_\nu \bar{u}(x) \gamma_5 d(-x) + \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\nu}(vx) \gamma_5 d(-x) \\ & - i \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\mu}(vx) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) \end{aligned}$$

$$- (m_u + m_d) \bar{u}(x) \gamma_\nu \gamma_5 d(-x). \quad (3.50)$$

双线性算符之间关系及证明见附录 A。将上述算符关系作用到跃迁矩阵元中，可以得到跃迁矩阵元的关系。如领头阶的赝标介子矩阵元之间的关系为

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle P(P) | \bar{q}_2(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q_1(0) | 0 \rangle = -i \partial_\nu \langle P(P) | \bar{q}_2(x) \gamma_5 q_1(0) | 0 \rangle. \quad (3.51)$$

根据上述关系，我们可以得到领头阶下赝标介子分布振幅的关系

$$\begin{aligned} x\phi_3^P(x) &= \frac{1}{3}\phi_3^\sigma - \frac{1}{6}x\phi_3^\sigma(x)', \\ \bar{x}\phi_3^P(x) &= \frac{1}{3}\phi_3^\sigma + \frac{1}{6}\bar{x}\phi_3^\sigma(x)', \end{aligned} \quad (3.52)$$

强子的分布振幅的展开形式应满足类似的关系。我们将在 4.1.2 节具体讨论轻介子分布振幅的形式，S 波 $\pi\pi$ 系统及重介子的光锥分布振幅的讨论将在 4.2.1 节进行。

3.2.3 k_T 重求和

在 k_T 因子化中，部分子的横向自由度会产生一个软的对数项 $\alpha_s \log b$ ，而部分子的纵向自由度会产生一个共线的对数项，当软的与共线的对数项重叠时，便会产生双对数项 $\alpha_s \ln^2(Qb)$ 。为了保证微扰展开的合理性我们需要对大的对数项进行重求和。单对数项的重求和可以直接通过重整化群的方法来实现，而双对数项的重求和我们参考文献 [85, 86] 的方法。在轴规范 $\bar{n} \cdot A = 0$ 下，两粒子的可约化费曼图 3.2(a-c) 会包含双对数项，但两粒子的不可约费曼图 3.2(d,e)，则只包含单对数项。当双对数项类似 $\Phi \sim \text{Exp}[-\text{const.} \times \ln^2(Qb)]$ 时，我们只需要对 Φ 做微分 $d\Phi/d \ln Q = C\Phi$ ，其中系数 C 将只含有单对数项，因此可以直接利用重整化群方法对 C 求和。

在 Lorentz 不变性与标度不变性的要求下，波函数将只依赖于一个大的标度 $v^2 = (P_1 \cdot \bar{n})^2 / (\bar{n})^2$ ，微分 $d/d \ln Q$ 会进一步转化为 $d/d \bar{n}$

$$\frac{d}{d \ln Q} \Phi = -\frac{\bar{n}^2}{P_1 \cdot \bar{n}} P_1^\mu \frac{d}{d \bar{n}^\mu} \Phi. \quad (3.53)$$

在轴规范下，Wilson 线为 $W = 1$ 。胶子传播子为

$$N^{\mu\nu} = \frac{-i}{l^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\bar{n}^\mu l^\nu + l^\mu \bar{n}^\nu}{\bar{n} \cdot l} + \bar{n}^2 \frac{l^\mu l^\nu}{(\bar{n} \cdot l)^2} \right]. \quad (3.54)$$

对胶子传播子做微分 $d/d \bar{n}_\alpha$

$$\frac{d}{d \bar{n}_\alpha} N^{\mu\nu} = -\frac{1}{\bar{n} \cdot l} (N^{\mu\alpha} l^\nu + N^{\nu\alpha} l^\mu). \quad (3.55)$$

将所有费曼图的微分结果相加，并利用Ward恒等式，我们可以得到波函数 Φ 中会包含一个特殊的顶点 [87]

$$g \frac{\bar{n}^2}{P_1 \cdot \bar{n} \bar{n} \cdot l} P_{1\alpha}, \quad (3.56)$$

由于 \bar{n}^2 的存在，该顶点在胶子动量 l 处于共线区域时不会加强共线行为，所以硬区域与软区域是 l 的领头阶的区域。在这两个区域中，波函数会分别产生软发散与紫外发散，我们利用两个正规化函数 K 与 G 分别正规它们（ K, G 函数的形式参考文献 [88]）。于是 Φ 的微分方程变为

$$\frac{d}{d \ln Q} \Phi(x, b, Q, \mu) = \left[2K(b\mu) + \frac{1}{2}G(xv/\mu) + \frac{1}{2}G(\bar{x}v/\mu) \right] \Phi(x, b, Q, \mu). \quad (3.57)$$

将正规化函数带入等式 (3.57)，我们可以得到上述方程的解

$$\Phi(x, b, Q, \mu) = \exp\left[-\sum_{\xi=x, \bar{x}} s(\xi, b, Q)\right] \Phi(x, b, \mu). \quad (3.58)$$

其中初始的 $\Phi(x, b, \mu)$ 包含了对 μ 的单对数的演化， $s(\xi, b, Q)$ 被称作Sudakov因子。领头阶的重求和结果与 \bar{n} 无关，因此Sudakov因子是规范不变的。

3.2.4 喷注函数

在 $B \rightarrow \pi l \nu$ 的半轻衰变与 $B \rightarrow \gamma l \nu$ 的辐射衰变过程中 [71, 89]，圈图修正会产生双对数项 $\alpha_s \ln^2 x$ 。当动量分数接近端点的区域时，双对数就不再是小量，因此会破坏微扰展开行为。我们可以通过重整化群的方法，将双对数求和到一个夸克的喷注函数中，即所谓的阈值重求和。对原始的因子化公式与喷注函数做卷积，便会消去原来的端点发散行为 [90]。

喷注函数的定义为

$$J(x) \bar{q}(P_2 - k) = \langle q(P_2 - k) | \bar{q}(0) \frac{1}{4} \not{n} \not{\bar{n}} \exp[-ig \int_{-\text{inf}}^0 dz n \cdot A(zn)] | 0 \rangle. \quad (3.59)$$

旋量 $q(P_2 - k)$ 表示内夸克， P_2 沿着光锥方向运动。

在协变规范下 $\partial \cdot A = 0$ ，为了对双对数 $\alpha_s \ln^2 x$ 进行重求和。我们首先将 n 包含一个负的分量 n^- ，从而正规化其中的共线发散。经过正规化后，双对数项变为 $-C_F \ln^2 x \alpha_s / (4\pi)$ 。之后我们对它进行演化

$$k^+ \frac{dJ}{dk^+} = \frac{n \cdot k}{P_2 \cdot k} P_2^\mu \frac{dJ}{dn^\mu},$$

$$\frac{n \cdot k}{P_2 \cdot k} P_2^\mu \frac{d}{dn^\mu} \frac{\hat{n}_\nu}{n \cdot l}, \quad \hat{n}_\nu = -\frac{n \cdot k P_2 \cdot l}{P_2 \cdot k n \cdot l} n_\nu. \quad (3.60)$$

其中 $k^+ = x P_1^+$ ，我们得到喷注函数关于动量分数 x 的演化关系

$$x \frac{dJ(x)}{dx} = -i g^2 C_F \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\hat{n}_\nu}{n \cdot l} \frac{g^{\mu\nu}}{l^2} \frac{\bar{n}_\mu}{\bar{n} \cdot l} J(x - l^+/P_1^+). \quad (3.61)$$

内线夸克的不变质量为 $(P_2 - k + l)^2 \approx -2(x - l^+/P_1^+) P_1 \cdot P_2$ 。在积掉 l^- 与 l_T 分量后，我们得到喷注函数关于动量分数 x 的关系

$$x \frac{dJ(x)}{dx} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{(\xi - x)_+} J(\xi). \quad (3.62)$$

其中Plus函数的定义为

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} \equiv \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}, \quad (3.63)$$

在 $z \neq 1$ 时， $1/((1-z)_+) = 1/(1-z)$ 。对等式 (3.62) 求解，我们得到喷注函数的解析形式

$$J(x) = -\exp\left(\frac{\pi^2 \gamma_K}{4}\right) \int \frac{dt}{\pi} (1-x)^{\exp(t)} \sin\left(\frac{\pi \gamma_K t}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \gamma_K t^2\right), \quad (3.64)$$

其中反常量纲 $\gamma_K = \alpha_s C_F / \pi$ ，喷注函数满足归一化 $\int J(x) dx = \hat{J}(1) = 1$ 。为了方便唯象方面的应用，我们通常对喷注函数进行参数化

$$S_t(x) = \frac{2^{1+2c} \Gamma(\frac{3}{2} + c)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+c)} [x(1-x)]^c, \quad (3.65)$$

其中 c 为拟合参数，可以取值为 $0.3 < c < 0.5$ 。

第四章 PQCD方法的应用

目前微扰QCD(PQCD)方法已经成功应用到许多QCD过程 [65,91], 尤其是在b物理中, 如B介子的两体衰变过程, 由PQCD方法得到的结果与实验数据符合的都很好。 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 及 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程与B介子两体衰变过程类似, 它们对揭示强子的内部结构、理解CP破坏的来源、精确测量标准模型的参数与探索新物理都有重要帮助。因此本章我们将利用PQCD的方法对它们进行研究。

4.1 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 的遍举过程

正负电子湮灭到两个介子的遍举过程可以用来研究介子的类时形状因子, 类时形状因子与对撞能量 \sqrt{s} 相关 [92,93], 可以用来揭示强子中部分子的结构, 这也意味着正负电子的遍举过程可以用来提取强子中基本夸克跟胶子的结构信息; 此外 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 过程的拓扑图与B介子湮灭过程的拓扑图相同, 其中P、V、T分别表示赝标量介子、矢量介子和张量介子, 所以它们的高阶修正效应应该相近, 而相对于具有复杂QCD效应的B介子的高阶修正来说, 正负电子两体湮灭过程的高阶修正更容易观测与研究。

共线因子化理论可以有效的应用到DIS等单举过程, 但是应用到 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 过程时, 其因子化公式在端点 $x \rightarrow 0$ 的积分区域会出现发散问题, x 是夸克的动量分数。而基于 k_T 因子化的PQCD方法因为保留了横向动量, 所以可以有效的避免端点发散问题, 因此我们将采用PQCD方法来研究 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 的过程。

4.1.1 类时形状因子

在 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 过程中, 赝标介子(P)的动量用 P_2 表示, 矢量介子(V)的动量为 P_1 , 其极化矢量为 ϵ_μ 。张量介子(T)的极化张量为 $\epsilon_{\mu\nu}$, 对撞的质心能量取 $Q = \sqrt{s}$ 。在标准模型下, 该遍举过程可以通过虚光子或者 Z^0 玻色子发生, 当对撞的质心能量 \sqrt{s} 约为几个GeV时, 该过程则主要通过虚光子发生。

张量介子的极化张量 $\epsilon_{\mu\nu}$ 可以利用矢量介子的极化矢量来构造

$$\epsilon_\mu(0) = \frac{1}{m_T}(|\vec{P}_T|, 0, 0, E_T), \quad \epsilon_\mu(\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0). \quad (4.1)$$

利用Clebsch-Gordan系数 [94], 我们得到

$$\epsilon_{\mu\nu}(\pm 2) = \epsilon_\mu(\pm)\epsilon_\nu(\pm),$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu}(\pm 1) &= \sqrt{\frac{1}{2}}[\epsilon_{\mu}(\pm)\epsilon_{\nu}(0) + \epsilon_{\mu}(0)\epsilon_{\nu}(\pm)], \\ \epsilon_{\mu\nu}(\pm 0) &= \sqrt{\frac{1}{6}}[\epsilon_{\mu}(+)\epsilon_{\nu}(-) + \epsilon_{\mu}(-)\epsilon_{\nu}(+)] + \sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_{\nu}(0)\epsilon_{\mu}(0).\end{aligned}\quad (4.2)$$

定义新的极化矢量

$$\xi_{\mu}(\lambda) = \frac{\epsilon_{\mu\nu}(\lambda)q^{\nu}}{P_1 \cdot q}m_T, \quad (4.3)$$

其中 $q = P_1 + P_2$ 为虚光子的四动量，在质心系下满足 $q^2 = s$ 。于是等式(4.3)变成

$$\xi_{\mu}(\pm 2) = 0, \quad \xi_{\mu}(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{Q^2\eta}{2m_T^2 + Q^2\eta}\epsilon_{\mu}(\pm), \quad \xi_{\mu}(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{Q^2\eta}{2m_T^2 + Q^2\eta}\epsilon_{\mu}(0), \quad (4.4)$$

这里新定义了参数 $\eta = 1 - m_T^2/Q^2$ ， m_T 是张量介子的质量。由于赝标介子的质量很小，因此它们可以近似的沿着光锥方向运动。利用极化矢量 ξ ，我们定义 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 过程的类时形状因子如下

$$\langle V(P_1, \epsilon_T)P(P_2)|j_{\mu}^{\text{em}}|0\rangle = F_{\text{VP}}(s)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_T^{\nu}P_1^{\alpha}P_2^{\beta}, \quad (4.5)$$

$$\langle T(P_1, \lambda)P(P_2)|j_{\mu}^{\text{em}}|0\rangle = F_{\text{TP}}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\xi^{\nu}(\lambda)P_1^{\alpha}P_2^{\beta}. \quad (4.6)$$

注意等式(4.5)与等式(4.6)中矢量介子与张量介子都是横向极化的，其中我们约定Levi-Civita反对称张量 $\epsilon^{0123} = 1$ 。

利用类时形状因子的定义，我们可以得到 $e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 的散射截面

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow VP) = \frac{\pi\alpha_{\text{em}}^2}{6}|F_{\text{VP}}|^2\Phi^{3/2}(s), \quad (4.7)$$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow TP) = \frac{\pi\alpha_{\text{em}}^2}{3}\left(\frac{s\eta}{2m_T^2 + s\eta}\right)^2|F_{\text{TP}}|^2\Phi^{3/2}(s), \quad (4.8)$$

其中电磁耦合常数 $\alpha_{em} = 1/137$ ，相空间因子 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s) = \left[1 - \frac{(m_{V(T)} + m_P)^2}{s}\right] \left[1 - \frac{(m_{V(T)} - m_P)^2}{s}\right]. \quad (4.9)$$

4.1.2 轻介子的衰变常数与光锥分布振幅

赝标介子、矢量介子与张量介子的衰变常数的定义如下

$$\langle P(p)|\bar{q}_2\gamma_{\mu}\gamma_5q_1|0\rangle = -if_Pp_{\mu}, \quad (4.10)$$

$$\langle V(p, \epsilon)|\bar{q}_2\rangle_{\mu}q_1|0\rangle = f_Vm_V\epsilon_{\mu}, \quad \langle V(p, \epsilon)|\bar{q}_2\sigma_{\mu\nu}q_1|0\rangle = -if_V^T(\epsilon_{\mu}p_{\nu} - \epsilon_{\nu}p_{\mu}), \quad (4.11)$$

$$\langle T(P, \lambda) | j_{\mu\nu}(0) | 0 \rangle = f_T m_T^2 \epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)*}, \quad \langle T(P, \lambda) | j_{\mu\nu\delta}^\perp(0) | 0 \rangle = -i f_T^\perp m_T (\epsilon_{\mu\delta}^{(\lambda)*} P_\nu - \epsilon_{\nu\delta}^{(\lambda)*} P_\mu). \quad (4.12)$$

这里我们选择的内插流分别为

$$j_{\mu\nu}(0) = \frac{1}{2} \left(\bar{q}_1(0) \gamma_\mu i \overleftrightarrow{D}_\nu q_2(0) + \bar{q}_1(0) \gamma_\nu i \overleftrightarrow{D}_\mu q_2(0) \right), \quad (4.13)$$

$$j_{\mu\nu\delta}^{\perp\dagger}(0) = \bar{q}_2(0) \sigma_{\mu\nu} i \overleftrightarrow{D}_\delta q_1(0), \quad (4.14)$$

其中协变微分的定义为 $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu$, $\overrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu + i g_s A_\alpha^a \lambda^a / 2$ 与 $\overleftarrow{D}_\mu = \overleftarrow{\partial}_\mu - i g_s A_\alpha^a \lambda^a / 2$.

