

申请上海交通大学博士学位论文

夸克轻子味物理及暗物质相关问题研究

论文作者 李冠楠

学 号 0110729010

指导教师 何小刚 教授

专 业 物理学

答辩日期 2014 年 06 月

A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for the
Degree of Doctor

Some related studies on quark-lepton flavor
physics and dark matter phenomenology

Guan-Nan Li

Supervisor:

Prof. Xiao-Gang He

DEPARTMENT OF PHYSICS AND ASTRONOMY
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
SHANGHAI, P.R.CHINA

June, 2014

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日期：_____年____月____日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名： _____

指导教师签名： _____

日 期： _____年____月____日

日 期： _____年____月____日

夸克轻子味物理及暗物质相关问题研究

摘 要

粒子物理是研究基本粒子的性质及其相互作用规律的物理学前沿学科。目前,对于粒子物理的研究,一方面对于粒子物理标准模型的精确检验和寻找检验标准模型的新方法,另一方面是探索超出标准模型的新物理。随着 Higgs 粒子的发现,标准模型中各种粒子获得质量和对称性破缺机制得到了进一步验证,标准模型取得了巨大的成功。但是标准模型自身也存在一定的问题,如标准模型中没有夸克混合的物理解释,中微子的质量起源,以及暗物质粒子的性质等。因此,本文对夸克轻子混合、中微子质量以及暗物质领域的相关问题进行了探索和研究。

第一章简要概述了标准模型的基本理论和超标准模型新物理的众多研究方向,同时介绍了本文研究内容夸克轻子味物理及暗物质相关领域的理论和实验研究现状。第二章研究了夸克轻子味混合的参数化问题。提出了参数化夸克混合矩阵的新方法,采用幺正三角形中实验上可测量的特征 CP 破坏的相角 α, β, γ 建立起清晰的夸克混合的 α, β, γ 参数化,提出了夸克味混合角以及 CP 破坏相角参数化依赖问题的新的研究方向,并得到了近似的类 Wolfenstein 参数化的展开形式。基于目前实验上 β 相角相对精确的测量,我们提出 β 参数化是最佳参数化方式。并对重新参数化不变的夸克轻子互补性关系进行了研究,提出用夸克轻子混合矩阵元来表示夸克轻子的互补性关系的新方法。第三章对 B^+ 到 $\pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$, $K^+K^+K^-$ 衰变过程的衰变分支比和 CP 破坏分别进行了 $SU(3)$ 和 U 旋对称性分析。通过系统的方法构造出对称性不变、对称性破坏以及动量依赖项的振幅表示,解释了这些衰变的分支比以及 CP 对称性破缺的实验数据。我们发现衰变过程中有很大的对称性破坏。第四章研究了中微子质量起源、暗物质粒子及其相互联系。提出了辐射的翻转翘翘板机制下的暗物质模型并研究了模型的一些现象学暗示。我们建立了通过两圈的 Inverse seesaw 机制来使中微子产生质量的模型,可以把新物理的能标压低至几百个 GeV,而且可以自然地包含暗物质粒子。标准模型的轻子和模型中的新粒子通过 Yukawa 耦合发生相互作用,自然诱导出轻子味破坏过程,今后实验上对于轻子味破坏过程 $\mu \rightarrow e\gamma$ 和 $\mu - e$ 转化的测量会更强地限制 Yukawa 耦合常数

并对模型进行更进一步的检验。模型中新引入的荷电标量粒子会很大程度地影响 $h \rightarrow \gamma\gamma$ 过程的衰变分支比，从而可以很好地解释目前 LHC 的实验数据和标准模型预言的偏离。同时也给出了模型中引入的新粒子在 LHC 上的信号。

关键词： 夸克轻子味混合，CP 破坏，味对称性，中微子质量，暗物质。

Some related studies on quark-lepton flavor physics and dark matter phenomenology

ABSTRACT

Particle physics is a frontier branch of physics which studies the nature of the elementary particles and the interactions between them. Two important aspects of particle physics studies are: one is precision test of standard model including finding new methods to do it, and the other is to explore new physics beyond standard model. With the discovery of Higgs particle, the mechanism of particle mass generation and symmetry broken in the standard model has been tested. The standard model is very successful. However, the standard model itself also has some problems, such as, lacking of physical explanations for the quark mixing, the origin of neutrino mass, the existence of dark matter and so on. Therefore, we studied some related topics of quark-lepton mixing, neutrino masses and dark matter phenomena in this thesis.

In the first chapter, we briefly outlined the basics of standard model and some aspects of new physics beyond. The theoretical and experimental status on quark-lepton mixing and dark matter phenomena are briefly discussed. In the second chapter, we studied the parametrization of quark and lepton mixing. A new method of parametrization of quark mixing matrix has been developed. We proposed to use experimentally measurable CP violating quantities, α , β or γ in the unitarity triangle as the phase in Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix, and constructed explicit α , β and γ parameterizations. Approximate Wolfenstein-like expressions are also suggested. β is the most accurately measured among these three phase angles, we therefore considered the β parametrization the best one to use. We also proposed reparametrization invariant expressions for the complementarity relations in terms of the magnitude of the elements in the quark and lepton mixing matrices. In the third chapter, we carried out the $SU(3)$ and U -spin symmetry analysis for CP violations and branching ratios

in B^+ decays into $\pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$ and $K^+K^+K^-$ mesons. We constructed the amplitudes of the symmetry-invariant, symmetry-breaking and the momentum dependent terms in a systematic way and explained the experimental data on the branching ratios and CP asymmetries. We found that large symmetry breaking effects are needed to explain the data by the numerical analysis. At last, in the fourth chapter we studied the mechanism of neutrino mass generation, dark matter candidate and the relation between them. We constructed radiative inverse seesaw dark matter models and studied some phenomenological implications of the model. In this model because neutrino masses are generated at two loop level with inverse seesaw, the new physics scale can be as low as a few hundred GeV and the model also naturally contain dark matter candidate. The large Yukawa couplings linking the SM leptons and new particles, naturally leading to the lepton flavor violating effects. We find that future experimental data on $\mu \rightarrow e\gamma$ and $\mu - e$ conversion can further constrain the Yukawa coupling constant and test the model. The new charged scalar particles can affect significantly the $h \rightarrow \gamma\gamma$ branching ratio in the SM which is able to explain the deviation between the SM prediction and the LHC data. We also studied some LHC signatures of the new particles in the model.

KEY WORDS: Quark-Lepton Flavor Mixing, CP Violation, Flavor Symmetry, Neutrino Mass, Dark Matter .

目 录

摘要	i
ABSTRACT	iii
目录	v
表格索引	ix
插图索引	xi
第一章 绪论	1
1.1 标准模型及新物理	1
1.2 夸克轻子味物理	6
1.3 暗物质	8
参考文献	10
第二章 CKM 矩阵元的新的参数化方法	17
2.1 CKM 矩阵元的不同参数化方式	17
2.2 CKM 矩阵的 α, β, γ 参数化	22
2.2.1 CKM 矩阵的参数化依赖问题	22
2.2.2 α, β, γ 参数化	23
2.2.3 α, β, γ 参数化的相互关系	27
2.2.4 类 Wolfenstein 展开	28
2.3 重新参数化不变的夸克轻子互补性关系	29
2.4 本章小结	33
参考文献	34

第三章	B^\pm 三体非轻衰变的味对称性分析	39
3.1	B 物理简介	39
3.2	B^\pm 到带电赭标轻介子三体非轻衰变的 $SU(3)$ 对称性分析	42
3.2.1	$SU(3)$ 不变且动量无关的衰变振幅	43
3.2.2	$SU(3)$ 破坏和动量依赖项的贡献	47
3.2.3	数值分析	51
3.3	B^\pm 到带电赭标轻介子三体非轻衰变的 U 旋对称性分析	56
3.4	本章小结	63
	参考文献	64
第四章	辐射翻转跷跷板机制下的暗物质模型	71
4.1	暗物质粒子基本模型简介	71
4.2	中微子质量产生机制	75
4.3	辐射翻转跷跷板机制下的暗物质模型	78
4.4	$U(1)_D$ 模型的现象学暗示	84
4.4.1	$U(1)_D$ 模型的暗物质粒子	85
4.4.2	轻子味破坏	86
4.4.3	Higgs 衰变到双子的新物理效应	89
4.4.4	新粒子在 LHC 上的信号	93
4.5	本章小结	95
	参考文献	95
第五章	总结	103
附录 A	α, β, γ 参数化表示	105
附录 B	$SU(3)$ 破坏项振幅	109
附录 C	衰变振幅的动量依赖项修正	111
附录 D	轻子味破坏过程的计算	115
附录 E	新粒子信号 $pp \rightarrow D^0 St^-$ 截面的计算	121

致谢	123
攻读学位期间发表的学术论文目录	125

表格索引

3.1	$SU(3)$ 对称性预言和实验数据的对比	47
3.2	包含 $SU(3)$ 破坏效应的拟合结果与实验数据的对比	54
4.1	新粒子信号的产生截面与本底对比	95

插图索引

1.1	暗物质探测的不同类型	9
2.1	幺正三角形	24
2.2	中微子混合矩阵元比值随偏离角的变化	33
3.1	B 介子衰变费曼图	39
3.2	B 介子非轻衰变的实例	40
4.1	跷跷板机制费曼图	76
4.2	辐射跷跷板机制费曼图	77
4.3	中微子质量产生的两圈费曼图	81
4.4	暗物质残余密度和直接探测实验对暗物质 Higgs 耦合常数和残余密度的限制	86
4.5	轻子味破坏费曼图	87
4.6	轻子味破坏过程的实验限制	89
4.7	耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^1$ 和 $\lambda_{H\Delta}^2$ 的实验限制	91
4.8	耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^1$ 和 $\lambda_{H\Delta}^2$ 在 $R_{\gamma\gamma} = 1$ 时的关系限制	91
4.9	$h \rightarrow Z\gamma$ 比例因子的预言	92
4.10	在 $R_{\gamma\gamma} = 1$ 时 $h \rightarrow Z\gamma$ 比例因子的预言	92