赝标介子与矢量介子的衰变常数通常通过如下过程来确定: $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$, $\tau^- \rightarrow (\pi^-, K^-, \rho^-, K^{*-}) \nu_\tau$ 与 $V^0 \rightarrow e^+ e^-$ [94], 张量介子的衰变常数可以通过QCD求和规则的方法来得到。我们在表格 4.1 中给出常见轻介子的衰变常数的最新结果 [95]。

表 4.1 相关轻介子的衰变常数。

Tab 4.1 Decay constants of the relevant light mesons (in units of MeV)

f_π	f_K	f_ρ	f_ρ^T	f_ω	f_ω^T	f_{K^*}	$f_{K^*}^T$	f_ϕ	f_ϕ^T	f_{a_2}	$f_{a_2}^T$	$f_{K_2^*}$	$f_{K_2^*}^T$
131	160	209 ± 2	165 ± 9	195 ± 3	145 ± 10	217 ± 5	185 ± 10	231 ± 4	200 ± 10	107 ± 6	105 ± 21	118 ± 5	77 ± 14

赝标介子波函数的定义已经在等式 (3.43) 给出, 其中光锥分布振幅(LCDAs)满足共形不变性。领头阶的LCDA展开为

$$\phi_P^A(x) = \frac{3f_P}{\sqrt{2N_C}} x(1-x) [1 + a_1^P C_1^{3/2}(t) + a_2^P C_2^{3/2}(t)], \quad (4.15)$$

这里夸克颜色 $N_C = 3$, 新定义的参数 $t = 2x - 1$ 。 $C_i^{3/2}(i = 1, 2)$ 是 Gegenbauer 多项式, 定义如下

$$C_1^{3/2}(t) = 3t, \quad C_2^{3/2}(t) = \frac{3}{2}(5t^2 - 1). \quad (4.16)$$

在能标 $\mu = 1\text{GeV}$ 附近, Gegenbauer 矩 [96] 为

$$a_1^\pi = 0, \quad a_1^K = 0.06 \pm 0.03, \quad a_2^{\pi,K} = 0.25 \pm 0.15. \quad (4.17)$$

手征质量参数采用 $m_0^\pi = 1.4 \pm 0.1\text{GeV}$, $m_0^K = 1.6 \pm 0.1\text{GeV}$ 。对于高扭度的LCDAs, 我们采用对称的展开形式

$$\phi_P^P(x) = \frac{f_P}{2\sqrt{2N_C}}, \quad \phi_P^T(x) = \frac{f_P}{2\sqrt{2N_C}}(1 - 2x). \quad (4.18)$$

赝标介子 $\eta - \eta'$ 可以发生混合，我们采用了它们的夸克味道本征态

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = U(\phi) \begin{pmatrix} \eta_q \\ \eta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_q \\ \eta_s \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

其中混合角采用 $\phi = 39.3^\circ \pm 1.0^\circ$ [97]，味道本征态的夸克组分分别为

$$\eta_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \eta_s = s\bar{s}. \quad (4.20)$$

它们的衰变常数定义如下

$$\langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q | \eta_q(P) \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} f_q P^\mu, \quad \langle 0 | \bar{s} \gamma^\mu \gamma_5 s | \eta_s(P) \rangle = i f_s P^\mu. \quad (4.21)$$

η_q 与 η_s 的光锥波函数采用类似 π 介子波函数的定义，它们的衰变常数以及手征质量需要采用如下的变换

$$f_q = (1.07 \pm 0.02) f_\pi, \quad f_s = (1.34 \pm 0.06) f_\pi, \quad m_0^q = 1.07 \text{ GeV}, \quad m_0^s = 1.92 \text{ GeV}. \quad (4.22)$$

矢量介子的领头阶与次领头阶的光锥分布振幅分别为 [98]

$$\phi_V^T(x) = \frac{3f_V^T}{\sqrt{2N_C}} x(1-x) [1 + a_1^\perp C_1^{3/2}(t) + a_2^\perp C_2^{3/2}(t)], \quad (4.23)$$

$$\phi_V^v(x) = \frac{3f_V}{8\sqrt{2N_C}} [1 + (2x-1)^2], \quad \phi_V^p(x) = \frac{3f_V}{4\sqrt{2N_C}} (1-2x). \quad (4.24)$$

能标 $\mu = 1 \text{ GeV}$ 时，Gegenbauer矩为

$$\begin{aligned} a_{1K^*}^\perp &= 0.04 \pm 0.03, & a_{1\rho}^\perp &= a_{1\omega}^\perp = a_{1\phi}^\perp = 0, \\ a_{2K^*}^\perp &= 0.11 \pm 0.09, & a_{2\rho}^\perp &= a_{2\omega}^\perp = 0.15 \pm 0.07, & a_{2\phi}^\perp &= 0.06_{-0.07}^{+0.09}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

等式 (3.46) 给出张量介子光锥波函数的定义，我们将光锥分布振幅进一步表示为 [95]

$$\phi_T^T(x) = \frac{f_T^T}{2\sqrt{2N_C}} \phi_\perp(x), \quad \phi_T^V(x) = \frac{f_T}{2\sqrt{2N_C}} g_\perp^{(v)}(x), \quad \phi_T^a(x) = \frac{f_T}{8\sqrt{2N_C}} \frac{d}{dx} g_\perp^{(a)}(x). \quad (4.26)$$

分布振幅采用对称的形式

$$\phi_{\parallel, \perp}(x) = 30x(1-x)(2x-1), \quad (4.27)$$

$$g_{\perp}^{(a)}(x) = 20x(1-x)(2x-1), \quad g_{\perp}^{(v)}(x) = 5(2x-1)^3. \quad (4.28)$$

在夸克（胶子）的纵向动量分数 x 比较小的时候，它们的横向动量就可能很大，因此我们需要考虑具有横向动量依赖的强子波函数。为了方便计算，我们假定横向动量与纵向动量之间没有相互干涉 [92]。本文采用了两种不同分布的横向动量分布函数：高斯型分布函数与特殊分布函数，

$$\psi(x, \mathbf{b}) = \phi(x) \times \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta^2}\right), \quad (4.29)$$

$$\psi(x, \mathbf{b}) = \phi(x) \times \exp\left[-\frac{x(1-x)b^2}{4a^2}\right]. \quad (4.30)$$

其中 $\phi(x)$ 是纵向动量分布的函数， β 与 a 分别用来参数化横向动量分布函数的形状，一般 β 与 $\langle \mathbf{k}_T^2 \rangle^{1/2}$ 相关，并接近 Λ_{QCD} 的大小。这里我们选取 $\langle \mathbf{k}_T^2 \rangle^{1/2} = 0.35 \text{ GeV}$ ， $\beta^2 = 4 \text{ GeV}^{-2}$ 。参数 a 满足 $a^{-1} \simeq \sqrt{8\pi} f_M$ ，其中 f_M 是相关强子的衰变常数。

4.1.3 PQCD 微扰计算

$e^+e^- \rightarrow PV, PT$ 的截面与 PV 、 PT 的形状因子相关，在PQCD方法下，形状因子可以表示为散射硬核与强子波函数的卷积形式。具有领头阶贡献的 PV 、 PT 形状因子对应于四个费曼图如图 4.1，它们的因子化公式依次为

$$F_a = 16\pi C_F Q \int_0^1 dx_1 dx_2 \int_0^\infty b_1 db_1 b_2 db_2 E(t_a) h(\bar{x}_1, x_2, b_1, b_2) S_t(x_2) \times \left\{ r_1 [\phi_1^{p(a)}(x_1, b_1) - \phi_1^v(x_1, b_1)] \phi_2^A(x_2, b_2) \right\}, \quad (4.31)$$

$$F_b = 16\pi C_F Q \int_0^1 dx_1 dx_2 \int_0^\infty b_1 db_1 b_2 db_2 E(t_b) h(x_2, \bar{x}_1, b_2, b_1) S_t(\bar{x}_1) \times \left\{ r_1 \bar{x}_1 [\phi_1^{p(a)}(x_1, b_1) + \phi_1^v(x_1, b_1)] \phi_2^A(x_2, b_2) - 2r_2 \phi_1^T(x_1, b_1) \phi_2^P(x_2, b_2) \right\}, \quad (4.32)$$

$$F_c = -16\pi C_F Q \int_0^1 dx_1 dx_2 \int_0^\infty b_1 db_1 b_2 db_2 E(t_c) h(\bar{x}_2, x_1, b_2, b_1) S_t(x_1) \times \left\{ r_1 x_1 [\phi_1^{p(a)}(x_1, b_1) - \phi_1^v(x_1, b_1)] \phi_2^A(x_2, b_2) + 2r_2 \phi_1^T(x_1, b_1) \phi_2^P(x_2, b_2) \right\}, \quad (4.33)$$

$$F_d = -16\pi C_F Q \int_0^1 dx_1 dx_2 \int_0^\infty b_1 db_1 b_2 db_2 E(t_d) h(x_1, \bar{x}_2, b_1, b_2) S_t(\bar{x}_2) \times \left\{ r_1 [\phi_1^{p(a)}(x_1, b_1) + \phi_1^v(x_1, b_1)] \phi_2^A(x_2, b_2) \right\}, \quad (4.34)$$

演化因子 $E(t_i)$ 与散射硬核 h 的定义如下

$$E(x_1, x_2, b_1, b_2, Q, t_i) = \alpha_s(t_i) \exp[-S_1(x_1, b_1, Q, t_i) - S_2(x_2, b_2, Q, t_i)], \quad (4.35)$$

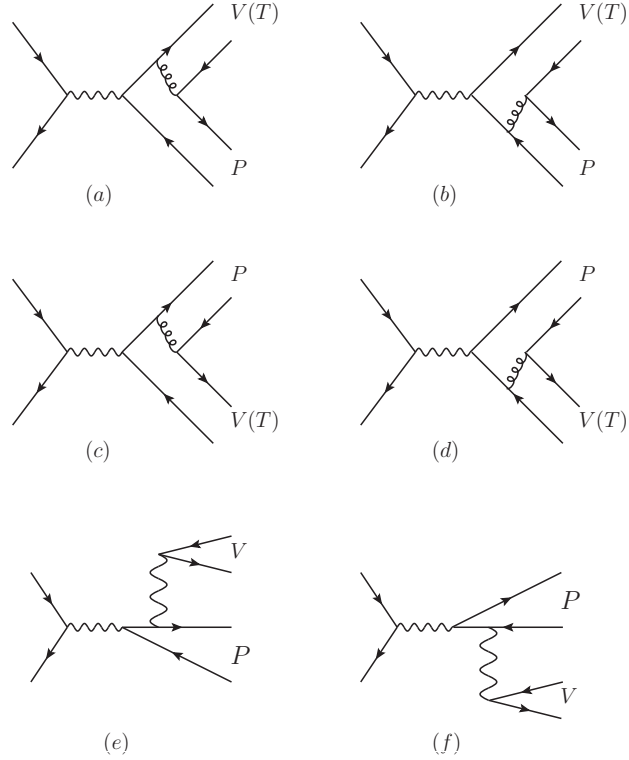


图 4.1 $e^+e^- \rightarrow VP, TP$ 过程的费曼图。前面四个图通过交换一个硬胶子发生，最后两个图末态的中性矢量介子由光子产生。

Fig 4.1 Feynman diagrams for $e^+e^- \rightarrow VP, TP$. In the first four panels, a hard momentum transfer occur through the highly virtual gluon. In the last two panels, the neutral vector meson is generated by a photon.

$$h(x_1, x_2, b_1, b_2, Q) = \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 H_0^{(1)}(\sqrt{x_1 x_2} Q b_1) [\theta(b_1 - b_2) H_0^{(1)}(\sqrt{x_2} Q b_1) J_0(\sqrt{x_2} Q b_2) + \theta(b_2 - b_1) H_0^{(1)}(\sqrt{x_2} Q b_2) J_0(\sqrt{x_2} Q b_1)], \quad (4.36)$$

其中 J_0 与 $H_0^{(1)}$ 是贝塞尔函数。我们采用标记 $\bar{x} = 1 - x$, $r_i = m_i/Q$ ($i = 1, 2$), m_i 是强子的质量。 t 为硬散射的标度

$$t_a = \max(\sqrt{x_2} Q, 1/b_1, 1/b_2), \quad t_b = \max(\sqrt{\bar{x}_1} Q, 1/b_1, 1/b_2), \\ t_c = \max(\sqrt{x_1} Q, 1/b_1, 1/b_2), \quad t_d = \max(\sqrt{\bar{x}_2} Q, 1/b_1, 1/b_2). \quad (4.37)$$

对阈值重求和因子 $S_t(x, Q)$, 我们采用依赖于 Q 的参数化形式

$$S_t(x, Q) = \frac{2^{1+2c} \Gamma(3/2 + c)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + c)} [x(1 - x)]^c, \quad (4.38)$$

其中 c 为依赖于 Q 的参数

$$c(Q^2) = 0.04Q^2 - 0.51Q + 1.87, \quad (4.39)$$

形状因子的因子化公式对强子的分布振幅具有依赖关系。在考虑SU(3)味道对称性时，由于介子的分布振幅满足对称或者反对称性（交换介子中正反夸克的动量分数），所以形状因子的因子化公式也具有相关的对称性

$$F_a(VP) = F_d(VP), \quad F_b(VP) = F_c(VP), \quad (4.40)$$

$$F_a(TP) = -F_d(TP), \quad F_b(TP) = -F_c(TP). \quad (4.41)$$

通常奇异夸克会破坏SU(3)轻夸克味道对称性（奇异夸克 s 的质量远大于上(u)、下(d)夸克的质量），所以对于末态含有奇异介子的过程，上述的对称性需要进一步修正。

矢量介子辐射出一个光子的过程-光子增强过程，如图4.1(e,f)，对 $e^+e^- \rightarrow PV$ 过程的总截面也具有一定的贡献。尽管该过程受到电磁顶点 α_{em} 的压低，但与前面四个图的胶子传播子（ $\sim 1/s$ ）[99,100]相比，几乎在壳的光子传播子（ $1/m_V^2$ ）可以加强这类过程的贡献。由于不含端点发散问题，所以这类过程也可以通过共线因子化理论计算。经过计算我们发现这两个光子增强过程对PV形状因子的贡献相同

$$F_e = F_f = \frac{12\pi\alpha_{em}^2 f_P f_V}{m_V s} (1 + a_2^P). \quad (4.42)$$

通过6个振幅 F_{a-f} 的组合，我们可以得到 $e^+e^- \rightarrow VP$ 过程的振幅结果

$$F_{\rho^+\pi^-} = F_{\rho^-\pi^+} = \frac{1}{3} [F_a(\rho\pi) + F_b(\rho\pi)], \quad (4.43)$$

$$F_{\rho^0\pi^0} = \frac{1}{3} [F_a(\rho\pi) + F_b(\rho\pi)] + \frac{1}{6} [F_e(\rho\pi) + F_f(\rho\pi)], \quad (4.44)$$

$$F_{K^{*+}K^-} = \frac{2}{3} [F_a(K^*K) + F_b(K^*K)] - \frac{1}{3} [F_c(K^*K) + F_d(K^*K)], \quad (4.45)$$

$$F_{K^{*-}K^+} = -\frac{1}{3} [F_a(K^*K) + F_b(K^*K)] + \frac{2}{3} [F_c(K^*K) + F_d(K^*K)], \quad (4.46)$$

$$F_{K^{*0}\bar{K}^0} = F_{\bar{K}^{*0}K^0} = -\frac{1}{3} [F_a(K^*K) + F_b(K^*K)] - \frac{1}{3} [F_c(K^*K) + F_d(K^*K)], \quad (4.47)$$

$$F_{\omega\pi^0} = [F_a(\omega\pi) + F_b(\omega\pi)] + \frac{1}{18} [F_e(\omega\pi) + F_f(\omega\pi)], \quad (4.48)$$

$$F_{\phi\pi^0} = \frac{\sqrt{2}}{18} [F_e(\phi\pi) + F_f(\phi\pi)]. \quad (4.49)$$

$e^+e^- \rightarrow V(T)\eta^{(\prime)}$ 过程的形状因子可以表示为 η_q 与 η_s 的混合

$$F_{V(T)\eta} = \cos\theta F_{V(T)\eta_q} - \sin\theta F_{V(T)\eta_s}, \quad (4.50)$$

$$F_{V(T)\eta'} = \sin\theta F_{V(T)\eta_q} + \cos\theta F_{V(T)\eta_s}, \quad (4.51)$$

这里 $V = \rho^0, \omega, \phi$, 它们的振幅关系如下

$$F_{\rho^0\eta_q} = [F_a(\rho\eta_q) + F_b(\rho\eta_q)] + \frac{5}{18}[F_e(\rho\eta_q) + F_f(\rho\eta_q)], \quad (4.52)$$

$$F_{\rho^0\eta_s} = -\frac{\sqrt{2}}{6}[F_e(\rho\eta_s) + F_f(\rho\eta_s)], \quad (4.53)$$

$$F_{\omega\eta_q} = \frac{1}{3}[F_a(\omega\eta_q) + F_b(\omega\eta_q)] + \frac{5}{54}[F_e(\omega\eta_q) + F_f(\omega\eta_q)], \quad (4.54)$$

$$F_{\omega\eta_s} = -\frac{\sqrt{2}}{18}[F_e(\omega\eta_s) + F_f(\omega\eta_s)], \quad (4.55)$$

$$F_{\phi\eta_q} = -\frac{5\sqrt{2}}{54}[F_e(\phi\eta_q) + F_f(\phi\eta_q)], \quad (4.56)$$

$$F_{\phi\eta_s} = -\frac{2}{3}[F_a(\phi\eta_s) + F_b(\phi\eta_s)] - \frac{1}{27}[F_e(\phi\eta_s) + F_f(\phi\eta_s)]. \quad (4.57)$$

根据等式(4.41), 我们得到 $e^+e^- \rightarrow PT$ 过程的振幅结果

$$F_{a_2^+\pi^-} = -F_{a_2^-\pi^+} = [F_a(a_2\pi) + F_b(a_2\pi)], \quad (4.58)$$

$$F_{K_2^{*+}K^-} = \frac{2}{3}[F_a(K_2^*K) + F_b(K_2^*K)] - \frac{1}{3}[F_c(K_2^*K) + F_d(K_2^*K)], \quad (4.59)$$

$$F_{K_2^{*-}K^+} = -\frac{1}{3}[F_a(K_2^*K) + F_b(K_2^*K)] + \frac{2}{3}[F_c(K_2^*K) + F_d(K_2^*K)], \quad (4.60)$$

$$F_{K_2^{*0}\bar{K}^0} = F_{\bar{K}_2^{*0}K^0} = -\frac{1}{3}[F_a(K_2^*K) + F_b(K_2^*K)] - \frac{1}{3}[F_c(K_2^*K) + F_d(K_2^*K)]. \quad (4.61)$$

这里 a_2, K_2^* 分别表示张量介子 $a_2(1320)$ 与 $K_2^*(1430)$ 。

4.1.4 数值结果与分析

在对撞的质心能量分别为 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 与 10.58GeV 时, 并利用等式 (4.31)-(4.34)以及相关输入量, 我们计算出 $e^+e^- \rightarrow VP$ 与 $e^+e^- \rightarrow TP$ 过程的散射截面, 相关数值结果整理在表格 4.2中 (质心能量为 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 时, 我们引用CLEO-c实验组的相关实验数据 [101, 102]; 质心能量为 $\sqrt{s} = 10.58\text{GeV}$ 时, 我们引用Belle [103] 以及Babar [104]实验组的相关实验数据)。为了考虑横向动量分布函数对结果的影响, 我们在强子分布函数中采用了三种不同的横向分布函数: 方案S1、S2 和S3, 它们分别表示不依赖于横向动量的分布函数, 高斯型的横向分布函数 (公式(4.29)) 和特

表 4.2 $e^+e^- \rightarrow VP, TP$ 在质心能量分别为 $\sqrt{s} = 3.67$ GeV 与 $\sqrt{s} = 10.58$ GeV 时的散射截面。表格中方案 S1 表示不依赖横向动量的强子分布函数, S2 与 S3 分别表示等式(4.29)与等式(4.30)中定义的含横向动量的强子分布振幅。实验测量的结果 [101–104] 在表格最后一列, 计算的误差来自于 $\Lambda_{\text{QCD}} = (0.25 \pm 0.05)\text{GeV}$, 以及硬标度 t 从 $0.75t$ 变动到 $1.25t$ (但不变动 $1/b_i$)。

Tab 4.2 Cross sections of $e^+e^- \rightarrow VP, TP$ at $\sqrt{s} = 3.67$ GeV and $\sqrt{s} = 10.58$ GeV. S1 denotes the calculation without intrinsic transverse momentum distribution, S2 and S3 are obtained with the distributions as (4.29) and (4.30). The experimental measurements from Refs. [101–104] are also shown. Theoretical errors are obtained by varying $\Lambda_{\text{QCD}} = (0.25 \pm 0.05)\text{GeV}$, and the factorization scale t from $0.75t$ to $1.25t$ (without changing $1/b_i$).

Channel	$\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$				$\sqrt{s} = 10.58\text{GeV}$			
	$\sigma_{S1}(\text{pb})$	$\sigma_{S2}(\text{pb})$	$\sigma_{S3}(\text{pb})$	$\sigma_{\text{exp}}(\text{pb})$	$\sigma_{S1}(\text{fb})$	$\sigma_{S2}(\text{fb})$	$\sigma_{S3}(\text{fb})$	$\sigma_{\text{exp}}(\text{fb})$
$\rho^\pm \pi^\mp$	6.80 ± 1.18	3.38 ± 0.53	3.95 ± 0.63	$4.8^{+1.5+0.5}_{-1.2-0.5}$	0.66 ± 0.10	0.53 ± 0.08	0.60 ± 0.09	
$\rho^0 \pi^0$	3.38 ± 0.60	1.69 ± 0.27	1.99 ± 0.32	$3.1^{+1.0+0.4}_{-1.2-0.4}$	0.25 ± 0.05	0.20 ± 0.04	0.23 ± 0.04	
$K^{*\pm} K^\mp$	10.13 ± 0.91	5.27 ± 0.50	5.39 ± 0.35	$1.0^{+1.1+0.5}_{-0.7-0.5}$	1.15 ± 0.10	0.94 ± 0.08	1.02 ± 0.08	$0.18^{+0.14+0.02}_{-0.12-0.02}$
$K^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}^{*0} K^0$	61.94 ± 13.76	31.34 ± 6.15	31.85 ± 6.25	$23.5^{+4.6+3.1}_{-3.9-3.1}$	6.65 ± 1.20	5.39 ± 0.93	5.88 ± 1.02	$7.48^{+0.67+0.51}_{-0.67-0.51}$
$\omega \pi^0$	24.94 ± 4.59	12.41 ± 2.08	15.18 ± 2.59	$15.2^{+2.8+1.5}_{-2.4-1.5}$	2.38 ± 0.40	1.90 ± 0.31	2.16 ± 0.35	
$\phi \pi^0$	1.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	< 2.2	2.2×10^{-3}	2.2×10^{-3}	2.2×10^{-3}	
$\rho^0 \eta$	14.37 ± 2.10	7.21 ± 0.96	8.10 ± 1.06	$10.0^{+2.2+1.0}_{-1.9-1.0}$	1.10 ± 0.13	0.89 ± 0.11	1.03 ± 0.12	
$\rho^0 \eta'$	8.22 ± 1.19	4.10 ± 0.54	4.57 ± 0.59	$2.1^{+4.7+0.2}_{-1.6-0.2}$	1.03 ± 0.11	0.83 ± 0.09	0.93 ± 0.10	
$\omega \eta$	1.31 ± 0.20	0.65 ± 0.09	0.77 ± 0.11	$2.3^{+1.8+0.5}_{-1.0-0.5}$	0.10 ± 0.01	0.081 ± 0.011	0.094 ± 0.012	
$\omega \eta'$	0.75 ± 0.11	0.37 ± 0.05	0.43 ± 0.06	< 17.1	0.094 ± 0.011	0.076 ± 0.009	0.086 ± 0.010	
$\phi \eta$	17.82 ± 3.34	9.21 ± 1.51	8.23 ± 1.32	$2.1^{+1.9+0.2}_{-1.2-0.2}$	2.11 ± 0.30	1.75 ± 0.23	1.84 ± 0.25	$2.9^{+0.5+0.1}_{-0.5-0.1}$
$\phi \eta'$	21.97 ± 4.13	11.36 ± 1.87	10.20 ± 1.65	< 12.6	2.81 ± 0.42	2.31 ± 0.33	2.47 ± 0.35	
$a_2^\pm \pi^\mp$	43.88 ± 13.98	20.34 ± 6.59	28.96 ± 8.62		6.66 ± 1.73	4.96 ± 1.30	6.06 ± 1.58	
$K_2^{*\pm} K^\mp$	60.57 ± 15.89	27.81 ± 7.45	33.81 ± 8.98		11.48 ± 2.45	8.48 ± 1.79	9.98 ± 2.15	$8.36^{+0.95+0.62}_{-0.95-0.62}$
$K_2^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0} K^0$	3.2×10^{-2}	1.1×10^{-2}	1.3×10^{-2}		8.8×10^{-3}	6.0×10^{-3}	7.3×10^{-3}	$1.65^{+0.86+0.27}_{-0.78-0.27}$

殊的横向分布函数 (公式(4.30))。数值计算的误差来自于 $\Lambda_{\text{QCD}} = (0.25 \pm 0.05)\text{GeV}$, 以及硬标度 t 变动 25%。

上述的数值结果表明:

- 在不同质心能量下的截面结果, 可以用来验证截面的 $1/s^n$ 依赖性。当质心能量取 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 和 10.58GeV 时, 从 $e^+e^- \rightarrow VP$ 过程中, 我们拟合出截面的依赖性参数为 $n = 4.1$, 从 $e^+e^- \rightarrow TP$ 过程中拟合出的相关参数为 $n = 3.9$, 因此对截面依赖性的平均值接近 $1/s^4$, 这个结果与组分标度规则 (the constituent scaling rule [105, 106]) 的结论一致。实验从 $e^+e^- \rightarrow K^*(892)^0 \bar{K}^0$ 和 $\omega \pi^0$ 过程中拟合的参数为 $n = 3.83 \pm 0.07$ 与 3.75 ± 0.12 [103]。
- 表格 4.2 中的许多过程, 如在质心能量 $\sqrt{s} = 10.58\text{GeV}$ 时 $e^+e^- \rightarrow \rho \pi, \rho \eta, \omega \pi$ 和 $a_2^\pm \pi^\mp$ 的过程, 以及在质心能量 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 时 $e^+e^- \rightarrow a_2^\pm \pi^\mp, K_2^{*\pm} K^\mp$ 的过程, 它们的截面大小都在目前实验可测量的范围内, 因此这些过程可以在将来的 BESIII [107] 或者 Belle-II 实验中进行验证。
- 在实验方面, 带电 K^* 介子是通过三体衰变过程 $K^{*\pm} \rightarrow K^0 \pi^\pm \rightarrow 3\pi$ 来重建的, 由于该过程会产生很大的系统误差, 所以对于 $e^+e^- \rightarrow K^{*\pm} K^\mp$ 的过程目前还没

有精确的实验结果 [102]。我们的计算结果比目前实验给出的数据大许多，因此我们期望未来的实验能够对该过程进行精确的测量。

- 在 $e^+e^- \rightarrow VP$ 过程中，如果忽略光子增强过程的振幅 $F_{e,f}$ ，并假定SU(3)味道对称性保持良好，那么我们可以得到如下的截面关系： $\sigma(\omega\pi^0) : \sigma(\rho^\pm\pi^\mp) : \sigma(\rho^0\pi^0) : \sigma(K^{*\pm}K^\mp) : \sigma(K^{*0}\bar{K}^0 + \bar{K}^{*0}K^0) = 1 : 2/9 : 1/9 : 2/9 : 8/9$ 。
- 在质心能量为 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 时，我们可以得到如下截面关系： $\sigma(e^+e^- \rightarrow \rho^\pm\pi^\mp) = 2\sigma(e^+e^- \rightarrow \rho^0\pi^0)$ ；然而当质心能量为 $\sqrt{s} = 10.58\text{GeV}$ 时，光子增强过程的贡献将变大，此时截面的比值 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \rho^\pm\pi^\mp)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \rho^0\pi^0)$ 达到2.5。
- 在SU(3)对称性下，截面的比值 $\sigma(\omega\pi^0)/\sigma(K^{*0}\bar{K}^0 + \bar{K}^{*0}K^0) = 9/8 > 1$ ，然而相关的计算结果表明截面 $\sigma(\omega\pi^0)$ 比截面 $\sigma(e^+e^- \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0 + \bar{K}^{*0}K^0)$ 小2到3倍，可能的解释是衰变常数 $f_\pi f_\omega$ 比 $f_K f_{K^*}$ 小30%左右。此外手征质量参数 m_0^K 的不同也会进一步影响这两个过程的截面大小。
- 对于 $e^+e^- \rightarrow K^*K$ 与 $e^+e^- \rightarrow K_2^*K$ 的过程，实验上利用比值参数 R_{VP} 与 R_{TP} 来描述它们的SU(3)破坏效应，比值参数分别定义如下：

$$R_{VP} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow K^*(892)^0\bar{K}^0)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow K^*(892)^-K^+)}, \quad R_{TP} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow K_2^*(1430)^0\bar{K}^0)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow K_2^*(1430)^-K^+)}. \quad (4.62)$$

在PQCD的理论框架下，上述的比值参数可以表示为振幅的比值形式

$$R = \left| \frac{(F_a + F_b) + (F_c + F_d)}{2(F_a + F_b) - (F_c + F_d)} \right|^2 = \left| \frac{1 + \frac{F_c+F_d}{F_a+F_b}}{2 - \frac{F_c+F_d}{F_a+F_b}} \right|^2. \quad (4.63)$$

在SU(3)味道对称性下，当我们交换波函数中夸克与反夸克的动量分数时， K, K^* 与 K_2^* 的波函数具有对称或反对称的性质（等式(4.40)），据此我们得到比值参数 $R_{VP} = 4$ 。由于 $\bar{s}s$ 夸克对的质量大于轻夸克对的质量（ s 夸克的质量远大于轻夸克 $q(=u, d)$ 的质量），所以胶子更容易产生一对轻夸克 $\bar{q}q$ ，因此胶子与 $\bar{q}q$ 之间的耦合常数大于它与 $\bar{s}s$ 之间的耦合常数。综合上述讨论，振幅 $|F_a + F_b|$ 将小于振幅 $|F_c + F_d|$ ，它们之间的比值大于4。

这与我们的理论计算结果相吻合

$$R_{VP}(\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}) \simeq 5.99, \quad R_{VP}(\sqrt{s} = 10.58\text{GeV}) \simeq 5.76. \quad (4.64)$$

- 当质心能量 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 时, CLEO-c 实验组 [102] 给出的比值参数的测量结果为

$$R_{VP}^{Exp}(\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}) = 23.5_{-26.1}^{+17.1} \pm 12.2, \quad (4.65)$$

实验结果的中心值与误差范围都很大, 所以在考虑中心值与误差修正后, 实验的结果能够与我们的理论计算结果相吻合。

在质心能量分别为 $\sqrt{s} = 10.52\text{GeV}$, 10.58GeV 与 10.876GeV 时, Belle 实验组给出比值参数的测量结果 [103] 为:

$$R_{VP}^{Exp} > 4.3, \quad 20.0, \quad 5.4. \quad (4.66)$$

在质心能量接近 10.58GeV 时, Belle 实验的数据明显超出我们理论计算的结果。我们猜测在质心能量接近 10.58GeV 时, 正反电子的湮灭过程会有共振态 $\Upsilon(4S)$ 的贡献。除去这个可能含 $\Upsilon(4S)$ 共振态的过程, 其他过程的实验结果与我们理论计算的结果相一致。

- 根据电荷共轭不变性, 我们得到了 $e^+e^- \rightarrow TP$ 过程的振幅之间的关系, 见等式 (4.41), 其中只有三个道是允许的: $e^+e^- \rightarrow a_2^\pm \pi^\mp$, $e^+e^- \rightarrow K_2^{*\pm} K^\mp$ 与 $e^+e^- \rightarrow K_2^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0} K^0$ 。

如果进一步假定 V-旋对称性, $e^+e^- \rightarrow K_2^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0} K^0$ 过程的振幅满足 $F_a + F_b \sim -(F_c + F_d)$, 所以 $e^+e^- \rightarrow K_2^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}_2^{*0} K^0$ 过程的截面会被明显压低。根据表格 4.2 的结果, 我们计算出比值参数 R_{TP} :

$$R_{TP} \lesssim 10^{-4}. \quad (4.67)$$

Belle 实验组的测量结果 [103] 与我们的结果一致

$$R_{TP}^{Exp} < 1.1, \quad 0.4, \quad 0.6. \quad (4.68)$$

- 在理论计算时, 不确定度主要来自于介子波函数。B 介子的纵向动量分布函数具有大约 10% – 20% 的不确定度 [108]。当我们考虑横向动量分布函数 (等式 (4.29) 与等式 (4.30)) 时, 在大的 b 区域中, 波函数的贡献会被压低, 因此这个压低效应保证了 PQCD 方法的自洽性。从表格 4.2 的结果中, 我们可以明显的观察到横向动量分布函数的压低效应。在质心能量为 $\sqrt{s} = 3.67\text{GeV}$ 时: S2 方案对截面的压低效应达到 50%, S3 方案的压低也达到 40%。

- 在理论的计算中，我们仅考虑到领头阶的精度，次领头阶的计算非常复杂。这里我们可以大致的估计次领头阶的大小，变化 Λ_{QCD} 与硬标度 t ： $\Lambda_{\text{QCD}} = (0.25 \pm 0.05)\text{GeV}$ ，硬标度 t 从 $0.75t$ 变到 $1.25t$ （不变动 $1/b_i$ ）。计算结果表明，次领头阶(NLO)的贡献非常小。