第一章 绪论

1.1 标准模型及新物理

标准模型是建立在规范对称群 $G_{SM} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_L$ 上的规范理论 [1–4]。由描述弱相互作用和电磁相互作用的弱电统一理论以及描述强相互作用用的量子色动力学 (QCD) 共同组成。标准模型有三代夸克和三代轻子，带电粒子通过交换光子发生电磁相互作用，夸克通过交换胶子发生强相互作用，夸克和轻子在其味本征态通过交换 W^\pm, Z 玻色子发生弱相互作用，还有一个单态的标量粒子 Higgs 场通过电弱对称性自发破缺，获得非零的真空期待值，从而使得基本粒子获得质量。对三代费米子，每一代都包含规范群 G_{SM} 的五个基础表示：

$$Q_{Li}^I(3, 2)_{+1/6}, U_{Ri}^I(3, 1)_{+2/3}, D_{Ri}^I(3, 1)_{-1/3}, L_{Li}^I(1, 2)_{-1/2}, E_{Ri}^I(1, 1)_{-1}. \quad (1.1)$$

在上面的表示中，左手夸克 Q_L^I ，是 $SU(3)_C$ 的三重态 $SU(2)_L$ 的二重态同时带有弱超荷 $Y = +1/6$ 。 L, R 表示手征态，上标 I 表示规范相互作用的本征态。下标 $i = 1, 2, 3$ 表示不同的味。其它四个表示的类似，分别依次表示上三代夸克右手单态，下三代夸克的右手单态，三代轻子的左手二重态，以及三代轻子的右手单态。此外，与 Higgs 对应的标量场单态表示为： $\phi(1, 2)_{+1/2}$ 。标量场 ϕ 有非零的真空期待值，

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

这暗示着规范群的对称性自发破缺：

$$G_{SM} \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{EM} \quad (1.3)$$

标准模型的拉氏量 \mathcal{L}_{SM} 是可重整化的和满足规范不变的，它由三个部分组成：

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{kinetic} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (1.4)$$

其中，第一项为动能项：

$$\mathcal{L}_{kinetic} = \mathcal{L}_{kinetic}^{gauge} + \mathcal{L}_{kinetic}^{fermion} + \mathcal{L}_{kinetic}^{Higgs}. \quad (1.5)$$

规范场的动能项为：

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

对于费米子场的动能项 $\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}$ ，其中左手夸克 Q_L^I ，动能项为：

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}(Q_L) = i\overline{Q}_{Li}^I \gamma^\mu D_\mu Q_{Li}^I, \quad D_\mu = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g_s G_\mu^a \lambda^a + \frac{i}{2}g W_\mu^b \tau^b + \frac{i}{6}g' B_\mu \right) \quad (1.8)$$

右手夸克场 U_R^I, D_R^I 的动能项分别为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}(U_R) &= i\overline{U}_{Ri}^I \gamma^\mu D_\mu U_{Ri}^I, \quad D_\mu = \left(\partial_\mu + \frac{2i}{3}g' B_\mu \right) \\ \mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}(D_R) &= i\overline{D}_{Ri}^I \gamma^\mu D_\mu D_{Ri}^I, \quad D_\mu = \left(\partial_\mu - \frac{i}{3}g' B_\mu \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

对于左手轻子二重态 L_L^I 的动能项为：

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}(L_L) = i\overline{L}_{Li}^I \gamma^\mu D_\mu L_{Li}^I, \quad D_\mu = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g W_\mu^b \tau^b - \frac{i}{2}g' B_\mu \right) \quad (1.10)$$

右手轻子 E_R^I 的动能项为：

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{fermion}}(E_R) = i\overline{E}_{Ri}^I \gamma^\mu D_\mu E_{Ri}^I, \quad D_\mu = (\partial_\mu - ig' B_\mu) \quad (1.11)$$

对于标量场，动能项为：

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}}^{\text{Higgs}} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi, \quad D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau^b}{2} W_\mu^b + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \phi. \quad (1.12)$$

动能项的拉氏量有三个参数 g, g' 和 g_s ，它们是规范相互作用的耦合常数。其中 G_μ^a 是 8 个胶子场， W_μ^b 是三个弱相互作用的玻色子， B_μ 是带弱超荷的玻色子。 f_{ijk} 是结构常数， ϵ_{ijk} 是三阶全反对称张量。其中 λ^a 是 8 个 Gell-Mann 矩阵：

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

而 τ^b 表示 3 个 Pauli 矩阵:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第二项是 Higgs 势, 它描述标量场的自相互作用:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (1.13)$$

这部分拉氏量有两个参数 λ 和 μ , 真空稳定性要求 $\lambda > 0$, 对称性自发破缺要求 $\mu^2 < 0$. 在么正规范下, 选择真空:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

将得到树图水平下 Higgs 粒子的质量 $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ [5]. 而 Goldstone 玻色子被规范掉, 使得三个规范玻色子获得质量:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi &= \frac{1}{2} (0 \ \nu) \left[\frac{g}{2} \tau^b W_\mu^b + \frac{g'}{2} B_\mu \right]^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + H \text{ terms} \\ &\rightarrow M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{M_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu + H \text{ terms.} \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中, 物理的规范场:

$$\begin{aligned} W^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2) \\ Z &= -\sin \theta_W B + \cos \theta_W W^3. \\ A &= \cos \theta_W B + \sin \theta_W W^3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

W, Z 玻色子的质量为:

$$M_W = \frac{g\nu}{2}, \quad M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{\nu}{2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}. \quad (1.17)$$

θ_W 是 Weinberg 转动角。

$$\tan \theta_W \equiv \frac{g'}{g} \Rightarrow \sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}.$$

第三项是 Yukawa 相互作用项, 它包括轻子和重子两部分。在可重整化的水平, 夸克部分的 Yukawa 相互作用为:

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{quarks}} = Y_{ij}^d \overline{Q}_{Li}^I \phi D_{Rj}^I + Y_{ij}^u \overline{Q}_{Li}^I \tilde{\phi} U_{Rj}^I + \text{h.c.} \quad (1.18)$$

这种相互作用是夸克质量和味混合的来源。这里有 10 个物理参数，它可以选择为 6 个夸克的质量，和描述夸克混合的 4 个参数。Yukawa 相互作用将会产生质量项：

$$-\mathcal{L}_M^q = (M_d)_{ij} \overline{D}_{Li}^I D_{Rj}^I + (M_u)_{ij} \overline{U}_{Li}^I U_{Rj}^I + \text{h.c.}, \quad M_q = \frac{v}{\sqrt{2}} Y^q. \quad (1.19)$$

可以通过幺正矩阵 V_{qL} 和 V_{qR} 将质量矩阵进行对角化：

$$V_{qL} M_q V_{qR}^\dagger = M_q^{\text{diag}} \quad q = u, d. \quad (1.20)$$

相应的夸克质量本征态为：

$$q_{Li} = (V_{qL})_{ij} q_{Lj}^I, \quad q_{Ri} = (V_{qR})_{ij} q_{Rj}^I \quad q = u, d. \quad (1.21)$$

这样，得到夸克和 W^\pm 相互作用的带电弱流：

$$-\mathcal{L}_{W^\pm}^q = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u}_{Li} \gamma^\mu (V_{uL} V_{dL}^\dagger)_{ij} d_{Lj} W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (1.22)$$

如果自然界存在 n 代费米子， $i, j = n$ 时，描述夸克味混合的矩阵是一个 $n \times n$ 的复数矩阵，这个复数矩阵用 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个独立的欧拉角和 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个独立的相角来参数化，如果独立的相角个数不为零将会导致 CP 现象出现，在标准模型中有三代费米子，夸克味混合矩阵可以用三个独立的欧拉角和一个 CP 破坏相角来参数化。在标准模型中，描述夸克混合的矩阵 (CKM) [6, 7] 矩阵为：

$$V_{CKM} = V_{uL} V_{dL}^\dagger = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad (VV^\dagger = \mathbf{1}). \quad (1.23)$$

轻子部分的 Yukawa 相互作用为：

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{leptons}} = Y_{ij}^e \overline{L}_{Li}^I \phi E_{Rj}^I + \text{h.c.} \quad (1.24)$$

在 Higgs 场获得非零的真空期待值后，这种相互作用可以使带电轻子获得质量。轻子的 Yukawa 耦合项有三个物理参数，通常选为三代电轻子的质量。以上就是通常意义下的标准模型，在标准模型中，中微子是没有质量的。

如果中微子是有质量的，则需要引入新物理，同样轻子和 W^\pm 相互作用的带电弱流为：

$$-\mathcal{L}_{W^\pm}^l = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{l}_{Li} \gamma^\mu (U_l^\dagger U_\nu)_{ij} \nu_{Lj} W_\mu^- + \text{h.c.} \quad (1.25)$$

其中, 描述轻子混合的矩阵 (PMNS) [8, 9] 矩阵为:

$$U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}, \quad (UU^\dagger = \mathbf{1}). \quad (1.26)$$

虽然标准模型非常成功, 标准模型预言的所有粒子都已经被发现, 标准模型预言的最后一个标量粒子 Higgs 也已经在 LHC 上发现。但是标准模型还存一系列问题, 需要寻找超标准模型的新物理, 下面简单介绍几个方面。

规范问题: 标准模型的规范相互作用是建立在三个规范子群的直积的基础上的, 它们分别对应独立的规范耦合常数。而且只有电弱相互作用部分具有手征性, 标准模型对此没有解释。复杂的规范结构暗示将会存在潜在的统一的相互作用, 例如像人们期望的那样, 大统一理论 $SU(5)$ [10] 可以把三种规范相互作用统一起来, 而超弦理论可以将引力和三种规范相互作用统一在一起。

费米子问题: 我们的普通物质是由第一代费米子 (ν_e, e^-, u, d) 组成的。然而实验上探测并发现了有更重的第二代 (ν_μ, μ^-, c, s) 和第三代 (ν_τ, τ^-, t, b)。标准模型对于三代费米子的质量以及质量等级并没有解释和预言。对于夸克和轻子的混合并没有解释。对于中微子是 Majorana 型的还是 Dirac 型的没有预言。虽然实验上已经观测到的 CP 破坏现象可以被描述夸克味混合的矩阵 (CKM) 矩阵描述的很好, 但是标准模型没有解释 CP 破坏的来源, 目前我们没有足够的 CP 破坏来解释宇宙中的重子数不对称。

Higgs 问题: Higgs 粒子虽然已经在 LHC 上发现, 但是 Higgs 粒子的质量有精细调节的问题。物理的 Higgs 的质量来自于树图水平的裸质量和来自于平方发散项的圈图修正:

$$M_H^2 = (M_H^2)_{bare} + \mathcal{O}(\lambda, g^2, h^2)\Lambda^2, \quad (1.27)$$