4.2 $B_s \rightarrow D^0 \pi \pi$ 三体衰变

在b物理中， B 介子的两体衰变过程已经取得了很好的研究，而 B 介子的多体非轻衰变过程因为具有更复杂的相互作用，因此需要我们对它进行仔细的讨论。目前对 B/B_s 介子三体衰变过程的研究已经取得了一些重要的进展 [109–114]。最近LHCb实验组通过测量 B 介子三体衰变过程发现了不同相空间的直接CP破坏效应 [115]。所以对 B/B_s 多体过程的研究可以为我们探索新物理以及发展标准模型的唯一象提供新的途径。

PQCD方法已经成功运用到 B 介子的两体衰变中。在 B/B_s 的三体衰变过程中，如果末态中两个强子沿着共线方向运动，那么共线的两个强子可以用一个非微扰的系统波函数来描述，此时三体衰变过程约化为一个类两体的过程，因此我们就可以应用PQCD方法来处理这些过程。此外为了正确地描述共线强子的行为，其非微扰波函数还需要考虑共振态与非共振态的贡献。LHCb实验对 $B_s \rightarrow J/\psi(\pi^+\pi^-)_S$ 三体衰变过程的测量 [115]表明，S-波 $\pi\pi$ 波函数的共振态包含 $f_0(500)$ 、 $f_0(980)$ 、 $f_0(1500)$ 、 $f_0(1790)$ 的贡献。在PQCD框架下的计算也验证了这个结论 [116]。本节我们将关注于 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 三体过程，该过程的CP本征态包含衰变振幅的干涉 $b \rightarrow c\bar{u}s$ ($b \rightarrow u\bar{c}s$)，由于对CKM幺正三角形中 γ 角比较敏感，因此该过程对 γ 的精确测量有重要帮助。我们将采用PQCD方法计算该三体过程，利用 $\pi\pi$ 系统波函数描述共线运动的 $\pi\pi$ ，并考虑 $B_s \rightarrow D(f_0(500) + f_0(980) + f_0(1500) + f_0(1790)) \rightarrow D[(\pi^+\pi^-)_S]$ 的过程，其中的共振态 $f_0(500)$ 、 $f_0(1500)$ 、 $f_0(1790)$ 与共振态 $f_0(980)$ 分别应用Breit-Wigner(BW)模型 [117]以及Flatté模型 [118]来描述。

4.2.1 重介子与S-波 $\pi\pi$ 系统的光锥分布振幅

重介子 B_s 的波函数定义与 B 介子波函数定义 (3.48)类似，在光锥坐标系下它的定义为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} e^{ik_1 \cdot z} \langle 0 | b_\alpha(0) \bar{q}_\beta(z) | \bar{B}_s(P_{B_s}) \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{2N_c}} \left\{ (P_{B_s} + m_{B_s}) \gamma_5 \left[\phi_{B_s}(k_1) + \frac{\not{n} - \not{\psi}}{\sqrt{2}} \bar{\phi}_{B_s}(k_1) \right] \right\}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

这里 $n = (1, 0, 0_T)$ 与 $v = (0, 1, 0_T)$ 分别是两个光锥矢量。 B_s 介子具有两个独立的光锥分布振幅 ϕ_{B_s} 与 $\bar{\phi}_{B_s}$ ，它们的归一化满足

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \phi_{B_s}(k_1) = \frac{f_{B_s}}{2\sqrt{2N_c}}, \quad \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \bar{\phi}_{B_s}(k_1) = 0, \quad (4.70)$$

其中 f_{B_s} 是 B_s 介子的衰变常数。由于分布振幅 $\bar{\phi}_{B_s}(k_1)$ 是扭度压低的，所以我们只保留分布振幅 $\phi_{B_s}(k_1)$ 。在动量空间中 B_s 波函数重新表示为

$$\Phi_{B_s} = \frac{i}{\sqrt{2N_c}} (\not{P}_{B_s} + m_{B_s}) \gamma_5 \phi_{B_s}(k_1). \quad (4.71)$$

由于 B_s 介子中轻夸克 s 的动量是软的，所以在硬散射过程的计算中， k^+ 或 k^- 分量可以被积掉。于是波函数 $\phi_{B_s}(x, k_\perp)$ 在 k_\perp 的共轭 b 空间中的形式如下

$$\Phi_{B_s}(x, b)_{\alpha\beta} = \frac{i}{\sqrt{2N_c}} [(\not{P}_{B_s} + m_{B_s}) \gamma_5]_{\alpha\beta} \phi_{B_s}(x, b), \quad (4.72)$$

x 是 B_s 介子中轻夸克 s 携带的动量分数。对于光锥分布振幅 $\phi_{B_s}(x, b)$ ，我们采用如下的含横向动量依赖的参数化形式

$$\phi_{B_s}(x, b) = N_{B_s} x^2 (1-x)^2 \exp\left[-\frac{m_{B_s}^2 x^2}{2\omega_b^2} - \frac{(\omega_b b)^2}{2}\right], \quad (4.73)$$

其中 N_{B_s} 是分布振幅的归一化因子，可以通过在 $b = 0$ 的归一化条件得到。我们采用 $\omega_b = (0.50 \pm 0.05)\text{GeV}$ 与 $f_{B_s} = (0.23 \pm 0.03)\text{GeV}$ ，得到归一化系数为 $N_{B_s} = 63.58$ [119]。

粲介子 D 也属于重-轻介子系统，波函数定义见等式 (3.49)。其中光锥分布振幅 $\phi_D(k_2)$ 的归一化条件

$$\int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \phi_D(k_2) = \frac{f_D}{2\sqrt{2N_c}}, \quad (4.74)$$

这里 f_D 是粲介子的衰变常数，手征质量参数为 $m_D^0 = \frac{m_D^2}{m_c + m_d} = m_D + \mathcal{O}(\Lambda)$ 。对于光锥分布振幅，我们采用简单模型来描述 [120]

$$\phi_D(x_2, b_2) = \frac{f_D}{2\sqrt{2N_c}} 6x_2(1-x_2)[1 + C_D(1-2x_2)] \exp\left[-\frac{\omega_D^2 b_2^2}{2}\right], \quad (4.75)$$

其中 C_D 为分布振幅的自由形状参数，我们取 $C_D = 0.5 \pm 0.1$ 。衰变常数 f_D 及参数 ω_D 分别取 $f_D = 0.221 \pm 0.018\text{GeV}$ 与 $\omega_D = 0.1$ [121]。

S-波两pion系统波函数的定义见等式 (3.47)，它的光锥分布振幅采用对称的参数化形式 [122, 123]

$$\Phi_{\pi\pi} = \frac{F_s(m_{\pi\pi}^2)}{2\sqrt{2N_c}} a_2 6z(1-z)3(2z-1), \quad \Phi_{\pi\pi}^s = \frac{F_s(m_{\pi\pi}^2)}{2\sqrt{2N_c}}, \quad \Phi_{\pi\pi}^T = \frac{F_s(m_{\pi\pi}^2)}{2\sqrt{2N_c}}(1-2z). \quad (4.76)$$

这里的 $F_s(m_{\pi\pi}^2)$ 与 a_2 分别是类时形状因子及Gegenbauer矩。对于由 $s\bar{s}$ 形成的两pion系统，我们考虑可能形成的共振态分别为 $f_0(980)$ 、 $f_0(1500)$ 与 $f_0(1790)$ ；对于由 $u\bar{u}$ 形成的两pion系统，我们则认为其共振态主要来自于 $f_0(500)$ 。它们的类时形状因子的定义如下

$$\begin{aligned} F_s^{s\bar{s}}(m_{\pi\pi}^2) &= \frac{c_1 m_{f_0(980)}^2 e^{i\theta_1}}{m_{f_0(980)}^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_{f_0(980)}(g_{\pi\pi}\rho_{\pi\pi} + g_{KK}\rho_{KK})} \\ &+ \frac{c_2 m_{f_0(1500)}^2 e^{i\theta_2}}{m_{f_0(1500)}^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_{f_0(1500)}\Gamma_{f_0(1500)}(m_{\pi\pi}^2)} \\ &+ \frac{c_3 m_{f_0(1790)}^2 e^{i\theta_3}}{m_{f_0(1790)}^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_{f_0(1790)}\Gamma_{f_0(1790)}(m_{\pi\pi}^2)}, \\ F_s^{u\bar{u}}(m_{\pi\pi}^2) &= \frac{c_0 m_{f_0(500)}^2}{m_{f_0(500)}^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_{f_0(500)}\Gamma_{f_0(500)}(m_{\pi\pi}^2)}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

c_0, c_i 与 $\theta_i, i = 1, 2, 3$ 是可调参数。我们采用经典的Breit-Wigner(BW)公式来描述共振态 $f_0(500)$ 、 $f_0(1500)$ 及 $f_0(1790)$ 的行为

$$\frac{1}{m_S^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_S\Gamma_S(m_{\pi\pi})}, \quad (4.78)$$

其中 m_S 是共振态的极点质量， $\Gamma_S(m_{\pi\pi})$ 是S-波共振态衰变到两pion的宽度。由于共振态 $f_0(980)$ 的质量接近 $K\bar{K}$ 的阈值，所以BW模型并不能很好的描述它，因此对于共振态 $f_0(980)$ ，我们采用Flatté模型来描述

$$\frac{1}{m_{f_0(980)}^2 - m_{\pi\pi}^2 - im_{f_0(980)}(g_{\pi\pi}\rho_{\pi\pi} + g_{KK}\rho_{KK})}, \quad (4.79)$$

相空间因子 $\rho_{\pi\pi}$ 与 ρ_{KK} 的定义为 [117]

$$\rho_{\pi\pi} = \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^\pm}^2}{m_{\pi\pi}^2}} + \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^0}^2}{m_{\pi\pi}^2}}, \quad \rho_{KK} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4m_{K^\pm}^2}{m_{\pi\pi}^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4m_{K^0}^2}{m_{\pi\pi}^2}}. \quad (4.80)$$

4.2.2 PQCD微扰计算

$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{Qb} V_{qs} (C_1 \mathcal{O}_1 + C_2 \mathcal{O}_2), \quad (Q = c, u, q = u, c). \quad (4.81)$$

其中 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0\pi^+\pi^-$ 过程有效算符为 $\mathcal{O}_1 = (\bar{c}_\alpha b_\beta)_{V-A} (\bar{s}_\beta u_\alpha)_{V-A}$, $\mathcal{O}_2 = (\bar{c}_\alpha b_\alpha)_{V-A} (\bar{s}_\beta u_\beta)_{V-A}$ 。 $\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0\pi^+\pi^-$ 过程的有效算符为 $\mathcal{O}_1 = (\bar{u}_\alpha b_\beta)_{V-A} (\bar{s}_\beta c_\alpha)_{V-A}$, $\mathcal{O}_2 = (\bar{u}_\alpha b_\alpha)_{V-A} (\bar{s}_\beta c_\beta)_{V-A}$ 。利用有效哈密顿量, 我们可以得到 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程相关的费曼图, 如图4.2, 图中的第一行费曼图是色压低发射图, 第二行费曼图是色压低的W玻色子交换图。在PQCD方法中, 通常费曼图可以分为可因子化与不可因子化的费曼图。在 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程中, 可因子化图为图4.2(a,b,e,f), 它们与有效的短程系数 a_2 相关, 不可因子化图为图4.2(c,d,g,h), 它们与短程Wilson系数 C_2 相关[124]。其中短程系数 a_2 的表示如下

$$a_1 = C_2 + C_1/N_c, \quad a_2 = C_1 + C_2/N_c. \quad (4.82)$$

我们采用光锥坐标系对动力学过程进行计算, 其中初末态介子的动量分别为

$$P_{B_s} = (p_1^+, p_1^-, 0_\perp), \quad P_{\pi\pi} = (p_2^+, 0, 0_\perp), \quad P_D = (p_1^+ - p_2^+, m_{B_s}^2/(2p_1^+), 0_\perp). \quad (4.83)$$

转移动量可以表示为 $q^2 = (P_{B_s} - P_{\pi\pi})^2 = (1 - \rho)m_{B_s}^2$, $\rho = 1 - \frac{m_D}{m_{B_s}}$, $p_1^- = m_{B_s}^2/(2p_1^+)$ 与 $p_2^+ = (m_{B_s}^2 - q^2)p_1^+/m_{B_s}^2$ 。在重夸克近似下, b 夸克(c 夸克)与 $B_s(D)$ 介子之间的质量区别可以忽略 $m_{B_s, D} = m_{b, c} + \bar{\Lambda}$ ($\bar{\Lambda}$ 是QCD标度)。在 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程中, $m_{B_s} \gg m_D \gg \bar{\Lambda}$, 因此我们可以分别对 $\frac{m_D}{m_{B_s}}$, $\frac{\bar{\Lambda}}{m_D}$ 以及更高阶 $\frac{\bar{\Lambda}}{m_{B_s}}$ 进行展开。领头阶的展开满足 $\rho \sim 1$, $q^2 \sim 0$ 。介子中轻夸克的动量分别为(其中 k_1 、 k_3 分别是 B_s 、 D 介子中轻夸克的动量, k_2 是两pion系统中正夸克的动量)

$$k_1 = (0, x_1 P_{B_s}^-, k_{1\perp}), \quad k_2 = (x_2 P_{\pi\pi}^+, 0, k_{2\perp}), \quad k_3 = (0, x_3 P_D^-, k_{3\perp}). \quad (4.84)$$

首先考虑末态为 D^0 的过程, 基于PQCD方法, 我们得到发射图的因子化公式如下(用下标 e_x ($x=1,2,3,4$)表示)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e_{12}} = & 8\pi C_F m_{B_s}^4 f_D \int_0^1 dx_1 dx_2 \int_0^{1/\Lambda} b_1 db_1 b_3 db_2 \phi_B(x_1, b_1) \{ E_{e_1}(t_{e_1}) h_{e_1}(x_1, x_2, b_1, b_2) \\ & a_2(t_{e_1}) [r_0(1 - 2x_2)(\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) - \phi_{s\bar{s}, \pi\pi}^T(x_2)) + (2 - x_2)\phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)] \\ & - 2r_0\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) E_{e_2}(t_{e_2}) h_{e_2}(x_1, x_2, b_1, b_2) a_2(t_{e_2}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{e34} = & \frac{32\pi C_F m_{B_s}^4}{\sqrt{2N_c}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_1 db_1 b_3 db_3 \phi_B(x_1, b_1) \phi_D(\bar{x}_3, b_3) C_2(t_{e_3}) \\
& \{ E_{e_3}(t_{e_3}) h_{e_3}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_3) [r_0 \bar{x}_2 (\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) - \phi_{\pi\pi}^T(s\bar{s}, x_2)) + x_3 \phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)] \\
& - E_{e_4}(t_{e_4}) h_{e_4}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_3) [r_0 \bar{x}_2 (\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) - \phi_{\pi\pi}^T(s\bar{s}, x_2)) \\
& + (\bar{x}_3 + \bar{x}_2) \phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)] \}, \tag{4.85}
\end{aligned}$$

其中 $r_0 = \frac{m_{\pi\pi}}{m_{B_s}}$, C_F 是色因子。 $\phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)$ 表示通过 $s\bar{s}$ 算符定义的两pion分布振幅。与硬核相关的因子 E_{e_x} 与 h_{e_x} 可以通过内线夸克与胶子来确定，它们的具体表示形式将在下文给出。

末态为 D^0 的 W 玻色子交换图的因子化公式分别为 \mathcal{M}_{w12} 与 \mathcal{M}_{w34}

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{w12} = & 8\pi C_F m_{B_s}^4 f_{B_s} \int_0^1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_2 db_2 b_3 db_3 \phi_D(x_3, b_3) \{ E_{w_1}(t_{w_1}) \\
& h_{w_1}(x_2, x_3, b_2, b_3) a_2(t_{w_1}) [x_3 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) + 2r_0 r_D (x_3 + 1) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2)] \\
& - [x_2 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) - r_0 r_D (2x_2 + 1) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) + r_0 r_D (1 - 2x_2) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] \\
& E_{w_2}(t_{w_2}) h_{w_2}(x_2, x_3, b_2, b_3) a_2(t_{w_2}) \}, \\
\mathcal{M}_{w34} = & \frac{32\pi C_F m_{B_s}^4}{\sqrt{2N_c}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_1 db_1 b_2 db_2 \phi_{B_s}(x_1, b_1) \phi_D(x_3, b_2) \{ E_{w_3}(t_{w_3}) \\
& h_{w_3}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_2) C_2(t_{w_3}) [x_2 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) + r_0 r_D (x_2 + x_3) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) \\
& + r_0 r_D (x_2 - x_3) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] + [-x_3 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) \\
& - r_0 r_D (x_2 + x_3 + 2) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) + r_0 r_D (x_2 - x_3) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] \\
& E_{w_4}(t_{w_4}) h_{w_4}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_2) C_2(t_{w_4}) \}, \tag{4.86}
\end{aligned}$$

其中手征因子 $r_D = m_D/m_{B_s}$, 分布振幅 $\phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2)$ 定义在 $u\bar{u}$ 的过程。由于螺旋度压低效应, 可因子化图 \mathcal{M}_{w12} 的贡献被明显压低。因此因子化公式的主要贡献来自于不可因子化图 \mathcal{M}_{w34} 。

其次对于末态为 \bar{D}^0 的过程, 我们利用PQCD方法得到相关发射图与 W 玻色子交换图的因子化公式, 其中两个可因子化发射图的因子化公式与 D^0 发射图的公式相同 $\mathcal{M}_{e12} = \mathcal{M}_{e'12}$, 这里不做重复表述。我们分别给出不可因子化的发射图 $\mathcal{M}_{e'34}$ 、可因子化的 W 玻色子交换图 $\mathcal{M}_{w'12}$ 以及不可因子化的 W 玻色子交换图 $\mathcal{M}_{w'34}$ 的因子化公式如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{e'34} = & \frac{32\pi C_F m_{B_s}^4}{\sqrt{2N_c}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_1 db_1 b_3 db_3 \phi_B(x_1, b_1) \phi_D(\bar{x}_3, b_3) \\
& \{ E_{e'_3}(t_{e'_3}) h_{e'_3}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_3) C_2(t_{e'_3}) [r_0 (\bar{x}_2) (\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) + \phi_{\pi\pi}^T(s\bar{s}, x_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_3 \phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)] - E_{e'_4}(t_{e'_4}) h_{e'_4}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_3) C_2(t_{e'_4}) \\
& [r_0 \bar{x}_2 (\phi_{\pi\pi}^s(s\bar{s}, x_2) - \phi_{\pi\pi}^T(s\bar{s}, x_2)) + (\bar{x}_3 + \bar{x}_2) \phi_{\pi\pi}(s\bar{s}, x_2)] \}, \\
\mathcal{M}_{w'12} = & 8\pi C_F m_{B_s}^4 f_{B_s} \int_0^1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_2 db_2 b_3 db_3 \phi_{\bar{D}}(x_3, b_3) \{ E_{w'_1}(t_{w'_1}) \\
& h_{w'_1}(x_2, x_3, b_2, b_3) a_2(t_{w'_1}) [(1-x_2) \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) + r_0 r_D (2x_2 - 3) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) \\
& + r_0 r_D (1 - 2x_2) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] + [-x_3 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) \\
& + 2r_0 r_D (x_3 + 1) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2)] E_{w'_2}(t_{w'_2}) h_{w'_2}(x_2, x_3, b_2, b_3) a_2(t_{w'_2}) \}, \\
\mathcal{M}_{w'34} = & \frac{32\pi C_F m_{B_s}^4}{\sqrt{2N_c}} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{1/\Lambda} b_1 db_1 b_2 db_2 \phi_{B_s}(x_1, b_1) \phi_{\bar{D}}(x_3, b_2) \{ E_{w'_3}(t_{w'_3}) \\
& h_{w'_3}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_2) C_2(t_{w'_3}) [x_3 \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) - r_0 r_D (1 - x_2 + x_3) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) \\
& + r_0 r_D (x_2 + x_3 - 1) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] + [(x_2 - 1) \phi_{\pi\pi}(u\bar{u}, x_2) \\
& + r_0 r_D (-x_2 + x_3 + 3) \phi_{\pi\pi}^s(u\bar{u}, x_2) + r_0 r_D (x_2 + x_3 - 1) \phi_{\pi\pi}^T(u\bar{u}, x_2)] \\
& E_{w'_4}(t_{w'_4}) h_{w'_4}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_2) C_2(t_{w'_4}) \}. \tag{4.87}
\end{aligned}$$

下面给出与因子化公式相关的参数的表达式。在 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_0 \pi^+ \pi^-$ 过程中，离壳的胶子 β_{e_x}/β_{w_x} 与中间夸克 $\alpha_{e_x}/\alpha_{w_x}$ ($x = 1, 2, 3, 4$) 的解析形式分别为

$$\begin{aligned}
\alpha_{e_1} &= (1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e_2} = x_1 m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e_3} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e_4} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\alpha_{w_1} &= x_3 m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{w_2} = (1-\rho+x_2\rho) m_{B_s}^2, \quad \alpha_{w_3} = x_2 x_3 m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{w_4} = x_2 x_3 m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{e_1} &= x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{e_2} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{e_3} &= [(x_1-x_3)(1-x_2\rho) + (1-\rho)] m_{B_s}^2, \quad \beta_{e_4} = (1-x_2)(x_1+x_3-1) m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{w_1} &= x_2 x_3 m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{w_2} = x_2 x_3 m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{w_3} &= (x_3-x_1) x_2 m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{w_4} = ((1-x_1-x_3)(1-x_2\rho) - 1) m_{B_s}^2. \tag{4.88}
\end{aligned}$$

在 $B_s^0 \rightarrow \bar{D}_0 \pi^+ \pi^-$ 过程中，相关的解析表达式为

$$\begin{aligned}
\alpha_{e'_1} &= (1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e'_2} = x_1 m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e'_3} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{e'_4} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\alpha_{w'_1} &= (1-x_2\rho) m_{B_s}^2, \quad \alpha_{w'_2} = x_3 m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{w'_3} = x_3(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \alpha_{w'_4} = x_3(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{e'_1} &= x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{e'_2} = x_1(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{e'_3} &= (1-x_2)(x_1-x_3) m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{e'_4} = [(x_1+x_3-1)(1-x_2\rho) + (1-\rho)] m_{B_s}^2, \\
\beta_{w'_1} &= x_3(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{w'_2} = x_3(1-x_2) m_{B_s}^2 \rho, \\
\beta_{w'_3} &= (1-x_2)(x_3-x_1) m_{B_s}^2 \rho, \quad \beta_{w'_4} = ((1-x_1-x_3)(1-\rho+x_2\rho) - 1) m_{B_s}^2. \tag{4.89}
\end{aligned}$$

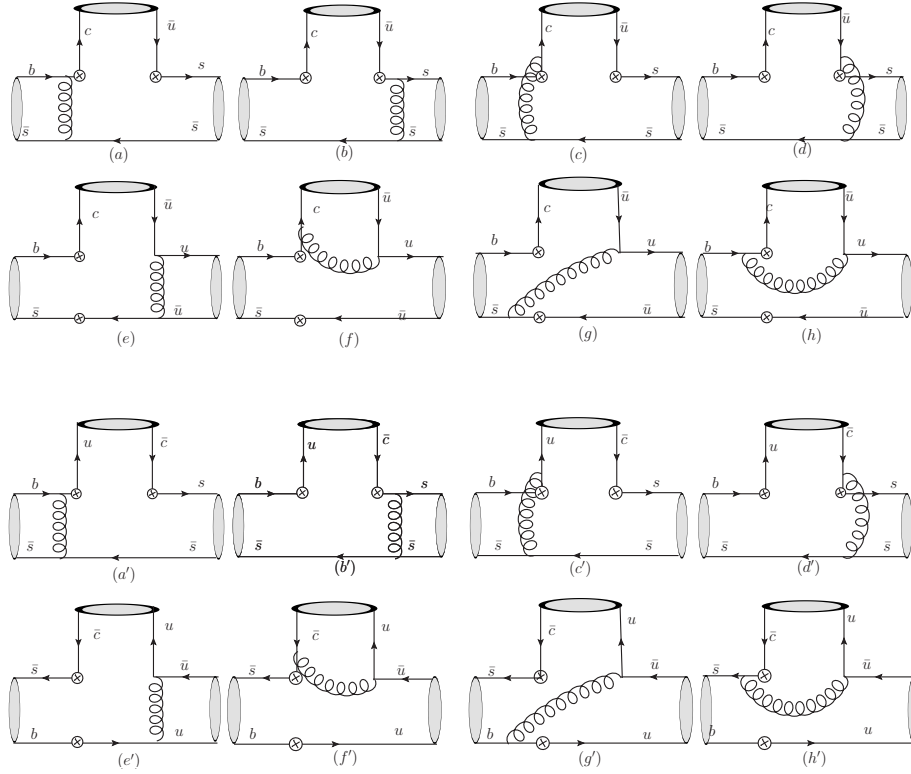


图 4.2 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 三体衰变的费曼图。其中(a-d) 与(a'-d') 图是颜色压低的发射图, (e-h)与(e'-h')图是颜色压低的W玻色子交换图。该三体过程夸克层次对应有效算符 \mathcal{O}_1 、 \mathcal{O}_2 。

Fig 4.2 Typical Feynman diagrams for the three-body decays $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$. For the three-body process, the operators in quark level are $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, which correspond with two kinds of Feynman diagrams: the color-suppressed and the W-exchange. The color-suppressed diagrams are drawn in panels (a-d) and (a'-d'), further more, the W-exchange diagrams are shown in (e-h) and (e'-h').

与硬散射相关的硬核函数 $h_{e_x}(h_{e'_x})$ 与 $h_{w_x}(h_{w'_x})$ 分别为

$$\begin{aligned}
 h_{e_i}(x_1, x_2, b_1, b_2) &= [\theta(b_1 - b_2)I_0(\sqrt{\alpha_{e_i}b_2})K_0(\sqrt{\beta_{e_i}b_1}) + (b_1 \leftrightarrow b_2)]K_0(\sqrt{\beta_{e_i}b_1}) \\
 &\quad S_t(\alpha_{e_i}/(m_{B_s}^2\rho)), \\
 h_{e_j}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_3) &= [\theta(b_1 - b_3)I_0(\sqrt{\alpha_{e_j}b_3})K_0(\sqrt{\beta_{e_j}b_1}) + (b_1 \leftrightarrow b_3)] \\
 &\quad \times \begin{cases} K_0(\sqrt{\beta_{e_j}b_1}), & \beta_{e_j} \geq 0, \\ \frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(\sqrt{|\beta_{e_j}|}b_1), & \beta_{e_j} < 0, \end{cases} \\
 h_{w_k}(x_1, x_2, b_2, b_3) &= \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 H_0^{(1)}(\sqrt{\beta_{w_k}b_2})[\theta(b_2 - b_3)H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_{w_k}b_2})J_0(\sqrt{\alpha_{w_k}b_3}) \\
 &\quad + (b_2 \leftrightarrow b_3)]S_t(\alpha_{w_k}/(m_{B_s}^2\rho)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{w_l}(x_1, x_2, x_3, b_1, b_2) &= \frac{i\pi}{2} \left[\theta(b_1 - b_2) H_0^{(1)}(\sqrt{\alpha_{w_l}} b_1) J_0(\sqrt{\alpha_{w_l}} b_2) + (b_1 \leftrightarrow b_2) \right] \\
&\times \begin{cases} K_0(\sqrt{\beta_{w_l}} b_1), & \beta_{w_l} \leq 0, \\ \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{|\beta_{w_l}|} b_1), & \beta_{w_l} > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.90}$$

其中 $i, k = 1, 2$, $j, l = 3, 4$, 函数 I_0 、 K_0 与 $H_0 = J_0 + iY_0$ 分别是各类贝塞尔函数。阈值重求和因子 $S_t(x)$ 的参数化形式见等式 (3.65), 其中参数 $c = 0.4$ 。

演化因子 $E_x(t)$ 的解析表达式分别为

$$\begin{aligned}
E_{e_i}(t) &= \alpha_s(t) \exp(-S_{B_s}(t) - S_{\pi\pi}(t)), \\
E_{e_j}(t) &= \alpha_s(t) \exp(-S_{B_s}(t) - S_{\pi\pi}(t) - S_D(t))|_{b_1=b_2}, \\
E_{w_k}(t) &= \alpha_s(t) \exp(-S_{\pi\pi}(t) - S_D(t)), \\
E_{w_l}(t) &= \alpha_s(t) \exp(-S_{B_s}(t) - S_{\pi\pi}(t) - S_D(t))|_{b_2=b_3},
\end{aligned} \tag{4.91}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_{B_s}(t) &= s(x_1 m_{B_s}, b_1) + \frac{5}{3} \int_{1/b_1}^t \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu})), \\
S_D(t) &= s(x_3 m_{B_s}, b_3) + 2 \int_{1/b_3}^t \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu})), \\
S_{\pi\pi}(t) &= s(x_2 m_{B_s}, b_2) + s((1-x_2) m_{B_s}, b_2) + 2 \int_{1/b_2}^t \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}} \gamma_q(\alpha_s(\bar{\mu})),
\end{aligned} \tag{4.92}$$

这里 $\gamma_q = -\alpha_s/\pi$ 是夸克的反常量纲, $s(Q, b)$ 的表达式见等式 (3.24)。我们取硬散射过程的最大标度作为硬标度 t

$$\begin{aligned}
t_{e_i} &= \max(\sqrt{\alpha_{e_i}}, \sqrt{\beta_{e_i}}, 1/b_1, 1/b_2), \quad t_{e_j} = \max(\sqrt{\alpha_{e_j}}, \sqrt{\beta_{e_j}}, 1/b_1, 1/b_3), \\
t_{w_k} &= \max(\sqrt{\alpha_{w_k}}, \sqrt{\beta_{w_k}}, 1/b_2, 1/b_3), \quad t_{w_l} = \max(\sqrt{\alpha_{w_l}}, \sqrt{\beta_{w_l}}, 1/b_1, 1/b_2).
\end{aligned}$$

综上所述, $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程的衰变振幅分别为

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow D^0\pi^+\pi^-) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{us}^* (\mathcal{M}_{e12} + \mathcal{M}_{e34} + \mathcal{M}_{w12} + \mathcal{M}_{w34}), \\
\mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow \bar{D}^0\pi^+\pi^-) &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} V_{cs}^* (\mathcal{M}_{e'12} + \mathcal{M}_{e'34} + \mathcal{M}_{w'12} + \mathcal{M}_{w'34}).
\end{aligned} \tag{4.93}$$

在 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_0(\bar{D}_0)\pi^+\pi^-$ 过程中, 分支比关于不变质量 $m_{\pi\pi}$ 的微分形式为 [125, 126]

$$\frac{d\mathcal{B}}{dm_{\pi\pi}} = \tau_{B_s} \frac{m_{\pi\pi} |\vec{p}_1| |\vec{p}_3|}{4(2\pi)^3 m_{B_s}^3} |\mathcal{A}|^2, \quad (4.94)$$

其中 τ_{B_s} 为 B_s 介子的平均寿命。 $|\vec{p}_1|$ 与 $|\vec{p}_3|$ 分别表示在两pion静止系下 π^+ 与 D 介子的三动量

$$|\vec{p}_1| = \frac{1}{2} \sqrt{m_{\pi\pi}^2 - 4m_{\pi^\pm}^2}, \quad |\vec{p}_3| = \frac{1}{2m_{\pi\pi}} \sqrt{[m_{B_s}^2 - (m_{\pi\pi} + m_D)^2][m_{B_s}^2 - (m_{\pi\pi} - m_D)^2]}. \quad (4.95)$$

4.2.3 数值计算与分析

我们采用如下的质量与寿命作为输入参数(单位是GeV) [125, 126]

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{f=4} = 0.250, \quad m_{B_s} = 5.367, \quad m_{D^0} = 1.869, \quad m_{\pi^\pm} = 0.140, \quad m_{\pi^0} = 0.135, \\ m_{K^\pm} = 0.494, \quad m_{K^0} = 0.498, \quad m_b = 4.66, \quad m_s = 0.095, \quad \tau_{B_s} = 1.512 \times 10^{-12} \text{s},$$

CKM矩阵元采用最新的实验结果 [125, 126]

$$|V_{us}| = 0.2252, \quad |V_{ub}| = 3.89 \times 10^{-3}, \quad |V_{cs}| = 0.97345, \quad |V_{cb}| = 40.6 \times 10^{-3}.$$

从 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 过程的实验数据 [117, 127] 中, 我们可以抽取与标量形状因子 $F_s(m_{\pi\pi}^2)$ 相关的参数 (质量与宽度的单位为GeV)

$$m(f_0(500)) = 0.5 \text{GeV}, \quad m(f_0(980)) = 0.97 \text{GeV}, \quad m(f_0(1500)) = 1.5 \text{GeV}, \\ m(f_0(1790)) = 1.81 \text{GeV}, \quad \Gamma(f_0(500)) = 0.4 \text{GeV}, \quad \Gamma(f_0(1500)) = 0.12 \text{GeV}, \\ \Gamma(f_0(1790)) = 0.32 \text{GeV}, \quad g_{\pi\pi} = 0.167 \text{GeV}, \quad g_{KK} = 3.47 g_{\pi\pi}, \\ c_0 = 3.500, \quad c_1 = 0.900, \quad c_2 = 0.106, \quad c_3 = 0.066, \\ \theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_3 = 0.$$

为了系统地研究 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_0(\bar{D}_0)\pi^+\pi^-$ 的三体衰变过程, 我们分别计算了S-波两pion系统中不同共振态对分支比的贡献, 并将结果列在表格 4.3 中。在理论计算中, 我们考虑了相关误差分别来源于 B_s 波函数的参数 $\omega_b = 0.50 \pm 0.05$ 、两pion系统波函数的参数 $a_2 = 0.2 \pm 0.2$ 以及QCD标度 $\Lambda = 0.25 \pm 0.05 \text{GeV}$ 。此外我们还考虑了 D 介子波函数的自由形状参数 C_D 、CKM矩阵元与 B_s 介子的寿命的误差分析, 结果表明它们对分支比的影响很小。另外从表格 4.3 中的数值结果我们可以看到, \bar{B}_s 三体衰变的

表 4.3 不同中间共振态对分支比的贡献。

Tab 4.3 Branching ratios from the different intermediate resonances.