这里 Λ 是理论的高能标, λ, g^2, h^2 分别为 Higgs 的自耦合以及和规范玻色子和费米子的耦合。如果我们的理论对于高能标的物理同样适用, 那么希望的 Λ 将会在普朗克能标 $M_P = G_N^{-1/2} \sim 10^{19}$ GeV。这样裸量和修正项之间的抵消将会有很大的精细调节。一种解决的办法是 TeV 能标下的超对称理论 [11, 12], 平方发散项的费米子和玻色子圈图修正可以抵消, 只留下很小程度的超对称破缺。同样也有小 Higgs 模型, 可以使这种抵消在费米子之间或玻色子之间抵消。但这些理论都受到电弱相互作用的很强的限制。

引力问题: 在标准模型中, 引力不能和其它的基本相互作用力自然地统一在一起。描述引力的广义相对论是不能量子化的。可能的办法有 Kaluza-Klein

理论 [13,14] 和超引力理论 [15,16]。这些理论虽然能把引力和其它的相互作用力自然地统一起来,但是不能解决引力量化的可重整化问题。更有希望的理论是弦理论。弦理论是最有可能的使粒子物理和引力统一的理论,但是目前呈现出无限多可能的弦真空 [17,18],没有明显的选择原则。

暗能量和暗物质问题:目前,值得注意的是,宇宙学对于宇宙微波背景辐射, Ia 型超新星,星系和星系团的大尺度分布,大爆炸原初核合成等观测数据保持一致,支持我们的宇宙是在加速膨胀的 [19]。这也为宇宙学参数的精确测定提供了可能,宇宙是接近于平坦的,有大约 68% 的暗能量,27% 的暗物质,5% 的普通物质 [20]。其中,暗能量是宇宙加速的主要能量贡献,但是在标准模型中没有解释。它的解释有可能是粒子物理标度下宇宙学常数的精细调节,或者是随时间变化的慢滚场。同样地,对于宇宙学尺度观测到的暗物质,标准模型也没有解释。目前关于暗物质的研究也都和基本粒子联系在一起,很大的一种可能是弱作用的重粒子,实验上也在通过各种方法来探测暗物质粒子。

1.2 夸克轻子味物理

夸克轻子味物理涉及粒子物理的诸多研究领域,包括标准模型以及超标准模型的新物理领域,夸克轻子味物理都是理论和实验关注的核心。在夸克味物理方面包括了夸克味混合矩阵的结构,味对称性,味道改变的中性流 (FCNC), CP 破坏,介子混合和振荡。轻子味物理方面中微子物理是研究的热点,并多和新物理的研究联系在一起,包括中微子质量产生,中微子混合,混合的对称性,轻子味破坏,电偶极矩等问题。

历史上味物理和 CP 破坏是探测新物理的很好的手段。例如,缺少 $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 的衰变预言了 charm 夸克的存在; $K^0 \bar{K}^0$ 混合系统的 CP 破坏预言了第三代粒子; $K^0 \bar{K}^0$ 的质量平方差预言了 charm 夸克的质量; $B^0 \bar{B}^0$ 系统的重轻质量本征态的质量差预言了 top 夸克的质量。这些测量对超标准模型的新物理有很强的限制,这就暗示着如果有 TeV 能标的新物理,它一定要有特殊的味和 CP 结构来满足这些限制。标准模型中 CP 破坏的来源有三种可能:其中之一就是由描述三代夸克混合的 CKM 矩阵导致的;如果标准模型加入了中微子的质量,那么轻子混合矩阵 (PMNS) 矩阵同样会导致 CP 破坏;另外,在味守恒的强相互作用中同样会有 CP 破坏现象出现, QCD 的拉氏量中可以存在一个额外的项 $\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g_s^2}{32\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$, θ 是一个无量纲的常数,当 $\theta \neq 0$ 时将导致强相互作用中有 CP 破坏出现,这称之为强 CP 破坏 [21,22]。作为 CP 破坏其中一个来源的 CKM 矩阵,它可以指导实验工作者通过寻找实验可观测量来精确测定混合矩

阵元。其中,夸克在 FCNC 箱图中的出现控制着混合的频率,因此也决定了中性介子的混合是否能在实验上观测到;在弱衰变主导的衰变过程中,有确定味量子数的最轻介子的寿命是由 CKM 矩阵元决定的;在混合和衰变振幅都有贡献的衰变过程中,不同代之间 CKM 的混合等级决定了可观测的 CP 破坏效应的相对尺度。B 介子工厂的成功运行,通过许多不同的动力学过程,很大程度地约束了 CKM 矩阵,因此也检验了 CKM 理论。

在轻子味物理方面,中微子自然是理论实验关注的焦点,在标准模型中,中微子是没有质量的,但是中微子振荡实验明确地表明中微子有着非零的质量。由于中微子的味本征态和质量本征态并不重合,因此中微子在传播的过程中会产生振荡,实验可以利用这个性质来同时测量中微子的混合角和不同代之间的质量平方差。目前,太阳中微子实验已经测量到了 1,2 两代之间的振荡,大气中微子实验测量到了 2,3 两代的振荡,中国的大亚湾中微子实验 [23] 以及 RENO [24], T2K [25], Double Chooz [26] 等实验也测到中微子的最后一个混合角,即 1,3 两代之间的振荡。但是目前实验上对于中微子的质量等级问题还没有定论,这需要进一步的实验。既然中微子有质量,那么中微子的质量产生就是一个问题,目前理论关于中微子质量产生的模型很多,以跷跷板机制最为流行 [27, 28], 随着 LHC 实验数据的不断更新,中微子质量的产生机制的各种模型就有望被实验检验。中微子的质量问题中会自然涉及到 Majorana 中微子的问题,根据目前的理论,中微子的质量矩阵中可以有 Dirac 项也可以有 Majorana 项。对于中微子到底是 Majorana 型还是 Dirac 型的,实验上是通过无中微子的双 β 来进行探测的 [29], 目前还没有明确的结论。在中微子振荡的实验中,LSND 等实验发现了中微子振荡异常的现象 [30], 在目前的三代中微子框架中无法解释观测到的实验数据,目前理论上是提出增加一代不参与弱相互作用的单态费米子来解决异常现象,新引入的一代中微子被称之为惰性中微子。中微子相关的研究方向还有很多,如有质量中微子的磁矩和中微子的衰变,中微子对于轻子数生成的影响等。

此外,味对称性也是味物理的一个重要研究方向。夸克和轻子都有三种味,研究不同味之间的关系有助于解释夸克和轻子的不同混合模式。目前的实验数据显示三代夸克之间存在很小的味混合而三代轻子之间有很大的味混合,这也称之为味结构之谜。也就是说人们希望建立起质量矩阵和混合矩阵的关系,在一个更基本的理论上,标准模型的 Yukawa 耦合可以有更加全面的理解。在各种对称性中,非阿贝尔分立对称性被广泛地进行了研究,例如, A_4, S_3, Z_2, Z_3, D_4 等 [31–34], 这些模型的大多数模型可以自然地产生轻子部分的双大混合模式而

不用无质量的 Goldstone 玻色子 [35], 不同味对称模型下得的费米子和 Higgs 可以不断地被实验进行检验。但是目前实验已经发现轻子部分非零的 1,3 混合角, 这将导致理论学家对这些模型做不同程度的修改。同时一些连续味对称性在强子物理里面有着重要的应用, 我们熟知的描述夸克模型 $SU(3)$ 味对称性, 质子中子强相互作用中的同位旋对称性。在介子的一些衰变过程也可以用味对称性来分析, 例如, B 介子的非轻衰变, 由于非轻衰变过程卷入了复杂的强相互作用和弱相互作用, 衰变过程非常复杂, 目前由于我们对于强相互作用的有限了解, 目前各种理论模型对于衰变分支比的计算都有很大的不确定性, 因此味对称性是一个分析衰变过程的很好的途径, 对于不同的衰变过程, 常涉及到的味对称性有 $SU(3)$, U 旋 [36,37], 同位旋等。

1.3 暗物质

现代意义下的暗物质概念是由瑞士天文学家 Fritz Zwicky 首先提出的, 它在研究后发星系团中星系运动的速度弥散时, 发现后发星系团的质光比要比太阳大 400 倍左右 [38]。这说明星系团中各个星系的运动速度太快了, 仅仅依靠后发星系团中的可见物质的引力相互作用很难使整个星系团保持稳定, 因此, 星系团中一定有我们看不见的物质, 它们的引力贡献使星系团保持稳定。目前, 天文观测上还有很多方法可以测量星系团的质量, 例如, 弥散于星系团中的高温度的 X 射线气体的精确测量、星系速度的分布、强引力透镜、弱引力透镜等天文学观测都证实了暗物质的存在。其中天文学上确定暗物质存在的最直接的证据是漩涡星系旋转曲线的测量 [39]。天文学观测可以测量星系中恒星绕星系中心的旋转速度随恒星到星系中心距离的变化关系。实验上测量到的旋转曲线在距离星系中心很远的地方会变的比较平, 而按照经典的牛顿力学, 轨道速度的平方应该和距离成反比, 因此实验观测结果与按照可见物质的理论推测严重不符, 这就意味星系中包含了更多的没有被直接观测到的暗物质, 这些物质只是通过引力的效应表现出来。另外, 2006 年, 钱德拉 X 射线望远镜对子弹星系团的观测, 为暗物质的存在提供了又一个直接的证据 [40]。钱德拉卫星发现了子弹星系团的两个子星系团在垂直于视线方向上发生了一次高速碰撞, 通过弱引力透镜的观测, 发现子弹星系团的重子物质和两个星系的质量中心并不重合, 这一现象使人们清晰看到了普通物质与引力场的明显的空间分离, 而对于这种现象, 修改目前的引力理论是很难解释的, 引入暗物质是比较自然的解释。因为普通重子物质之间的相互作用很强, 而暗物质之间的相互作用很弱。因此碰撞过程中, 普通物质通过强相互作用减速, 而暗物质基本上互相穿过, 从而造成了

碰撞后普通物质和暗物质的空间分布的明显偏离。目前，随着普朗克卫星关于宇宙微波背景各向异性的进一步精确测量，我们有可能通过拟合观测数据确定宇宙中暗物质的总量。目前拟合的结果给出暗物质在整个宇宙中所占的组分大约为 27% [20]。天文学观测上已经确定了暗物质存在的证据。在小尺度上，在粒子物理的尺度上，目前也有不同的实验在对暗物质进行探测，在粒子物理的标准模型中并没有暗物质的直接候选者，因此暗物质直接和间接探测实验将对暗物质粒子理论模型的研究提供有力的实验支持。由于弱作用的重粒子是暗物质粒子模型中被研究最多的，因此，实验上对于这种暗物质粒子的寻找是最多的。下面根据暗物质与普通物质的不同相互作用方式来介绍几种暗物质探测实验。

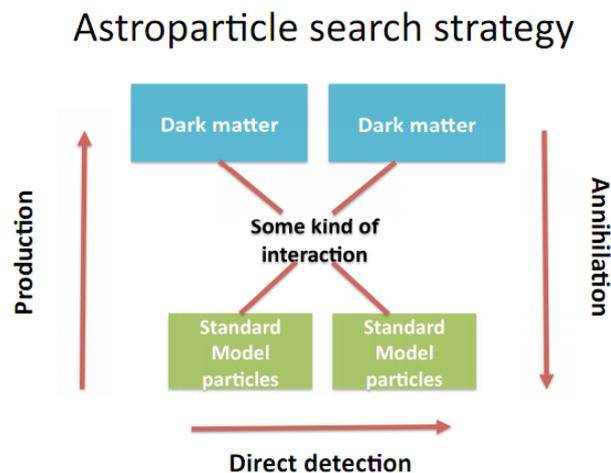


图 1.1 暗物质探测的不同类型。

Figure 1.1 Sketch of the different types of astroparticle search strategies for dark-matter detection.