<i>Resonances</i>	Branching ratio ($\times 10^{-6}$)
$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(500)[f_0(500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.13_{-0.03}^{+0.04}(\omega_b)_{-0.09}^{+0.19}(a_2)_{-0.01}^{+0.04}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(980)[f_0(980) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.45_{-0.12}^{+0.12}(\omega_b)_{-0.13}^{+0.53}(a_2)_{-0.11}^{+0.09}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(1500)[f_0(1500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.11_{-0.03}^{+0.04}(\omega_b)_{-0.02}^{+0.08}(a_2)_{-0.03}^{+0.02}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(1790)[f_0(1790) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.035_{-0.010}^{+0.012}(\omega_b)_{-0.003}^{+0.017}(a_2)_{-0.008}^{+0.007}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 f_0(500)[f_0(500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.11_{-0.04}^{+0.05}(\omega_b)_{-0.09}^{+0.22}(a_2)_{-0.02}^{+0.00}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 f_0(980)[f_0(980) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.16_{-0.05}^{+0.06}(\omega_b)_{-0.11}^{+0.17}(a_2)_{-0.01}^{+0.01}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 f_0(1500)[f_0(1500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.039_{-0.013}^{+0.014}(\omega_b)_{-0.022}^{+0.031}(a_2)_{-0.001}^{+0.001}(\Lambda_{QCD})$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 f_0(1790)[f_0(1790) \rightarrow \pi^+\pi^-]$	$0.011_{-0.003}^{+0.004}(\omega_b)_{-0.006}^{+0.008}(a_2)_{-0.000}^{+0.000}(\Lambda_{QCD})$

分支比对参数 ω_b 与 a_2 依赖明显。为了估计次领头阶修正对 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_0(\bar{D}_0)\pi^+\pi^-$ 过程的贡献，我们变动QCD标度 $\Lambda = 0.25 \pm 0.05\text{GeV}$ 并改变硬散射标度 $t = t \pm 0.25t$ ，计算的结果表明次领头阶带来的修正效应较小。

当我们考虑所有共振态 $f_0(500)$ 、 $f_0(980)$ 、 $f_0(1500)$ 与 $f_0(1790)$ 的贡献时，得到 \bar{B}_s 三体衰变的分支比为

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\pi^+\pi^-)_S) &= 0.77_{-0.18}^{+0.19}(\omega_b)_{-0.28}^{+1.00}(a_2)_{-0.12}^{+0.11}(\Lambda_{QCD}) \times 10^{-6}, \\ \mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(\pi^+\pi^-)_S) &= 0.47_{-0.15}^{+0.19}(\omega_b)_{-0.33}^{+0.60}(a_2)_{-0.05}^{+0.02}(\Lambda_{QCD}) \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

利用表格 4.3的结果，我们发现 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(500)[f_0(500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$ 、 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(980)[f_0(980) \rightarrow \pi^+\pi^-]$ 、 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(1500)[f_0(1500) \rightarrow \pi^+\pi^-]$ 及 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0 f_0(1790)[f_0(1790) \rightarrow \pi^+\pi^-]$ 过程的分支比分别占 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\pi^+\pi^-)_S$ 过程总分支比的大小分别为16.4%、59.3%、14.6%与4.5%。对于 $\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(\pi^+\pi^-)_S$ 过程，各个共振态占总分支比的大小分别为24.6%、35.2%、8.3%及2.4%。我们发现共振态 $f_0(500)$ 与 $f_0(980)$ 对总的分支比的贡献最大。目前LHCb实验组给出了 B_s 介子衰变到共振态 $f_0(980)$ 的分支比的上限 $\mathcal{B}(B_s \rightarrow \bar{D}^0 f_0(980)) < 3.1 \times 10^{-6}$ ，这个结果与我们理论计算的结果大致相符。

为了更好的对比 $\bar{B}_s \rightarrow D^0(\pi\pi)_S$ 与 $\bar{B}_s \rightarrow \bar{D}^0(\pi\pi)_S$ 过程，我们给出了它们分支比的比值

$$R_1 = \frac{\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\pi^+\pi^-)_S)}{\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(\pi^+\pi^-)_S)} \sim 1.64, \quad (4.97)$$

这两个过程都是色压低与CKM压低的，因此会明显依赖于CKM矩阵元。我们给出相关的CKM比值

$$R_{CKM} = \left| \frac{V_{cb}V_{us}^*}{V_{ub}V_{cs}^*} \right|^2 \sim 5.83. \quad (4.98)$$

与 $\bar{B}_s \rightarrow D^0(\pi\pi)_S$ 过程相比， $\bar{B}_s \rightarrow \bar{D}^0(\pi\pi)_S$ 过程受到CKM压低效果更强。但是因子化的结果表明，与末态为 D^0 的过程相比末态为 \bar{D}^0 的衰变中不可因子化的W玻色子交换图具有更大的贡献。因此在发射图的贡献都相似的情况下，它们总分支比的大小相近。

$\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)(\pi^+\pi^-)_S$ 过程中的CKM矩阵元为 $V_{cb}V_{us}^*(V_{ub}V_{cs}^*)$ ，在通常的CKM矩阵参数化中，矩阵元 V_{ub} 中含有 γ 角。因此我们可以通过引入参数 $D_{CP\pm}$ [128]来计算分支比对 γ 角的依赖关系。参数 $D_{CP\pm}$ 的定义如下

$$\sqrt{2}\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D_{CP\pm}(\pi^+\pi^-)_S) = \mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\pi^+\pi^-)_S) \pm \mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(\pi^+\pi^-)_S). \quad (4.99)$$

我们得到 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D_{CP\pm}(\pi^+\pi^-)_S$ 过程的分支比对 γ 角的依赖曲线，见图 4.3(a,b)。此外为了实验探测方便，我们定义物理可观测量为

$$R_{CP\pm} = \frac{4\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D_{CP\pm}(\pi^+\pi^-)_S)}{\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\pi^+\pi^-)_S) + \mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0(\pi^+\pi^-)_S)}. \quad (4.100)$$

物理可观测量 $R_{CP\pm}$ 关于 γ 角的依赖曲线，见图 4.3(c,d)。目前实验关于 γ 角的测量结果为 $\gamma = (73.5_{-5.9}^{+4.2})^\circ$ [5]。

利用 B_s 衰变的因子化公式，我们可以得到分支比对 $\pi\pi$ 不变质量的依赖曲线，见图 4.3(e) 与图 4.3(f)。此外在图中我们还分别给出不同共振态 $f_0(500)$ 、 $f_0(980)$ 、 $f_0(1500)$ 及 $f_0(1790)$ 的分支比对 $\pi\pi$ 不变质量的依赖曲线。从分支比与不变质量的依赖曲线中，我们可以看到在不变质量接近 $f_0(980)$ 的极点质量 $m_{f_0(980)} = 0.97\text{GeV}$ 时，共振态 $f_0(980)$ 占主导贡献；在不变质量小于 1GeV 的区域，共振态 $f_0(500)$ 的贡献占主导；共振态 $f_0(1500)$ 与 $f_0(1790)$ 的贡献相对较小。我们期望LHCb实验以及未来的KEKB实验可以验证我们的结果。

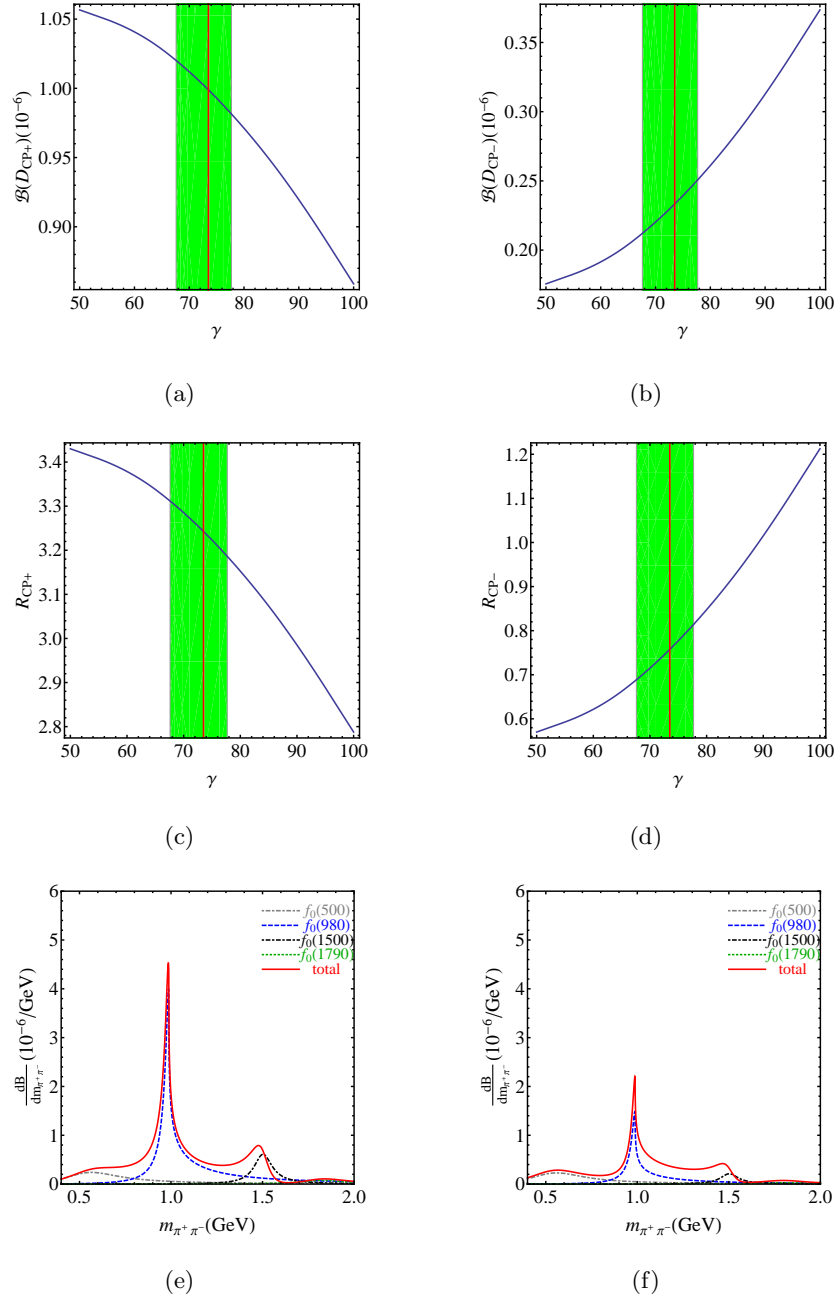


图 4.3 图(a,b)给出 $\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D_{CP\pm}(\pi^+\pi^-)_S)$ 分支比关于 γ 角的依赖曲线。图(c,d)给出物理可观测量关于 γ 角的依赖曲线，其中绿色区域为目前 γ 角的实验限制区域 $\gamma = 73.5^{+4.2}_{-5.9}$ 。图(e,f)分别给出 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 过程的分支比关于 $\pi\pi$ 不变质量的微分变化曲线。

Fig 4.3 The dependencies of differential branching ratios $\mathcal{B}(\bar{B}_s^0 \rightarrow D_{CP\pm}(\pi^+\pi^-)_S)$ on γ are shown in panels (a,b). For the panels (c,d), the corresponding physical observable measurements $R_{CP\pm}$ are depend on γ . The shadowed (green) region denotes the current bounds on $\gamma = 73.5^{+4.2}_{-5.9}$. The differential branching ratios on the pion-pair invariant mass for the resonance $f_0(500)$, $f_0(980)$, $f_0(1500)$ and $f_0(1790)$ in the (a) $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0\pi^+\pi^-$ and (b) $\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{D}^0\pi^+\pi^-$ decays.

第五章 总结与展望

本论文主要研究内容分为两个部分：论文第二章利用轻夸克味道SU(3)对称性研究了双重味重子与双重味tetraquark的弱衰变；第二部分中，我们采用基于 k_T 因子化方案的微扰QCD(PQCD)方法研究了两类遍举过程。

双重味重子与双重味四夸克态是目前强子物理研究领域中的热点问题之一。尽管因子化是目前处理强子衰变过程的最有力工具，但是对于双重味重子与双重味tetraquark而言，其因子化方案还没有证明，相应的非微扰输入参量也不清楚。因此研究双重味强子在理论上还缺乏动力学基础。幸运的是，跟重味 c, b, t 夸克相比，轻夸克 u, d, s 质量很小，近似地满足味道SU(3)对称性。该对称性不仅能对强子态进行分类，还可以用来化简重味夸克的弱衰变矩阵元。味道对称性分析不依赖动力学模型，与具体因子化方案无关，且SU(3)分析已经成功地应用于单重味重子(如 B 介子与 Λ_b 重子等)衰变过程，具有较强的预言力。本文第二章利用轻夸克味道对称性分析了双重味重子与双重味tetraquark的弱衰变过程。首先根据强子在SU(3)对称性下的分类及弱衰变算符所对应的表示，我们构造出了双重味重子及双重味tetraquark的半轻以及非轻多体弱衰变的有效哈密顿量；将有效哈密顿量作用在相应强子衰变矩阵元上，推导出了衰变振幅，振幅中的非微扰效应由一系列参数进行刻画；通过给出的双重味强子弱衰变振幅，我们进一步得到了不同衰变道宽度之间的关系；为了方便未来实验探测，本文基于CKM矩阵元的大小，将不同的衰变过程按照Cabibbo允许及Cabibbo压低等进行了分类；考虑到衰变分支比的理论估计和实验上对不同粒子的探测效率，我们去除了末态含有 π^0, ρ^\pm, η, n 等在实验上难以重建的衰变道，最终得到了一系列双重味重子与双重味tetraquark的半轻与非轻黄金衰变道。这些结果将为实验上进一步研究双重味重子与四夸克态的性质提供一定的参考价值，也可以用来检验味道SU(3)对称性的适用性。

目前实验还并未发现全重味重子与全重味tetraquark，但是夸克模型以及量子色动力学理论允许这些强子的存在。另外，含重夸克的五夸克态pentaquark也受到了很多的理论与实验关注，但关于它们的研究工作仍然远远不足。探测这些粒子既需要深入研究它们的产生，也需要找出相应的黄金衰变过程，尤其是弱衰变过程。采用SU(3)对称性分析它们的弱衰变可以为实验上寻找这些粒子提供一定的指导意义。最后，理论上仍缺乏双重味重子/全重味重子/奇异态衰变的动力学研究和因子化方案，除了低能输入参数之外，相关的高标度微扰系数也没有完整的理论计算，这都

亟需大量的理论研究。由于双重味强子/全重味强子/其他奇特态的产生衰变等性质有助于进一步了解QCD非微扰动力学，它们衰变过程的因子化研究将是未来强子物理研究中的一个重要课题。

本文第三章扼要地介绍了QCD因子化理论，包括共线因子化与 k_T 因子化。与共线因子化相比， k_T 因子化可以很好地处理动量分数在端点区域的行为，从而规避了端点发散问题。基于 k_T 因子化，微扰QCD(PQCD)方法将高能强子过程表示为非微扰波函数与微扰硬散射核的三维卷积形式。本文第四章采用该方法研究了两类遍举过程：正负电子湮灭过程中两介子的遍举产生和 B_s^0 介子的三体衰变过程。正负电子在质心能量3.67GeV与10.58GeV时湮灭到两介子 PV 、 PT 的过程与 B 介子衰变时湮灭图贡献具有类似的拓扑结构，对理解 B 介子衰变中幂次修正项贡献有一定的意义。采用PQCD方法得到的数值结果与目前实验结果符合很好。在 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 衰变过程中， $D^0(\bar{D}^0)$ 可以形成CP本征态，包含了 $b \rightarrow c\bar{u}s$ ($b \rightarrow u\bar{c}s$)衰变振幅的干涉，因此研究该过程有助于精确测量CKM相角 γ 。此外如果 $\pi^+\pi^-$ 沿着共线方向运动，三体衰变过程可以简化为类两体过程，其中 $\pi\pi$ 系统同时包含共振态 $f_0(500)$, $f_0(980)$, $f_0(1500)$, $f_0(1790)$ 与非共振态的贡献。采用PQCD方法，本文计算得到了 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 分支比和微分分布，期待未来的LHCb和Belle-II实验可以进行检验。

PQCD因子化方法在 B 介子两体遍举过程得到了广泛的应用，而 B 介子的三体衰变过程以及两体过程的高圈精确计算仍需要进一步的完善。对于一些特殊的三体衰变过程，如 $B_s^0(B^0) \rightarrow \bar{D}^0\pi^+K^-$, $B_s^0 \rightarrow \bar{D}^0K^+K^-$, $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi K^+\pi^-$ 等，将来可以采用与 $\bar{B}_s^0 \rightarrow D^0(\bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ 的类似方法进行研究。双重味强子的PQCD因子化计算以及多体 B 介子衰变过程的研究将是我们未来一段时间的努力方向。

附录 A 双线性算符的动力学关系

由 u, d 夸克场组构成的双线性算符之间的关系如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(-x) &= -i \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\alpha g G_{\alpha\mu}(vx) \gamma_\mu \gamma_5 d(-x) \\ &\quad + (m_u - m_d) \bar{u}(x) i \gamma_5 d(-x), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \{ \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(-x) \} &= -i \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\alpha g G_{\alpha\mu}(vx) \gamma_\mu \gamma_5 d(-x) \\ &\quad + (m_u + m_d) \bar{u}(x) i \gamma_5 d(-x), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) &= -i \frac{\partial}{\partial x_\nu} \bar{u}(x) \gamma_5 d(-x) + \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\nu}(vx) \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - i \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\mu}(vx) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) \\ &\quad + (m_d - m_u) \bar{u}(x) \gamma_\nu \gamma_5 d(-x), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) &= -i \partial_\nu \bar{u}(x) \gamma_5 d(-x) + \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\nu}(vx) \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - i \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\mu}(vx) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - (m_u + m_d) \bar{u}(x) \gamma_\nu \gamma_5 d(-x), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 [x, -x] d(-x) &= \int_0^1 dt \frac{d}{dx_\mu} \bar{u}(tx) \not{x} \gamma_5 [tx, -tx] d(-tx) \\ &\quad - \int_0^1 dt \int_{-t}^t dv \bar{u}(tx) [tx, vx] g \tilde{G}^{\mu\nu}(vx) x^\nu \not{x} [vx, -tx] d(-tx) \\ &\quad - i \int_0^1 dt \int_{-t}^t dv v \bar{u}(tx) [tx, vx] g G_{\mu\nu}(vx) x^\nu [vx, -tx] \not{x} \gamma_5 d(-tx) \\ &\quad - i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 dt t x^\nu \partial^\alpha [\bar{u}(tx) \gamma^\beta [tx, -tx] d(-tx)] \\ &\quad + (m_u + m_d) x^\nu \int_0^1 dt t \bar{u}(tx) \sigma_{\nu\mu} \gamma_5 [tx, -tx] d(-tx), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x)\gamma_\mu[x, -x]d(-x) &= \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(tx)\not{x}[tx, -tx]d(-tx) \\
&\quad - \int_0^1 dt \int_{-t}^t dv \bar{u}(tx)[tx, vx]g\tilde{G}_{\mu\nu}(vx)x^\nu\not{x}\gamma_5[vx, -tx]d(-tx) \\
&\quad - i \int_0^1 dt \int_{-t}^t dv v \bar{u}(tx)[tx, vx]gG_{\mu\nu}(vx)x^\nu[vx, -tx]\not{x}d(-tx) \\
&\quad - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int_0^1 dt t x^\nu \partial^\alpha [\bar{u}(tx)\gamma^\beta\gamma_5[tx, -tx]d(-tx)] \\
&\quad + (m_u - m_d) x^\nu \int_0^1 dt t \bar{u}(tx)\sigma_{\nu\mu}[tx, -tx]d(-tx), \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{q}_2(x)\gamma_5q_1(-x) - \bar{q}_2(0)\gamma_5q_1(0) &= - \int_0^1 dt \int_{-t}^t dv \bar{q}_2(tx)x^\alpha\sigma_{\alpha\beta}x_\mu g_s G^{\mu\beta}(vx)\gamma_5q_1(-tx) \\
&\quad + i \int_0^1 dt \partial^\alpha \{ \bar{q}_2(tx)\sigma_{\alpha\beta}x^\beta\gamma_5q_1(-tx) \} \\
&\quad + i(m_{q_2} - m_{q_1}) \int_0^1 dt \bar{q}_2(tx)\not{x}\gamma_5q_1(-tx). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

为了证明方便，我们选择Fock-Schwinger规范， $x_\mu A^\mu = 0$ ，此时Wilson线为：

$$[x, -x] = 1, A_\mu(x) = \int_{-1}^1 dv v x_\alpha G_\mu^\alpha(vx). \tag{A.8}$$

定义对Wilson线的偏导：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} [x, -x] = igA_\mu(x) + igA_\mu(-x) - ig \int_{-1}^1 dt [x, x_t] G_{v\mu}(tx) t x_v [x_t, -x] = 0, \tag{A.9}$$

$$\partial_\mu [x, -x] = igA_\mu(x) - igA_\mu(-x) - ig \int_{-1}^1 dt [x, x_t] G_{v\mu}(tx) x_v [x_t, -x], \tag{A.10}$$

其中 $\partial_\mu [x, -x] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_\mu} [x + y, -x + y]$ 。于是对于双线性算符的偏导为：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(x)\Gamma d(-x) = -\bar{u}(x)\Gamma \overleftrightarrow{D}_\mu d(-x) - i \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\alpha g G_{\alpha\mu}(vx)\Gamma d(-x), \tag{A.11}$$

$$\partial_\mu \{ \bar{u}(x)\Gamma d(-x) \} = \bar{u}(x) \left(\overleftarrow{D}_\mu + \overrightarrow{D}_\mu \right) \Gamma d(-x) - i \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\alpha G_{\alpha\mu}(vx)\Gamma d(-x), \tag{A.12}$$

协变微分的定义为 $\overleftrightarrow{D}_\mu = \overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu = (\overrightarrow{\partial} - iA(-x))_\mu - (\overleftarrow{\partial} + iA(x))_\mu$ 。利用等式 $\sigma_{\mu\nu} \overleftrightarrow{D}_\mu = i(\overrightarrow{D}_\nu + \overleftarrow{D}_\nu)$ 与 $(\overrightarrow{D}_\mu + \overleftarrow{D}_\mu) \sigma_{\mu\nu} = i \overleftrightarrow{D}_\nu$ ，可以得到双线性算符之间的关系

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) &= -i \frac{\partial}{\partial x_\nu} \bar{u}(x) \gamma_5 d(-x) + \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\nu}(vx) \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - i \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\mu}(vx) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) \\ &\quad + (m_d - m_u) \bar{u}(x) \gamma_\nu \gamma_5 d(-x), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) &= -i \partial_\nu \bar{u}(x) \gamma_5 d(-x) + \int_{-1}^1 dv \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\nu}(vx) \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - i \int_{-1}^1 dv v \bar{u}(x) x_\rho g G_{\rho\mu}(vx) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 d(-x) \\ &\quad - (m_u + m_d) \bar{u}(x) \gamma_\nu \gamma_5 d(-x). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

参考文献

- [1] Weinberg S., “A Model of Leptons”, Phys. Rev. Lett., 1967, **19**, 1264–1266.
- [2] Glashow S.L. and Weinberg S., “Breaking chiral symmetry”, Phys. Rev. Lett., 1968, **20**, 224–227.
- [3] Goldstone J., Salam A., and Weinberg S., “Broken Symmetries”, Phys. Rev., 1962, **127**, 965–970.
- [4] Higgs P.W., “Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons”, Phys. Rev., 1966, **145**, 1156–1163.
- [5] Tanabashi M. *et al.*, “Review of Particle Physics”, Phys. Rev., 2018, **D98**(3), 030001.
- [6] Becchi C., Rouet A., and Stora R., “Renormalization of Gauge Theories”, Annals Phys., 1976, **98**, 287–321.
- [7] Gell-Mann M., “A Schematic Model of Baryons and Mesons”, Phys. Lett., 1964, **8**, 214–215.
- [8] Feynman R.P., Gell-Mann M., and Zweig G., “Group $U(6) \times U(6)$ generated by current components”, Phys. Rev. Lett., 1964, **13**, 678–680.
- [9] Zweig G., “An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1”, 1964.
- [10] Gell-Mann M., “Symmetries of baryons and mesons”, Phys. Rev., 1962, **125**, 1067–1084.
- [11] Barnes V.E. *et al.*, “Observation of a Hyperon with Strangeness -3”, Phys. Rev. Lett., 1964, **12**, 204–206.
- [12] Choi S.K. *et al.*, “Observation of a narrow charmonium - like state in exclusive $B^{+-} \rightarrow K^{+-} \pi^+ \pi^- J / \psi$ decays”, Phys. Rev. Lett., 2003, **91**, 262001.

- [13] Ablikim M. *et al.*, “Observation of a Charged Charmoniumlike Structure in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ at $\sqrt{s}=4.26$ GeV”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 252001.
- [14] Beneke M., Buchalla G., Neubert M., *et al.*, “QCD factorization for $B \rightarrow \pi\pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit”, *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **83**, 1914–1917.
- [15] Beneke M., Buchalla G., Neubert M., *et al.*, “QCD factorization in $B \rightarrow \pi K$, $\pi\pi$ decays and extraction of Wolfenstein parameters”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B606**, 245–321.
- [16] Aaij R. *et al.*, “Observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++} ”, *Phys. Rev. Lett.*, 2017, **119**(11), 112001.
- [17] Aaij R. *et al.*, “Observation of $J/\psi p$ Resonances Consistent with Pentaquark States in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ Decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 2015, **115**, 072001.
- [18] Savage M.J. and Wise M.B., “SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays”, *Phys. Rev.*, 1989, **D39**, 3346.
- [19] Gronau M., Hernandez O.F., London D., *et al.*, “Broken SU(3) symmetry in two-body B decays”, *Phys. Rev.*, 1995, **D52**, 6356–6373.
- [20] He X.G., “SU(3) analysis of annihilation contributions and CP violating relations in $B \rightarrow P P$ decays”, *Eur. Phys. J.*, 1999, **C9**, 443–448.
- [21] Chiang C.W., Gronau M., Rosner J.L., *et al.*, “Charmless $B \rightarrow P P$ decays using flavor SU(3) symmetry”, *Phys. Rev.*, 2004, **D70**, 034020.
- [22] Li Y., Lu C.D., and Wang W., “Partners of Z(4430) and productions in B decays”, *Phys. Rev.*, 2008, **D77**, 054001.
- [23] Wang W. and Lu C.D., “Distinguishing two kinds of scalar mesons from heavy meson decays”, *Phys. Rev.*, 2010, **D82**, 034016.
- [24] Cheng H.Y. and Oh S., “Flavor SU(3) symmetry and QCD factorization in $B \rightarrow PP$ and PV decays”, *JHEP*, 2011, **09**, 024.
- [25] Hsiao Y.K., Chang C.F., and He X.G., “A global SU(3)/U(3) flavor symmetry analysis for $B \rightarrow PP$ with $\eta - \eta'$ Mixing”, *Phys. Rev.*, 2016, **D93**(11), 114002.

- [26] Lu C.D., Wang W., and Yu F.S., “Test flavor SU(3) symmetry in exclusive Λ_c decays”, *Phys. Rev.*, 2016, **D93**(5), 056008.
- [27] He X.G., Wang W., and Zhu R.L., “Production of Charmed Tetraquarks from B_c and B decays”, *J. Phys.*, 2017, **G44**(1), 014003.
- [28] Hu X.H., Shen Y.L., Wang W., *et al.*, “Weak decays of doubly heavy baryons: ”decay constants””, *Chin. Phys.*, 2018, **C42**(12), 123102.
- [29] Shi Y.J., Wang W., Xing Y., *et al.*, “Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: Multi-body Decay Channels”, *Eur. Phys. J.*, 2018, **C78**(1), 56.
- [30] Zhu R., Han X.L., Ma Y., *et al.*, “Weak decays of B_c into two hadrons under flavor SU(3) symmetry”, *Eur. Phys. J.*, 2018, **C78**, 740.
- [31] Agaev S.S., Azizi K., Barsbay B., *et al.*, “The doubly charmed pseudoscalar tetraquarks $T_{cc;\bar{s}\bar{s}}^{++}$ and $T_{cc;\bar{d}\bar{s}}^{++}$ ”, *Nucl. Phys.*, 2019, **B939**, 130–144.
- [32] Wang W., Yu F.S., and Zhao Z.X., “Weak decays of doubly heavy baryons: the $1/2 \rightarrow 1/2$ case”, *Eur. Phys. J.*, 2017, **C77**(11), 781.
- [33] Wang W., Xing Z.P., and Xu J., “Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: SU(3) Analysis”, *Eur. Phys. J.*, 2017, **C77**(11), 800.
- [34] Mattson M. *et al.*, “First Observation of the Doubly Charmed Baryon Ξ_{cc}^+ ”, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **89**, 112001.
- [35] Ocherashvili A. *et al.*, “Confirmation of the double charm baryon $\Xi_{cc}(3520)$ via its decay to $p D^+ K^-$ ”, *Phys. Lett.*, 2005, **B628**, 18–24.
- [36] Kato Y. *et al.*, “Search for doubly charmed baryons and study of charmed strange baryons at Belle”, *Phys. Rev.*, 2014, **D89**(5), 052003.
- [37] Aaij R. *et al.*, “Search for the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^+ ”, *JHEP*, 2013, **12**, 090.
- [38] Aubert B. *et al.*, “Search for doubly charmed baryons Ξ_{cc}^+ and Ξ_{cc}^{++} in BABAR”, *Phys. Rev.*, 2006, **D74**, 011103.
- [39] Ratti S.P., “New results on c-baryons and a search for cc-baryons in FOCUS”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 2003, **115**, 33–36.

- [40] Zhang Q.A., “Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: W-Exchange”, *Eur. Phys. J.*, 2018, **C78**(12), 1024.
- [41] Abazov V.M. *et al.*, “Evidence for a $B_s^0\pi^\pm$ state”, *Phys. Rev. Lett.*, 2016, **117**(2), 022003.
- [42] Ader J.P., Richard J.M., and Taxil P., “Do narrow heavy multi-quark states exist?”, *Phys. Rev.*, 1982, **D25**, 2370.
- [43] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O., *et al.*, “Masses of tetraquarks with two heavy quarks in the relativistic quark model”, *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, 114015.
- [44] Karliner M. and Rosner J.L., “Discovery of doubly-charmed Ξ_{cc} baryon implies a stable $(bb\bar{u}\bar{d})$ tetraquark”, *Phys. Rev. Lett.*, 2017, **119**(20), 202001.
- [45] Francis A., Hudspith R.J., Lewis R., *et al.*, “Lattice Prediction for Deeply Bound Doubly Heavy Tetraquarks”, *Phys. Rev. Lett.*, 2017, **118**(14), 142001.
- [46] Bicudo P., Scheunert J., and Wagner M., “Including heavy spin effects in the prediction of a $\bar{b}b\bar{u}d$ tetraquark with lattice QCD potentials”, *Phys. Rev.*, 2017, **D95**(3), 034502.
- [47] Du M.L., Chen W., Chen X.L., *et al.*, “Exotic $QQ\bar{q}\bar{q}$, $QQ\bar{q}\bar{s}$ and $QQ\bar{s}\bar{s}$ states”, *Phys. Rev.*, 2013, **D87**(1), 014003.
- [48] Esposito A., Papinutto M., Pilloni A., *et al.*, “Doubly charmed tetraquarks in B_c and Ξ_{bc} decays”, *Phys. Rev.*, 2013, **D88**(5), 054029.
- [49] Chen W., Steele T.G., and Zhu S.L., “Exotic open-flavor $bc\bar{q}\bar{q}$, $bc\bar{s}\bar{s}$ and $qc\bar{q}\bar{b}$, $sc\bar{s}\bar{b}$ tetraquark states”, *Phys. Rev.*, 2014, **D89**(5), 054037.
- [50] Ali A., Parkhomenko A.Y., Qin Q., *et al.*, “Prospects of discovering stable double-heavy tetraquarks at a Tera- Z factory”, *Phys. Lett.*, 2018, **B782**, 412–420.
- [51] Jaffe R.L., “Exotica”, *Phys. Rept.*, 2005, **409**, 1–45.
- [52] Ali A., Hambrock C., and Wang W., “Tetraquark Interpretation of the Charged Bottomonium-like states $Z_b^{+-}(10610)$ and $Z_b^{+-}(10650)$ and Implications”, *Phys. Rev.*, 2012, **D85**, 054011.