强子对撞机上的寻找：如果弱作用的重粒子在大型强子对撞机上产生，它们也不会被直接探测到。因为它们是弱作用的中性粒子，在对撞机上表现为能量的丢失，当然在对撞机上对于中微子的寻找也是通过丢失的能量重建事例来探测中微子的。对于暗物质的寻找需要一些特殊的信号 [41, 42]。如图 1.1 左侧所示，如果标准模型的粒子通过相互作用产生了暗物质粒子，实验上就可通过末态信息来探测暗物质信号。目前 CMS 和 ATLAS 已经进行了这方面的研究，一般是来观测暗物质对产生的信号，碰撞过程中初态的夸克可能辐射出单光子和单胶子，因此在对产生的暗物质在末态的信号就表现为单光子和能量丢失或者单喷注和能量丢失。实验上就是通过这样的信号来寻找暗物质的，目前的实验数据还没有任何超标准模型新物理的信号，但是可以对弱作用重粒子的暗物质

模型进行很好的限制 [43]。

直接探测实验：如图 1.1 下侧所示，暗物质直接探测实验是通过暗物质粒子与标准模型粒子的弹性散射来寻找暗物质的信号。暗物质在地球的周围有一定的速度分布，如果暗物质和地球上的探测器发生碰撞时，探测器上的原子核会有核反冲信号，实验上就是通过核反冲信号来寻找暗物质的。但是这对实验的要求很高，这要求探测器要有足够的灵敏度，而且需要很低的本底。实验上，目前 DAMA, CDMSII, CoGeNT, CRESST 都发现了 10 GeV 左右的暗物质信号 [44–47]，但是这些实验暗物质事例的区域彼此不重合，而且也有其他的平行的实验，如 XENON100, LUX 实验 [48, 49] 已经将这些区域的暗物质事例排除，这有待于实验的进一步验证和分析，对于暗物质与核子的相互作用截面，LUX 实验给出了最强的限制，这也将会对不同的暗物质模型的物理参数空间给出更强的限制。

间接探测实验：如图 1.1 右侧所示，如果暗物质粒子可以湮灭到标准模型的粒子，那么我们就可以通过探测卫星来寻找宇宙中暗物质湮灭的信号。目前的宇宙线探测卫星有许多，近期 AMS-02 在宇宙线当中正电子子比 $e^+/(e^- + e^+)$ 的高精度的测量数据，发现能谱中从 5 到 350 GeV 的范围有连续的本底超出，而没有反质子的超出 [50]，这也和 CAPRICE, HEAT, AMS-01, PAMELA, Fermi-LAT 实验 [51–55] 所观测到的普遍行为一致，尽管有许多其他的机制可以解释实验现象，但是它也无暗物质信号提供了强有力的实验支持。这还有有待于实验和理论的进一步论证和分析。

参考文献

- [1] Glashow S., “Partial Symmetries of Weak Interactions”, Nucl. Phys., 1961, **22**, 579–588.
- [2] Weinberg S., “A Model of Leptons”, Phys. Rev. Lett., 1967, **19**, 1264–1266.
- [3] Salam A., “Weak and Electromagnetic Interactions”, Conf. Proc., 1968, **C680519**, 367–377.
- [4] Beringer J. *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP)”, Phys. Rev., 2012, **D86**, 010001.
- [5] Higgs P.W., “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”, Phys. Rev. Lett., 1964, **13**, 508–509.

- [6] Cabibbo N., “Unitary Symmetry and Leptonic Decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 531–533.
- [7] Kobayashi M. Maskawa T., “CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”, *Prog. Theor. Phys.*, 1973, **49**, 652–657.
- [8] Pontecorvo B., “Mesonium and anti-mesonium”, *Sov. Phys. JETP*, 1957, **6**, 429.
- [9] Maki Z., Nakagawa M., Sakata S., “Remarks on the unified model of elementary particles”, *Prog. Theor. Phys.*, 1962, **28**, 870–880.
- [10] Georgi H. Glashow S., “Unity of All Elementary Particle Forces”, *Phys. Rev. Lett.*, 1974, **32**, 438–441.
- [11] Nilles H.P., “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics”, *Phys. Rept.*, 1984, **110**, 1–162.
- [12] Haber H.E. Kane G.L., “The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model”, *Phys. Rept.*, 1985, **117**, 75–263.
- [13] Bailin D. Love A., “KALUZA-KLEIN THEORIES”, *Rept. Prog. Phys.*, 1987, **50**, 1087–1170.
- [14] Salam A. Strathdee J., “On Kaluza-Klein Theory”, *Annals Phys.*, 1982, **141**, 316–352.
- [15] Maldacena, Juan M, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity”, 1997, [arXiv:hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200).
- [16] Van Nieuwenhuizen P., “Supergravity”, *Phys. Rept.*, 1981, **68**(4), 189–398.
- [17] Bousso R. Polchinski J., “Quantization of four form fluxes and dynamical neutralization of the cosmological constant”, *JHEP*, 2000, **0006**, 006, [[arXiv:hep-th/0004134](https://arxiv.org/abs/hep-th/0004134)].
- [18] Kachru S., Kallosh R., Linde A., *et al.*, “de sitter vacua in string theory”, *Phys. Rev.*, 2003, **D68**, 046005.

- [19] Dunkley J. *et al.*, “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Likelihoods and Parameters from the WMAP data”, *Astrophys. J. Suppl.*, 2009, **180**, 306–329, [arXiv:0803.0586[astro-ph]].
- [20] Ade, PAR and Aghanim, N and Armitage-Caplan, C and Arnaud, M and Ashdown, M and Atrio-Barandela, F and Aumont, J and Baccigalupi, C and Banday, AJ and Barreiro, RB and others, “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results”, 2013.
- [21] Dine M., Fischler W., Srednicki M., “A Simple Solution to the Strong CP Problem with a Harmless Axion”, *Phys. Lett.*, 1981, **B104**, 199.
- [22] Kim J.E. Nilles H.P., “The mu Problem and the Strong CP Problem”, *Phys. Lett.*, 1984, **B138**, 150.
- [23] An F. *et al.*, “Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 171803, [arXiv:1203.1669[hep-ex]].
- [24] Ahn J. *et al.*, “Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 191802, [arXiv:1204.0626[hep-ex]].
- [25] Abe K., Abgrall N., Aihara H., *et al.*, “Recent Results from the T2K Experiment”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 2014, **246-247**, 23–28.
- [26] Abe Y. *et al.*, “Background-independent measurement of θ_{13} in Double Chooz”, 2014, arXiv:1401.5981[hep-ex].
- [27] Yanagida T., “HORIZONTAL SYMMETRY AND MASSES OF NEUTRINOS”, *Conf. Proc.*, 1979, **C7902131**, 95–99.
- [28] Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R., “Complex Spinors and Unified Theories”, *Conf. Proc.*, 1979, **C790927**, 315–321, [arXiv:1306.4669[hep-th]].
- [29] Bilenky S.M., Giunti C., Grimus W., *et al.*, “Constraints from neutrino oscillation experiments on the effective majorana mass in neutrinoless double β decay”, *Phys. Lett.*, 1999, **B465(1)**, 193–202.

- [30] Athanassopoulos, C and Auerbach, LB and Burman, RL and Cohen, I and Caldwell, DO and Dieterle, BD and Donahue, JB and Eisner, AM and Fazely, A and Federspiel, FJ and others, “Evidence for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations from the LSND Experiment at the Los Alamos Meson Physics Facility”, Phys. Rev. Lett., 1996, **77**(15), 3082.
- [31] Ma E., “A(4) symmetry and neutrinos with very different masses”, Phys. Rev., 2004, **D70**, 031901, [arXiv:hep-ph/0404199].
- [32] Babu K., Ma E., Valle J., “Underlying A(4) symmetry for the neutrino mass matrix and the quark mixing matrix”, Phys. Lett., 2003, **B552**, 207–213, [arXiv:hep-ph/0206292].
- [33] He X.G., Keum Y.Y., Volkas R.R., “A4 flavour symmetry breaking scheme for understanding quark and neutrino mixing angles”, JHEP, 2006, **2006**(04), 039.
- [34] Harrison P. Scott W., “Permutation symmetry, tri-bimaximal neutrino mixing and the s_3 group characters”, Phys. Lett., 2003, **B557**(1), 76–86.
- [35] Mohapatra R.N. Nussinov S., “Bimaximal neutrino mixing and neutrino mass matrix”, Phys. Rev., 1999, **D60**(1), 013002.
- [36] Xu D., Li G.N., He X.G., “Large SU(3) breaking effects and CP violation in B^+ decays into three charged octet pseudoscalar mesons”, Int. J. Mod. Phys., 2014, **A29**, 1450011, [arXiv:1307.7186[hep-ph]].
- [37] Xu D., Li G.N., He X.G., “U-spin analysis of CP violation in B^- decays into three charged light pseudoscalar mesons”, Phys. Lett., 2014, **B728**, 579–584, [arXiv:1311.3714[hep-ph]].
- [38] Baade W. Zwicky F., “On super-novae”, PNAS, 1934, **20**(5), 254.
- [39] Einasto J., Saar E., Kaasik A., *et al.*, “Missing mass around galaxies-morphological evidence”, Nature, 1974, **252**, 111–113.
- [40] Petrosian V., Madejski G., Luli K., “Analysis and Interpretation of Hard X-ray Emission from the Bullet Cluster (1E0657-56), the Most Distant Cluster