- [53] De Rujula A., Georgi H., and Glashow S.L., “Hadron Masses in a Gauge Theory”, *Phys. Rev.*, 1975, **D12**, 147–162.
- [54] Lee S.H., Yasui S., Liu W., *et al.*, “Charmed exotics in Heavy Ion Collisions”, *Eur. Phys. J.*, 2008, **C54**, 259–265.
- [55] Maiani L., Piccinini F., Polosa A.D., *et al.*, “Diquark-antidiquarks with hidden or open charm and the nature of X(3872)”, *Phys. Rev.*, 2005, **D71**, 014028.
- [56] Ebert D., Faustov R.N., and Galkin V.O., “Masses of heavy tetraquarks in the relativistic quark model”, *Phys. Lett.*, 2006, **B634**, 214–219.
- [57] Wang W. and Zhu R., “Can X(5568) be a tetraquark state?”, *Chin. Phys.*, 2016, **C40**(9), 093101.
- [58] Wang W. and Zhu R.L., “Interpretation of the newly observed Ω_c^0 resonances”, *Phys. Rev.*, 2017, **D96**(1), 014024.
- [59] Patrignani C. *et al.*, “Review of Particle Physics”, *Chin. Phys.*, 2016, **C40**(10), 100001.
- [60] Xing Y. and Zhu R., “Weak Decays of Stable Doubly Heavy Tetraquark States”, *Phys. Rev.*, 2018, **D98**(5), 053005.
- [61] Collins J.C. and Soper D.E., “Parton Distribution and Decay Functions”, *Nucl. Phys.*, 1982, **B194**, 445–492.
- [62] Collins J.C. and Stermann G.F., “Soft Partons in QCD”, *Nucl. Phys.*, 1981, **B185**, 172–188.
- [63] Lee T.D. and Nauenberg M., “Degenerate Systems and Mass Singularities”, *Phys. Rev.*, 1964, **133**, B1549–B1562, [25(1964)].
- [64] del Aguila F. and Chase M.K., “Higher order QCD corrections to exclusive two photon processes”, *Nucl. Phys.*, 1981, **B193**, 517–528.
- [65] Li H.n., “Perturbative QCD factorization of $\pi \gamma^* \rightarrow \gamma (\pi)$ and $B \rightarrow \gamma (\pi) \text{ lepton anti-neutrino}$ ”, *Phys. Rev.*, 2001, **D64**, 014019.

- [66] Li H.n., “QCD aspects of exclusive B meson decays”, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 2003, **51**, 85–171.
- [67] Szczepaniak A., Henley E.M., and Brodsky S.J., “Perturbative QCD Effects in Heavy Meson Decays”, *Phys. Lett.*, 1990, **B243**, 287–292.
- [68] Beneke M. and Feldmann T., “Symmetry breaking corrections to heavy to light B meson form-factors at large recoil”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B592**, 3–34.
- [69] Catani S., Ciafaloni M., and Hautmann F., “Gluon contributions to small x heavy flavor production”, *Phys. Lett.*, 1990, **B242**, 97–102.
- [70] Collins J.C. and Ellis R.K., “Heavy quark production in very high-energy hadron collisions”, *Nucl. Phys.*, 1991, **B360**, 3–30.
- [71] Akhoury R., Sterman G.F., and Yao Y.P., “Exclusive semileptonic decays of B mesons into light mesons”, *Phys. Rev.*, 1994, **D50**, 358–372.
- [72] Li H.n. and Sterman G.F., “The Perturbative pion form-factor with Sudakov suppression”, *Nucl. Phys.*, 1992, **B381**, 129–140.
- [73] Keum Y.Y., Li H.n., and Sanda A.I., “Fat penguins and imaginary penguins in perturbative QCD”, *Phys. Lett.*, 2001, **B504**, 6–14.
- [74] Lu C.D., Ukai K., and Yang M.Z., “Branching ratio and CP violation of $B \rightarrow \pi \pi$ decays in perturbative QCD approach”, *Phys. Rev.*, 2001, **D63**, 074009.
- [75] Cao F.g., Huang T., and Luo C.w., “Reexamination of the perturbative pion form-factor with Sudakov suppression”, *Phys. Rev.*, 1995, **D52**, 5358–5361.
- [76] Li H.n. and Tseng B., “Nonfactorizable soft gluons in nonleptonic heavy meson decays”, *Phys. Rev.*, 1998, **D57**, 443–451.
- [77] Sterman G.F., “Soft gluon corrections to short distance hadronic cross-sections”, *Phys. Lett.*, 1986, **B179**, 281–286.
- [78] Catani S. and Trentadue L., “Resummation of the QCD Perturbative Series for Hard Processes”, *Nucl. Phys.*, 1989, **B327**, 323–352.

- [79] Li H.n., “Unification of the $k(T)$ and threshold resummations”, *Phys. Lett.*, 1999, **B454**, 328–334.
- [80] Yang K.C., “Light-cone distribution amplitudes of axial-vector mesons”, *Nucl. Phys.*, 2007, **B776**, 187–257.
- [81] Chernyak V.L. and Zhitnitsky A.R., “Asymptotic Behavior of Exclusive Processes in QCD”, *Phys. Rept.*, 1984, **112**, 173.
- [82] Braun V.M. and Filyanov I.E., “QCD Sum Rules in Exclusive Kinematics and Pion Wave Function”, *Z. Phys.*, 1989, **C44**, 157.
- [83] Meißner U.G. and Wang W., “Generalized Heavy-to-Light Form Factors in Light-Cone Sum Rules”, *Phys. Lett.*, 2014, **B730**, 336–341.
- [84] Balitsky I.I. and Braun V.M., “Evolution Equations for QCD String Operators”, *Nucl. Phys.*, 1989, **B311**, 541–584.
- [85] Collins J.C. and Soper D.E., “Back-To-Back Jets in QCD”, *Nucl. Phys.*, 1981, **B193**, 381.
- [86] Li H.n. and Lim J.L., “Soft gluons in logarithmic summations”, *Eur. Phys. J.*, 1999, **C10**, 319–325.
- [87] Li H.n. and Yu H.L., “Extraction of $V(ub)$ from decay $B \rightarrow \pi \text{ lepton neutrino}$ ”, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **74**, 4388–4391.
- [88] Botts J. and Sterman G.F., “Hard Elastic Scattering in QCD: Leading Behavior”, *Nucl. Phys.*, 1989, **B325**, 62–100.
- [89] Korchemsky G.P., Pirjol D., and Yan T.M., “Radiative leptonic decays of B mesons in QCD”, *Phys. Rev.*, 2000, **D61**, 114510.
- [90] Li H.n., “Threshold resummation for exclusive B meson decays”, *Phys. Rev.*, 2002, **D66**, 094010.
- [91] Nagashima M. and Li H.n., “ $k(T)$ factorization of exclusive processes”, *Phys. Rev.*, 2003, **D67**, 034001.

- [92] Lu C.D., Wang W., and Wang Y.M., “Exclusive processes $e^+ e^- \rightarrow VP$ in $k(T)$ factorization”, *Phys. Rev.*, 2007, **D75**, 094020.
- [93] Braguta V.V., Likhoded A.K., and Luchinsky A.V., “Study of exclusive processes $e^+ e^- \rightarrow VP$ ”, *Phys. Rev.*, 2008, **D78**, 074032.
- [94] Patrignani C. *et al.*, “Review of Particle Physics”, *Chin. Phys.*, 2016, **C40**(10), 100001.
- [95] Cheng H.Y., Koike Y., and Yang K.C., “Two-parton Light-cone Distribution Amplitudes of Tensor Mesons”, *Phys. Rev.*, 2010, **D82**, 054019.
- [96] Ball P. and Zwicky R., “New results on $B \rightarrow \pi, K, \eta$ decay formfactors from light-cone sum rules”, *Phys. Rev.*, 2005, **D71**, 014015.
- [97] Feldmann T., Kroll P., and Stech B., “Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons”, *Phys. Rev.*, 1998, **D58**, 114006.
- [98] Ball P., Braun V.M., Koike Y., *et al.*, “Higher twist distribution amplitudes of vector mesons in QCD: Formalism and twist - three distributions”, *Nucl. Phys.*, 1998, **B529**, 323–382.
- [99] Beneke M., Rohrer J., and Yang D., “Enhanced electroweak penguin amplitude in $B \rightarrow VV$ decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**, 141801.
- [100] Lu C.D., Shen Y.L., and Wang W., “Role of electromagnetic dipole operator in the electroweak penguin dominated vector meson decays of B meson”, *Chin. Phys. Lett.*, 2006, **23**, 2684–2687.
- [101] Adam N.E. *et al.*, “Observation of 1-0- final states from $\psi(2S)$ decays and $e^+ e^-$ annihilation”, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **94**, 012005.
- [102] Adams G.S. *et al.*, “Decay of the $\psi(3770)$ to light hadrons”, *Phys. Rev.*, 2006, **D73**, 012002.
- [103] Shen C.P. *et al.*, “Measurement of $e^+ e^- \rightarrow \omega\pi^0, K^*(892)\bar{K}$ and $K_2^*(1430)\bar{K}$ at \sqrt{s} near 10.6 GeV”, *Phys. Rev.*, 2013, **D88**(5), 052019.
- [104] Aubert B. *et al.*, “Observation of the Exclusive Reaction $e^+ e^- \rightarrow \phi\eta$ at $\sqrt{s} = 10.58\text{-GeV}$ ”, *Phys. Rev.*, 2006, **D74**, 111103.

- [105] Lepage G.P. and Brodsky S.J., “Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics”, *Phys. Rev.*, 1980, **D22**, 2157.
- [106] Brodsky S.J. and Lepage G.P., “Helicity Selection Rules and Tests of Gluon Spin in Exclusive QCD Processes”, *Phys. Rev.*, 1981, **D24**, 2848.
- [107] Asner D.M. *et al.*, “Physics at BES-III”, *Int. J. Mod. Phys.*, 2009, **A24**, S1–794.
- [108] Kurimoto T., “Uncertainty in the leading order PQCD calculations of B meson decays”, *Phys. Rev.*, 2006, **D74**, 014027.
- [109] Chen C.H. and Li H.n., “Three body nonleptonic B decays in perturbative QCD”, *Phys. Lett.*, 2003, **B561**, 258–265.
- [110] Shi Y.J. and Wang W., “Chiral Dynamics and S-wave contributions in Semileptonic D_s/B_s decays into $\pi^+\pi^-$ ”, *Phys. Rev.*, 2015, **D92**(7), 074038.
- [111] Meißner U.G. and Wang W., “ $B_s \rightarrow K^{(*)}\ell\bar{\nu}$, Angular Analysis, S-wave Contributions and $|\mathbf{V}_{ub}|$ ”, *JHEP*, 2014, **01**, 107.
- [112] Aaij R. *et al.*, “Measurement of the branching fractions of the decays $B_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 K^- \pi^+$ and $B^0 \rightarrow \bar{D}^0 K^+ \pi^-$ ”, *Phys. Rev.*, 2013, **D87**(11), 112009.
- [113] Aaij R. *et al.*, “Observation of the decay $B_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 K^+ K^-$ ”, *Phys. Rev.*, 2018, **D98**(7), 072006.
- [114] Aaij R. *et al.*, “Model-independent observation of exotic contributions to $B^0 \rightarrow J/\psi K^+ \pi^-$ decays”, 2019.
- [115] Aaij R. *et al.*, “Measurement of CP violation in the phase space of $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^-$ and $B^\pm \rightarrow K^\pm K^+ K^-$ decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 101801.
- [116] Wang W.F., Li H.n., Wang W., *et al.*, “S-wave resonance contributions to the $B_{(s)}^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ and $B_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \mu^-$ decays”, *Phys. Rev.*, 2015, **D91**(9), 094024.
- [117] Aaij R. *et al.*, “Measurement of resonant and CP components in $\bar{B}_s^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ decays”, *Phys. Rev.*, 2014, **D89**(9), 092006.
- [118] Flatte S.M., “On the Nature of 0^+ Mesons”, *Phys. Lett.*, 1976, **63B**, 228–230.

- [119] Ali A., Kramer G., Li Y., *et al.*, “Charmless non-leptonic B_s decays to PP , PV and VV final states in the pQCD approach”, *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, 074018.
- [120] Keum Y.Y., Kurimoto T., Li H.N., *et al.*, “Nonfactorizable contributions to $B \rightarrow D^{**(*)} M$ decays”, *Phys. Rev.*, 2004, **D69**, 094018.
- [121] Kim C.S., Li R.H., and Wang W., “ $B \rightarrow DK_{0,2}^*$ Decays: PQCD analysis to determine CP violation phase angle γ ”, *Phys. Rev.*, 2013, **D88**(3), 034003.
- [122] Muller D., Robaschik D., Geyer B., *et al.*, “Wave functions, evolution equations and evolution kernels from light ray operators of QCD”, *Fortsch. Phys.*, 1994, **42**, 101–141.
- [123] Diehl M., Gousset T., Pire B., *et al.*, “Probing partonic structure in $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi \pi$ near threshold”, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 1782–1785.
- [124] Buchalla G., Buras A.J., and Lautenbacher M.E., “Weak decays beyond leading logarithms”, *Rev. Mod. Phys.*, 1996, **68**, 1125–1144.
- [125] Beringer J. *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP)”, *Phys. Rev.*, 2012, **D86**, 010001.
- [126] Olive K.A. *et al.*, “Review of Particle Physics”, *Chin. Phys.*, 2014, **C38**, 090001.
- [127] Aaij R. *et al.*, “Measurement of the resonant and CP components in $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ decays”, *Phys. Rev.*, 2014, **D90**(1), 012003.
- [128] Wang W., “Determining CP violation angle γ with B decays into a scalar/tensor meson”, *Phys. Rev.*, 2012, **D85**, 051301.

致 谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表达衷心的感谢！

博士四年时光荏苒，其中包含了各种快乐与烦恼，成就与失败。这也使我在学习和生活上得到了历练。本论文是在导师王伟的谆谆教导下完成的，王老师工作认真仔细的态度使我受益匪浅。他教导我科研工作要石庆数马，见微知著，不能够避劳就逸，需要不断的挑战自己，借此感谢王老师的指导与帮助。同时感谢李作宏教授及李营教授在学习和生活上给予我非常多帮助与关心。

理论组博士后赵帅，施瑀基，赵振兴和师弟师妹徐吉，邢志鹏，胡晓会以及理论室其他人员，感谢他们给予我生活学习上的帮助。平时每每与他们讨论问题都使我受益颇多，并加深对专业知识的理解。博士后赵帅的学术范围的广泛与深度及谦虚的态度令我非常的佩服；赵振兴的生活与学习态度对我有很大的帮助；施瑀基喜欢多方面思考问题及钻研精神也逐渐感染了我；徐吉谦虚好学与他讨论问题总能让我受益匪浅；与胡晓会和邢志鹏的合作或者讨论，也让我深深的感到自己知识的匮乏并刺激我努力提升自己。感谢中科院张其安，与他的相处与交流非常融洽与受益良多。同时感谢李湘楠教授，吕才典教授，南京师范大学朱瑞林副教授，兰州大学于福升教授，曲阜师范大学李刚教授，山西大学王文飞副教授等，以及感谢粒子所的每一位老师，他们广博的学识与优秀的人品都可以作为我将来一直努力的方向。

最后感谢我的家人以及女朋友刘娜对我学习的支持，因为他们的支持我才可以心无旁骛的认真学习。

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] Cai-Dian Lu, Wei Wang, **Ye Xing**, Qi-An Zhang, “Perturbative QCD analysis of exclusive processes $e^+e^- \rightarrow VP$ and $e^+e^- \rightarrow TP$ ” , Phys.Rev.D, 2018, 97, no.11,114016.
- [2] Yu-Ji Shi, Wei Wang, **Ye Xing**, Ji Xu, “Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: Multi-body Decay Channels” , Eur. Phys. J.C, 2018, 78, no.1,56.
- [3] **Ye Xing**, Rui-Lin Zhu, “Weak Decays of Stable Doubly Heavy Tetraquark States” , Phys.Rev.D, 2018, 98, no.5,053005.
- [4] Gang Li, Xiao-Feng Wang, **Ye Xing**, “SU(3) analysis of Weak decays of doubly-Heavy Tetraquark $b\bar{c}q\bar{q}$ ” , Eur. Phys. J.C, 2019, 79, no.3,210.
- [5] **Ye Xing**, Fu-Sheng Yu, Rui-Lin Zhu, “Weak Decays of Stable Open-bottom Tetraquark by SU(3) Symmetry Analysis” , Eur. Phys. J.C, 2019, 79, no.5,373.
- [6] **Ye Xing**, Zhi-Peng Xing, “S-wave contributions in $\bar{B}_s^0 \rightarrow (D^0, \bar{D}^0)\pi^+\pi^-$ within perturbative QCD approach” , Chin.Phys.C 43 (2019) no.7, 073103.
- [7] Yu-ji Shi, **Ye Xing**, Zhen-Xing Zhao, “Light-Cone Sum Rules Analysis of $\Xi_{QQ'q} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ Weak Decays” , Eur. Phys.J.C 79 (2019) no.6, 501.
- [8] Gang Li, Xiao-Feng Wang, **Ye Xing**, “Fully Heavy Tetraquark $bb\bar{c}\bar{c}$: Lifetimes and Weak Decays” , Eur. Phys.J.C 79 (2019) no.8, 645.