- of Galaxies Observed by the RXTE”, *Astrophys. J.*, 2006, **652**, 948–954, [arXiv:astro-ph/0608455].
- [41] Chatrchyan S. *et al.*, “Search for dark matter and large extra dimensions in monojet events in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV”, *JHEP*, 2012, **1209**, 094, [arXiv:1206.5663[hep-ex]].
- [42] Aad G. *et al.*, “Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a photon and missing transverse momentum in pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 011802, [arXiv:1209.4625[hep-ex]].
- [43] Alves D. *et al.*, “Simplified Models for LHC New Physics Searches”, *J. Phys.*, 2012, **G39**, 105005, [arXiv:1105.2838[hep-ph]].
- [44] Bernabei R., Belli P., d’Angelo S., *et al.*, “DAMA/LIBRA results and perspectives, Bled 2013”, 2014, arXiv:1403.1404[physics.ins-det].
- [45] Agnese R. *et al.*, “Silicon Detector Dark Matter Results from the Final Exposure of CDMS II”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 251301, [arXiv:1304.4279[hep-ex]].
- [46] Aalseth C. *et al.*, “Results from a Search for Light-Mass Dark Matter with a P-type Point Contact Germanium Detector”, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **106**, 131301, [arXiv:1002.4703[astro-ph.CO]].
- [47] Angloher G., Bauer M., Bavykina I., *et al.*, “Results from 730 kg days of the CRESST-II Dark Matter Search”, *Eur. Phys. J.*, 2012, **C72**, 1971, [arXiv:1109.0702[astro-ph.CO]].
- [48] Baudis L., “Results from the XENON100 Dark Matter Search Experiment”, *Pontif. Acad. Sci. Scr. Varia*, 2011, **119**, 315–327.
- [49] Akerib D. S., Araújo H. M., Bai X., *et al.*, “First results from the lux dark matter experiment at the sanford underground research facility”, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **112**, 091303.

- [50] Aguilar M. *et al.*, “First Result from the Alpha Magnetic Spectrometer on the International Space Station: Precision Measurement of the Positron Fraction in Primary Cosmic Rays of 0.5 – 350 GeV”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**(14), 141102.
- [51] Boezio M., Carlson P., Francke T., *et al.*, “The Cosmic-Ray Electron and Positron Spectra Measured at 1 AU during Solar Minimum Activity”, *Astrophys. J.*, 2000, **532**, 653–669.
- [52] Beatty J., Bhattacharyya A., Bower C., *et al.*, “New measurement of the cosmic-ray positron fraction from 5 to 15-GeV”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**, 241102, [arXiv:astro-ph/0412230].
- [53] Aguilar M. *et al.*, “Cosmic-ray positron fraction measurement from 1 to 30-GeV with AMS-01”, *Phys. Lett.*, 2007, **B646**, 145–154, [arXiv:astro-ph/0703154].
- [54] Adriani O. *et al.*, “An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5-100 GeV”, *Nature*, 2009, **458**, 607–609, [arXiv:0810.4995[astro-ph]].
- [55] Ackermann M. *et al.*, “Measurement of separate cosmic-ray electron and positron spectra with the Fermi Large Area Telescope”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 011103, [arXiv:1109.0521[astro-ph.HE]].

第二章 CKM 矩阵元的新的参数化方法

夸克轻子味混合是味物理研究的重要课题。三代夸克轻子质量和夸克轻子的混合角及描述 CP 破坏的相角是味物理的重要参数。由于夸克轻子的质量本征态和弱相互作用的本征态并不重合，这就导致了夸克轻子的味混合。CKM 矩阵 [1, 2] 和 PMNS 矩阵 [3, 4] 是描述夸克轻子味改变过程的重要参数，因此如何参数化 CKM 矩阵对于研究夸克味改变过程具有重要的意义。

本章第一节介绍参数化 CKM 矩阵数学上等价的九种不同的方式，第二节介绍一种参数化 CKM 矩阵的新方法，用描述 CP 现象的实验可观测量 α , β 和 γ 相角来参数化 CKM 矩阵，并且证明不同参数化形式在数学上是完全等价的，这样 CP 破坏的相角就是参数化独立的，解决了 CKM 矩阵的参数化依赖问题。第三节研究夸克轻子的互补性关系，在第二章的基础上提出重新参数化不变的夸克轻子互补性关系，用 CKM 矩阵元和 PMNS 矩阵元来表示夸克轻子的互补性关系。最后作出总结。

2.1 CKM 矩阵元的不同参数化方式

在标准模型弱电统一理论中夸克味混合现象由一个 3×3 的矩阵即 CKM 矩阵来描述。CKM 矩阵含有四个参数，3 个转动角和 1 个用来描述 CP 破坏过程的相角。许多不同的参数化方法已经被广泛的研究，下面我们介绍数学上等价的九种不同的参数化方式。

标准模型中夸克与 W^\pm 弱相互作用的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} D_L W_\mu^+ + H.C. \quad (2.1)$$

其中， $U_L = (u_L, c_L, t_L)^T$, $D_L = (d_L, s_L, b_L)^T$ 夸克弱流可以被表示为：

$$\overline{(u, c, t)}_L \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (2.2)$$

这里 u, c, \dots, b 表示夸克的本征态， L 表示左手场， V_{ij} 是 CKM 矩阵元。通常 V_{ij} 是复数，但是它们的绝对值是实验可观测量。 V_{ij} 的相角是没有物理对应的，就像夸克场的相角一样。

如果考虑味混合的矩阵是实的正交矩阵, 那么它可以被表示成三个矩阵的乘积, R_{12} , R_{23} 和 R_{31} , 这三个矩阵分别表示 (1,2), (2,3) 和 (3,1) 平面内的转动:

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta) &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ R_{23}(\sigma) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\sigma & s_\sigma \\ 0 & -s_\sigma & c_\sigma \end{pmatrix}, \\ R_{31}(\tau) &= \begin{pmatrix} c_\tau & 0 & s_\tau \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\tau & 0 & c_\tau \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里 $s_\theta \equiv \sin \theta$, $c_\theta \equiv \cos \theta$, etc. 我们可以清楚看到任意两个转动矩阵之间是彼此不对易的。通过对这些转动矩阵进行不同的排列组合可以构造出最一般的正交矩阵 R , 总共有 12 种不同的排列方式。在构造 R 的时候, $R_{ij}^{-1}(\omega)$ 和 $R_{ij}(\omega)$ 是等价的, 因为 $R_{ij}^{-1}(\omega) = R_{ij}(-\omega)$ 。而且由于 $R_{ij}(\omega)R_{ij}(\omega') = R_{ij}(\omega + \omega')$, 因此, 乘积 $R_{ij}(\omega)R_{ij}(\omega')R_{kl}(\omega'')$ 或者 $R_{kl}(\omega'')R_{ij}(\omega)R_{ij}(\omega')$ 因为不能覆盖 3×3 正交矩阵 R 的全空间而被排除。这样, R 的 12 种不同的构造方式可以被表示为 [5]:

- (1) $R = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta')$,
- (2) $R = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta')$,
- (3) $R = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma')$,
- (4) $R = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma')$,
- (5) $R = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta) R_{31}(\tau')$,
- (6) $R = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau')$,
- (7) $R = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau)$,
- (8) $R = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma)$,
- (9) $R = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta) R_{31}(\tau)$,
- (10) $R = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta)$,
- (11) $R = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma)$,
- (12) $R = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta)$.

虽然以上的 12 种组合方式表示了最一般的正交矩阵，但是其中只有 9 种是独立的，它们在结构上是不同的。因为， $R_{ij}R_{kl}R_{ij}$ 和 $R_{ij}R_{mn}R_{ij}$ ($ij \neq kl \neq mn$) 是彼此关联的，这样就会导致相同形式的出现。事实上，排列形式(1), (3), (5) 和 (2), (4), (6) 有如下的关系：

$$\begin{aligned} R_{12}(\theta) R_{31}(\tau) R_{12}(\theta') &= R_{12}(\theta + \pi/2) R_{23}(\sigma = \tau) R_{12}(\theta' - \pi/2), \\ R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma') &= R_{23}(\sigma - \pi/2) R_{12}(\theta = \tau) R_{23}(\sigma' + \pi/2), \\ R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau') &= R_{31}(\tau + \pi/2) R_{12}(\theta = \sigma) R_{31}(\tau' - \pi/2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

因此，正交矩阵 R 只有 9 种不同的构造方式，我们选择 (1), (3), (5) 和 (7) - (12) 作为这 9 种不同的构造正交矩阵的方式。

以上我们已经用三个转动角构造出了转动矩阵，下面我们需要在转动矩阵中把描述 CP 破坏的相角 φ 包含进来，这时我们就有了描述夸克味混合幺正矩阵的四个参数，我们就可以得到参数化 CKM 矩阵的 9 种不同的方式。CP 破坏的相角有不同的方式进入转动矩阵当中，以 R_{12} 为例：

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta e^{+i\varphi} & 0 \\ -s_\theta e^{-i\varphi} & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

或

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

或

$$R_{12}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} c_\theta e^{+i\varphi} & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

类似地，我们同样可以把相参数引入到转动矩阵 R_{23} 或 R_{31} 中。这样，我们就可以用一个复数转动矩阵 R_{ij} 和两个实数转动矩阵构造出 CKM 矩阵 V 。在 CKM 矩阵元当中，CP 破坏相角的位置可以通过重新定义夸克场的相角进行变换，所以相角的位置并不影响不同参数化方式的分类。在构造 CKM 矩阵时，我们总是可以做到让相角位于 CKM 矩阵的一个 2×2 的子矩阵当中，而其余的五个矩阵元为实数。相应地，我们将公式 (2.3) 中实数转动矩阵进行 $1 \rightarrow e^{-i\varphi}$ 的

替换就可以得到复数转动矩阵 $R_{12}(\theta, \varphi)$, $R_{23}(\sigma, \varphi)$ 和 $R_{31}(\tau, \varphi)$ 。从而得到 CKM 矩阵的 9 种不同的参数化方式 [5]:

$$P1 : V = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{12}^{-1}(\theta') \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_{\theta'} c_{\theta'} s_\sigma^2 c_\sigma \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} s_\theta s_{\theta'} c_\sigma + c_\theta c_{\theta'} e^{-i\varphi} & s_\theta c_{\theta'} c_\sigma - c_\theta s_{\theta'} e^{-i\varphi} & s_\theta s_\sigma \\ c_\theta s_{\theta'} c_\sigma - s_\theta c_{\theta'} e^{-i\varphi} & c_\theta c_{\theta'} c_\sigma + s_\theta s_{\theta'} e^{-i\varphi} & c_\theta s_\sigma \\ -s_{\theta'} s_\sigma & -c_{\theta'} s_\sigma & c_\sigma \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{ub}/V_{cb}| \\ \tan \theta' = |V_{td}/V_{ts}| \\ \cos \sigma = |V_{tb}| \end{array}$$

$$P2 : V = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta, \varphi) R_{23}^{-1}(\sigma') \quad \mathcal{J} = s_\theta^2 c_\theta s_\sigma c_\sigma s_{\sigma'} c_{\sigma'} \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta c_{\sigma'} & -s_\theta s_{\sigma'} \\ -s_\theta c_\sigma & c_\theta c_\sigma c_{\sigma'} + s_\sigma s_{\sigma'} e^{-i\varphi} & -c_\theta c_\sigma s_{\sigma'} + s_\sigma c_{\sigma'} e^{-i\varphi} \\ s_\theta s_\sigma & -c_\theta s_\sigma c_{\sigma'} + c_\sigma s_{\sigma'} e^{-i\varphi} & c_\theta s_\sigma s_{\sigma'} + c_\sigma c_{\sigma'} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cos \theta = |V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{td}/V_{cd}| \\ \tan \sigma' = |V_{ub}/V_{us}| \end{array}$$

$$P3 : V = R_{23}(\sigma) R_{31}(\tau, \varphi) R_{12}(\theta) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau^2 \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta c_\tau & s_\tau \\ -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & s_\sigma c_\tau \\ -c_\theta c_\sigma s_\tau + s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{us}/V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{cb}/V_{tb}| \\ \sin \tau = |V_{ub}| \end{array}$$

$$P4 : V = R_{12}(\theta) R_{31}(\tau, \varphi) R_{23}^{-1}(\sigma) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau^2 \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & c_\theta s_\sigma s_\tau + s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma s_\tau - s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_\tau & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\tau & s_\sigma c_\tau & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{cd}/V_{ud}| \\ \tan \sigma = |V_{ts}/V_{tb}| \\ \sin \tau = |V_{td}| \end{array}$$

$$P5 : V = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta, \varphi) R_{31}^{-1}(\tau') \quad \mathcal{J} = s_\theta^2 c_\theta s_\tau c_\tau s_{\tau'} c_{\tau'} \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau c_{\tau'} + s_\tau s_{\tau'} e^{-i\varphi} & s_\theta c_\tau & -c_\theta c_\tau s_{\tau'} + s_\tau c_{\tau'} e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_{\tau'} & c_\theta & s_\theta s_{\tau'} \\ -c_\theta s_\tau c_{\tau'} + c_\tau s_{\tau'} e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\tau & c_\theta s_\tau s_{\tau'} + c_\tau c_{\tau'} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cos \theta = |V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{ts}/V_{us}| \\ \tan \tau' = |V_{cb}/V_{cd}| \end{array}$$

$$P6 : V = R_{12}(\theta) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{31}(\tau) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma^2 s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & s_\theta c_\sigma & s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\theta s_\tau e^{-i\varphi} \\ -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma & c_\theta s_\sigma c_\tau - s_\theta s_\tau e^{-i\varphi} \\ -c_\sigma s_\tau & -s_\sigma & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{us}/V_{cs}| \\ \sin \sigma = |V_{ts}| \\ \tan \tau = |V_{td}/V_{tb}| \end{array}$$

$$P7 : V = R_{23}(\sigma) R_{12}(\theta, \varphi) R_{31}^{-1}(\tau) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta^2 s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta & -c_\theta s_\tau \\ -s_\theta c_\sigma c_\tau + s_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma & s_\theta c_\sigma s_\tau + s_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \\ s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sin \theta = |V_{us}| \\ \tan \sigma = |V_{ts}/V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{ub}/V_{ud}| \end{array}$$

$$P8 : V = R_{31}(\tau) R_{12}(\theta, \varphi) R_{23}(\sigma) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta^2 s_\sigma c_\sigma s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & s_\theta c_\sigma c_\tau - s_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} & s_\theta s_\sigma c_\tau + c_\sigma s_\tau e^{-i\varphi} \\ -s_\theta & c_\theta c_\sigma & c_\theta s_\sigma \\ -c_\theta s_\tau & -s_\theta c_\sigma s_\tau - s_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\sigma c_\tau e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sin \theta = |V_{cd}| \\ \tan \sigma = |V_{cb}/V_{cs}| \\ \tan \tau = |V_{td}/V_{ud}| \end{array}$$

$$P9 : V = R_{31}(\tau) R_{23}(\sigma, \varphi) R_{12}^{-1}(\theta) \quad \mathcal{J} = s_\theta c_\theta s_\sigma c_\sigma^2 s_\tau c_\tau \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma s_\tau - s_\theta c_\tau e^{-i\varphi} & c_\sigma s_\tau \\ s_\theta c_\sigma & c_\theta c_\sigma & s_\sigma \\ -s_\theta s_\sigma c_\tau - c_\theta s_\tau e^{-i\varphi} & -c_\theta s_\sigma c_\tau + s_\theta s_\tau e^{-i\varphi} & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix} \begin{array}{l} \tan \theta = |V_{cd}/V_{cs}| \\ \sin \sigma = |V_{cb}| \\ \tan \tau = |V_{ub}/V_{tb}| \end{array}$$

每种参数化的一些有用的关系也已经给出。其中用来测量 CP 破坏并具有相转移不变性的参量 \mathcal{J} 的定义为 [6, 7]:

$$\text{Im}(V_{il}V_{jm}V_{im}^*V_{jl}^*) = \mathcal{J} \sum_{k,n=1}^3 (\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}) , \quad (2.5)$$

这九种不同的参数化方式在数学上是完全等价的。其中, 我们注意到 $P2$ 和 $P3$ 分别对应于早期的 Kobayashi-Maskawa 参数化和国际粒子物理数据组通用的标准参数化(即PDG参数化), 通过重新定义夸克场 $c \rightarrow c e^{-i\varphi}$, $t \rightarrow t e^{-i\varphi}$, 和 $b \rightarrow b e^{-i\varphi}$ 我们可以清晰地看出来它们的等价关系。

2.2 CKM 矩阵的 α, β, γ 参数化

描述三代夸克混合的 CKM 矩阵可以由三个混合角和一个 CP 破坏相角来参数化。在大多数的参数化形式中, CP 破坏相角的选择不是直接的实验可观测量而且是参数化依赖的。这一节介绍一种新的参数化 CKM 矩阵的方法, 用实验上可观测的描述 CP 破坏现象的参量, 幺正三角形中的 α, β, γ 角作为 CKM 矩阵的相角, 建立清晰的 α, β, γ 参数化。并且得到近似的类 Wolfenstein 展开。在三个相角当中 β 是目前实验上测量最精确的, 因此, 其中 β 参数化是其中的最好的参数化选择。

2.2.1 CKM 矩阵的参数化依赖问题

在上一节中我们已经知道 CKM 矩阵有九种不同的参数化方式, 这九种不同的参数化方式在数学上是完全等价的, 并且是相互独立。但是其中的 CP 破坏相角没有物理对应, 并不是实验可观测, 而且是参数化依赖的。下面我们以其中的 $P2$ 和 $P3$ 也就是早期的 KM 参数化和标准的 PDG 参数化 [8] 为例进行讨论。

三代夸克混合矩阵通常的参数化形式为:

$$V_{PDG} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CK}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CK}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CK}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CK}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CK}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

这里 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ 。 θ_{ij} 是夸克味空间的转动角而 δ_{CK} 是 CP 破坏的相角。我们称这种参数化为 CK 参数化。这种形式就是国际粒子物理数据组常用的标准参数化形式。夸克味混合已经有许多的实验数据, 拟合实验数据 [9] 我们可以得到混合角以及 CP 破坏的相角:

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= 13.015^\circ \pm 0.059^\circ, & \theta_{23} &= 2.376^\circ \pm 0.046^\circ, & \theta_{13} &= 0.207^\circ \pm 0.008^\circ, \\ \delta_{CK} &= 69.7^\circ \pm 3.1^\circ. \end{aligned} \quad (2.7)$$

从而可以得到矩阵元的模值:

$$\begin{pmatrix} 0.9743 \pm 0.0002 & 0.2252 \pm 0.0010 & 0.0036 \pm 0.0001 \\ 0.2251 \pm 0.0010 & 0.9735 \pm 0.0002 & 0.0415 \pm 0.0008 \\ 0.0088 \pm 0.0003 & 0.0407 \pm 0.0008 & 0.99913 \pm 0.00003 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

混合角可以被看作味空间的转动。但是 CKM 矩阵的混合角和相角都不是直接的实验可观测量。混合矩阵有很多不同的参数化方式。对于不同的参数化方式，混合角和相角都是不同的。为了说明这一点，我们看最初的 KM 参数化 [2]，

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta_{KM}} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta_{KM}} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta_{KM}} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

用混合矩阵的观测值，我们可以得到三个混合角：

$$\theta_1 = 13.016^\circ \pm 0.003^\circ, \theta_2 = 2.229^\circ \pm 0.066^\circ, \theta_3 = 0.921^\circ \pm 0.036^\circ. \quad (2.10)$$

CP 破坏相角的中心值是 $\delta_{KM} = 88.2^\circ$ 。

我们确实看到 CK 和 KM 参数化的混合角和相角确实不同。混合角和相角具有参数化依赖的性质。在 CK 参数化当中，矩阵元的虚数部分都在 10^{-3} 的量级而且 V_{us} , V_{ub} 和 V_{cb} 有简单的形式，因此使用起来比较简洁。在 KM 参数化中，相角接近 90° ，因此，可以考虑这种参数化作为最大限度 CP 破坏的参数化形式。然而，考虑使用有明确的物理意义的有实验可观测性的参数来参数化 CKM 矩阵一直是大家研究讨论的热点，和混合矩阵有关的一些参量已经被进行了尝试 [10–14]，下面介绍我们考虑用实验上可测量的 α , β , γ 角来参数化 CKM 矩阵。

2.2.2 α, β, γ 参数化

我们已经知道 CKM 矩阵元的模是实验上的可观测量，可以作为参数化 CKM 矩阵的参数。然而 CP 破坏的信息也包含在 CKM 矩阵元当中，其中的任意一个矩阵元的模值并不能完全包含 CP 破坏信息，它们的组合可以标志 CP 破坏。例如， $\mathcal{J} \sum_{n,m=1}^3 \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} = \text{Im}(V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*)$ 是非零的。实验上有许多可测量的相角来标志 CP 破坏，其中，最常用的是幺正三角形中的 α , β , γ 角，幺正性关系定义为：

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0 \quad (2.11)$$

在复平面中，式 (2.11) 定义了图 2.1 中的三角形。CKM 矩阵的幺正性关系事实上定义了六个独立的三角形关系： $\sum_i V_{ij} V_{kj}^* = 0$ 和 $\sum_i V_{ji} V_{jk}^* = 0$ ($i \neq k$)。其中， $i = d$ 和 $k = b$ 的情况是实验上测量最精确的，而且幺正三角形的三个相角

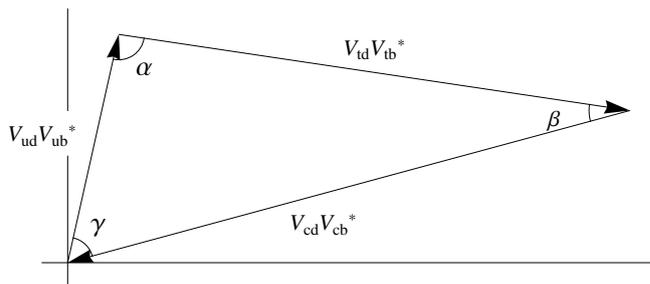


图 2.1 幺正三角形。

Figure 2.1 The unitarity triangle.

都是独立测量的。因此，我们考虑用幺正三角形定义的三个相角来构造新的参数化形式。幺正三角形定义的三个相角定义为：

$$\alpha = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad \beta = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad \gamma = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \quad (2.12)$$

CP 破坏使得幺正三角形的面积不为零。这就暗示着 α, β, γ 角都不为零，实验上可以直接测量这三个相角 [15]， $\alpha = (89.0^{+4.4}_{-4.2})^\circ$ ， $\beta = (21.1 \pm 0.9)^\circ$ ， $\gamma = (73^{+22}_{-25})^\circ$ 。它们和由公式 (2.7) 得到的结果一致， $\alpha = 88.14^\circ$ ， $\beta = 22.20^\circ$ ， $\gamma = 69.67^\circ$ 。同时测量结果与标准模型对于 CKM 矩阵幺正三角形相角的预言 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 是一致的。并注意到 α, γ 的值分别非常接近相角 δ_{KM}, δ_{CK} 。随后我们会看到虽然它们非常接近，但是并不完全相等。我们同时也需要一个可以用来标志 CP 破坏的参量，而且这个参量和 α, β, γ 角相关。参数 \mathcal{J} 是一个很好的选择，它正好等于幺正三角形面积的二倍 [16]。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= |V_{td}||V_{tb}^*||V_{ud}||V_{ub}^*|\sin\alpha = |V_{td}||V_{tb}^*||V_{cd}||V_{cb}^*|\sin\beta \\ &= |V_{cd}||V_{cb}^*||V_{ud}||V_{ub}^*|\sin\gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

这样，我们就有了可以用来参数化 CKM 矩阵的实验上可以直接测量的四个参数。我们可以选择矩阵元当中的三个 $|V_{ij}|$ 和其中的一个相角来构造 CKM 矩阵。对于 CP 破坏的相角， α, β, γ 角有清楚的几何图像。我们称这种参数化为 α, β, γ 参数化。

在 α 参数化中，我们选择 α 角和矩阵元 $|V_{ij}|$ 中的三个作为独立变量来参数化 CKM 矩阵。由式 (2.12) 中对 α 角的定义，可以有四种方式来构造 CKM 矩

阵 [17]。可以选择 $V_{ud,ub,td,tb}$ 中的一个矩阵元为负数而其余的矩阵元为实数。

$$\begin{aligned}
\alpha_1) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, |V_{td}|, -|V_{tb}|e^{-i\alpha}), \\
\alpha_2) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, -|V_{td}|e^{i\alpha}, |V_{tb}|), \\
\alpha_3) & \cdot (|V_{ud}|, -|V_{ub}|e^{i\alpha}, |V_{td}|, |V_{tb}|), \\
\alpha_4) & \cdot (-|V_{ud}|e^{-i\alpha}, |V_{ub}|, |V_{td}|, |V_{tb}|).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

在上面的四种方式中我们可以通过重新定义夸克场的相角来改变矩阵元的相对符号。

我们用 $V_{CKM}^{\alpha_i}$ 来标记 CKM 矩阵的四种 α 参数化形式。我们把这四种参数化形式也列于附录 A 中。这里我们以 $V_{CKM}^{\alpha_2}$ 为例来讨论。

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{cb}|^2)|V_{ub}| - |V_{ud}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{us}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{i\alpha} & \frac{|V_{ud}||V_{td}|e^{i\alpha} - |V_{ub}||V_{tb}|}{|V_{us}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

在这种参数化形式中，为了方便起见，可以选择 $\alpha, |V_{us}|, |V_{ub}|, |V_{cb}|$ 作为四个独立的变量来参数化 CKM 矩阵，而其它的矩阵元可以被表示为这四个变量的函数：

$$\begin{aligned}
|V_{ud}| &= \sqrt{1 - |V_{us}|^2 - |V_{ub}|^2}, \quad |V_{tb}| = \sqrt{1 - |V_{ub}|^2 - |V_{cb}|^2}, \\
|V_{td}| &= \frac{|V_{tb}||V_{ud}||V_{ub}| \cos \alpha}{1 - |V_{ub}|^2} \\
&+ \sqrt{\left(\frac{|V_{tb}||V_{ud}||V_{ub}| \cos \alpha}{1 - |V_{ub}|^2}\right)^2 + \frac{|V_{cb}|^2(1 - |V_{ud}|^2) - |V_{ud}|^2|V_{ub}|^2}{1 - |V_{ub}|^2}}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

和情形 α_2 类似，对于其余的三种情形我们可以同样地选择相角 α 和三个矩阵元的模值作为独立的变量来参数化 CKM 矩阵。在 α_2 参数化形式中，选择 $\alpha, |V_{us}|, |V_{ub}|, |V_{cb}|$ 作为独立变量是最为方便的。在这四种情形中，Jarlskog 参数 \mathcal{J} 表示为：

$$\mathcal{J} = |V_{ub}||V_{ud}||V_{td}||V_{tb}| \sin \alpha$$

α 参数化的四种方式是等价的，我们通过重新定义夸克场使得这四种参数化形式可以在彼此之间进行转换。

$$V_{CKM}^{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_j} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iy} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iz} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

这里 i 和 j 代表不同的参数化类型。例如, α_1 参数化到 α_2 参数化的变换:

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & e^{in} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_1} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iy} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iz} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

对比系数, 可以得到 $x = y = z = 0$, $n = \alpha + \pi$, 和

$$m = \arccos \frac{(|V_{td}||V_{tb}|)^2 - [(|V_{ud}||V_{ub}|)^2 + (|V_{cd}||V_{cb}|)^2]}{2|V_{ud}||V_{ub}||V_{cd}||V_{cb}|}. \quad (2.19)$$

因此, 我们得到 α_1 参数化到 α_2 参数化的变换:

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{im} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\alpha} \end{pmatrix} V_{CKM}^{\alpha_1}. \quad (2.20)$$

其它的变换形式也是类似的。

同样的方法我们可以得到 β 和 γ 参数化。对于 β 参数化, 由式 (2.12) 中 β 角的定义中我们可以有四种不同的选择来进行参数化 [18]。

$$\begin{aligned} \beta_1) & \cdot (|V_{cd}|, |V_{cb}|, |V_{td}|, -|V_{tb}|e^{i\beta}), \\ \beta_2) & \cdot (|V_{cd}|, |V_{cb}|, -|V_{td}|e^{-i\beta}, |V_{tb}|), \\ \beta_3) & \cdot (|V_{cd}|, -|V_{cb}|e^{-i\beta}, |V_{td}|, |V_{tb}|), \\ \beta_4) & \cdot (-|V_{cd}|e^{i\beta}, |V_{cb}|, |V_{td}|, |V_{tb}|). \end{aligned} \quad (2.21)$$

和 α 参数化类似, 这四种不同的参数化方式是等价的。可以选择 β , $|V_{us}|$, $|V_{ub}|$, $|V_{cb}|$ 作为独立的变量, 用着四个变量来表示其余的矩阵元。详细的表示参考附录 A 相应的 Jarlskog 参量为:

$$\mathcal{J} = |V_{cb}||V_{tb}||V_{cd}||V_{td}| \sin \beta.$$

对于 γ 参数化, 四种不同的参数化方式为:

$$\begin{aligned} \gamma_1) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, |V_{cd}|, -|V_{cb}|e^{i\gamma}), \\ \gamma_2) & \cdot (|V_{ud}|, |V_{ub}|, -|V_{cd}|e^{-i\gamma}, |V_{cb}|), \\ \gamma_3) & \cdot (|V_{ud}|, -|V_{ub}|e^{-i\gamma}, |V_{cd}|, |V_{cb}|), \\ \gamma_4) & \cdot (-|V_{ud}|e^{i\gamma}, |V_{ub}|, |V_{cd}|, |V_{cb}|). \end{aligned} \quad (2.22)$$

这四种参数化形式的详细表示在附录 A 中给出。可以选择 γ , $|V_{us}|$, $|V_{ub}|$, $|V_{cb}|$ 作为独立的变量来进行参数化。对应的 Jarlskog 参量为:

$$\mathcal{J} = |V_{ub}||V_{cb}||V_{ud}||V_{cd}| \sin \gamma.$$

2.2.3 α, β, γ 参数化的相互关系

α, β, γ 参数化之间是可以相互转换的。上一小节中提到的 12 种不同的参数化方式都是等价的。我们已经得到 α, β, γ 参数化中的每四种参数化形式是等价的，下面我们只需要证明 α 参数化中的一种情形和 β 或 γ 参数化中的一种情形等价。

以 $V_{CKM}^{\alpha 3}$ 和 $V_{CKM}^{\beta 3}$ 为例，我们注意到这两种参数化矩阵的第一列和第三行矩阵元全部相同。用么正三角形关系：

$$|V_{ub}||V_{ud}|e^{i\alpha} + |V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta} = |V_{td}||V_{tb}|. \quad (2.23)$$

可以证明这两种参数化矩阵的 12, 13, 22 和 23 矩阵元也完全相同，即：

$$\begin{aligned} V_{CKM}^{\alpha 3} &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{td}|-|V_{tb}||V_{ub}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}|} & -|V_{ub}|e^{i\alpha} \\ |V_{cd}| & \frac{(|V_{tb}|^2-|V_{cd}|^2)|V_{td}|-|V_{ub}||V_{ud}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cd}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\alpha}-|V_{td}||V_{tb}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2-|V_{tb}|^2)|V_{td}+|V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\beta}}{|V_{ts}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{td}||V_{tb}|-|V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{-i\beta}-|V_{cd}||V_{td}|}{|V_{ts}|} & -|V_{cb}|e^{-i\beta} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \\ &= V_{CKM}^{\beta 3}. \end{aligned}$$

同样地，有：

$$|V_{tb}||V_{td}|e^{i\alpha} + |V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\gamma} = |V_{ud}||V_{ub}|, \quad (2.24)$$

$$|V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma} + |V_{tb}||V_{td}|e^{i\beta} = |V_{cd}||V_{cb}|, \quad (2.25)$$

可以得到：

$$V_{CKM}^{\alpha 2} = V_{CKM}^{\gamma 2}, V_{CKM}^{\beta 1} = V_{CKM}^{\gamma 3}. \quad (2.26)$$

因此，我们证明了 α, β, γ 参数化是彼此相关的而且可以相互转换。由于 β 角是实验上测量相对最精确的，因此，其中最好的参数化选择是 β 参数化，它可以相对精确地包含 CP 破坏的效应。

数值上，我们有近似的关系 $\delta_{KM} \approx \alpha$ 和 $\delta_{CK} \approx \gamma$ 。我们注意到它们之间的关系：

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{\sin \delta_{KM}}{x_\alpha - \cos \delta_{KM}}\right), & x_\alpha &= \frac{c_1 s_2 s_3}{c_2 c_3} = \frac{|V_{ud}||V_{td}||V_{ub}|}{|V_{cd}||V_{us}|} = 0.0006. \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{\sin \delta_{CK}}{x_\gamma + \cos \delta_{CK}}\right), & x_\gamma &= \frac{c_{12} s_{23} s_{13}}{s_{12} c_{23}} = \frac{|V_{ud}||V_{cb}||V_{ub}|}{|V_{tb}||V_{us}|} = 0.0006. \end{aligned}$$

同样,我们也想知道在不同的参数化方式中,是否存在非常接近 β 角的相角。事实上,在第一节中我们提到的九种不同的参数化形式中就存在非常接近 β 角的相角。例如, $P4$ 参数化 [19]:

$$V_{CKM}^{P4} = \begin{pmatrix} c_\theta c_\tau & c_\theta s_\sigma s_\tau + s_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & c_\theta c_\sigma s_\tau - s_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\theta c_\tau & -s_\theta s_\sigma s_\tau + c_\theta c_\sigma e^{-i\varphi} & -s_\theta c_\sigma s_\tau - c_\theta s_\sigma e^{-i\varphi} \\ -s_\tau & s_\sigma c_\tau & c_\sigma c_\tau \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

我们有

$$\beta = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{x_\beta + \cos \varphi}\right), \quad x_\beta = \frac{s_\theta c_\sigma s_\tau}{c_\theta s_\sigma} = \frac{|V_{cd}||V_{tb}||V_{td}|}{|V_{ud}||V_{ts}|} = 0.0497. \quad (2.28)$$

我们也试图在类似于 CK 和 KM 的不同参数化方式中寻找是否存在 CP 的相角和 α, β, γ 角完全相同的情况。但是,事实上是没有这种可能性的,因为在我们所引入的 α, β, γ 参数化中,一定会有其中的一个矩阵元以 $|V_{ij}|e^{\pm i\alpha}$, $|V_{ij}|e^{\pm i\beta}$, 或 $|V_{ij}|e^{\pm i\gamma}$ 的形式出现,同时有五个矩阵元为实数,而用三个混合角的转动矩阵来进行参数化的方式无法构造出这样的结构。

2.2.4 类 Wolfenstein 展开

我们已经知道类似于 Wolfenstein 参数化的近似形式在使用上是比较方便的,而且许多不同的近似形式也已经被提出。下面我们讨论在 α, β, γ 参数化中选择 α, β, γ 角作为其中一个参数的类 Wolfenstein 展开。

对于 α 参数化,我们以 α_1) 的情形为例,选择 $|V_{us}| = \lambda$, $|V_{ub}| = a\lambda^3$, $|V_{td}| = b\lambda^3$ 和 α 为参数,这样就有 $\lambda = 0.2252 \pm 0.0010$, $a = 0.3170 \pm 0.0130$, $b = 0.7670 \pm 0.0250$ 。展开到 λ^3 的量级,可以得到:

$$V_{CKM}^{\alpha_1} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & a\lambda^3 \\ \lambda & -1 + \frac{1}{2}\lambda^2 & -(a - be^{-i\alpha})\lambda^2 \\ b\lambda^3 & (ae^{-i\alpha} - b)\lambda^2 & -e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

对于 β 参数化,我们以 β_1) 的情形为例,可以令 $|V_{cd}| = \lambda$, $|V_{td}| = b\lambda^3$, $|V_{cb}| = c\lambda^2$ 。其中, $\lambda = 0.2251 \pm 0.0010$, $b = 0.7685 \pm 0.0250$, $c = 0.8185 \pm 0.0176$ 。为了形式上更加简洁,可以让 b 夸克场转动一个 $\pi - \beta$ 的相位,在 λ^3 量级上的展开形式为:

$$V_{CKM}^{\beta_1} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & -\lambda & \lambda^3(ce^{-i\beta} - b) \\ \lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & -c\lambda^2 e^{-i\beta} \\ b\lambda^3 & c\lambda^2 e^{i\beta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

对于 γ 参数化, (γ_4) 的情形是最方便用来做展开的。可以令 $|V_{cd}| = \lambda$, $|V_{ub}| = a\lambda^3$, $|V_{cb}| = c\lambda^2$ 。其中, $\lambda = 0.2251 \pm 0.0010$, $a = 0.3176 \pm 0.0130$, $c = 0.8185 \pm 0.0176$ 。转动 d 夸克场一个 π 的相位和 u 夸克场一个 $-\gamma$ 的相位, 我们的到 λ^3 量级的展开式:

$$V_{CKM}^{\gamma_4} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & a\lambda^3 e^{-i\gamma} \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & c\lambda^2 \\ -\lambda^3(ae^{i\gamma} - c) & -c\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

在 λ^3 量级, 上面的展开形式和 Wolfenstein 参数化 [20] 是等价的。Wolfenstein 参数化中的参数 A, ρ, η 和 a, c, γ 是相关的, 其中, $c = A$, $\rho = a \cos \gamma / c$, $\eta = a \sin \gamma / c$ 。在比 λ^3 更高的量级, 这两种近似展开方式将会得到不同的结果。

2.3 重新参数化不变的夸克轻子互补性关系

前两节已经研究夸克混合的不同参数化方式, 同样对于轻子混合也有不同的参数化方式, 所以夸克轻子混合之间的相互关系自然成为了研究的热点问题。这一节主要就夸克轻子混合的相互关系进行讨论。我们已经知道描述夸克混合的矩阵为 CKM 矩阵而描述轻子混合的矩阵为 PMNS 矩阵。对于 CKM 矩阵, 常用的参数化形式为标准的 PDG 参数化, 同样地, 我们同样可以用它来参数化轻子混合的 PMNS 矩阵。如果中微子是 Majorana 类型的, PMNS 矩阵还要包含好额外的两个 Majorana 相角, 可以在 PDG 参数化矩阵的右侧乘以对角矩阵 $\text{diag}(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1)$ 。两个 CP 破坏的 Majorana 相角不会影响中微子振荡。为了区分不同的 CP 破坏相角, 有时相角 δ 被称为 Dirac CP 破坏相角。后面的讨论中我们用 Q 和 L 分别标记夸克和轻子的混合角。

夸克和轻子混合已经有了许多的实验数据。对于夸克混合, 实验上已经可以相对准确地得到了 CKM 矩阵元的大小和范围 [15]。

$$\begin{pmatrix} 0.97428 \pm 0.00015 & 0.2253 \pm 0.0007 & 0.00347_{-0.00012}^{+0.00016} \\ 0.2252 \pm 0.0007 & 0.97345_{-0.00016}^{+0.00015} & 0.0410_{-0.0007}^{+0.0011} \\ 0.00862_{-0.00020}^{+0.00026} & 0.0403_{-0.0007}^{+0.0011} & 0.999152_{-0.000045}^{+0.000030} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

由混合矩阵我们可以得到混合角 θ_{ij}^Q 的范围:

$$\theta_{12}^Q = 13.021^\circ \pm 0.039^\circ, \theta_{23}^Q = 2.350^\circ \pm 0.052^\circ, \theta_{13}^Q = 0.199^\circ \pm 0.008^\circ. \quad (2.33)$$

由实验上的中微子振荡的实验可以得到轻子混合的 PMNS 矩阵元的大小范围 [21], $1\sigma(3\sigma)$ 。

$$\begin{pmatrix} 0.824_{-0.010}^{+0.011} (+0.032) & 0.547_{-0.014}^{+0.016} (+0.047) & 0.145_{-0.031}^{+0.022} (+0.065) \\ 0.500_{-0.021}^{+0.027} (+0.076) & 0.582_{-0.023}^{+0.050} (+0.139) & 0.641_{-0.023}^{+0.061} (+0.168) \\ 0.267_{-0.027}^{+0.044} (+0.123) & 0.601_{-0.022}^{+0.048} (+0.133) & 0.754_{-0.020}^{+0.052} (+0.143) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

相应的混合角为：

$$\begin{aligned} \theta_{12}^L &= 33.59^\circ \pm 1.02^\circ (\pm 3.05^\circ), & \theta_{23}^L &= 40.40^\circ \pm 3.17^\circ (\pm 8.63^\circ), \\ \theta_{13}^L &= 8.33^\circ \pm 1.39^\circ (\pm 3.57^\circ). \end{aligned} \quad (2.35)$$

我们看到夸克和轻子的混合角是相互独立的，如果有方法把表面上不相关的夸克轻子混合角联系起来我们将会对费米子的混合有更深入的了解。事实上，夸克轻子的互补性关系 (QLC) 可以很好地将夸克轻子的混合角联系起来 [22–27]。夸克轻子互补性关系可以表示为：

$$\theta_{12}^Q + \theta_{12}^L = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{23}^Q + \theta_{23}^L = \frac{\pi}{4}. \quad (2.36)$$

第三个混合角接近于零， $\theta_{13}^Q \sim \theta_{13}^L \sim 0$ 。

在实验误差范围内，夸克轻子的互补性关系可以保持，

$$\theta_{12}^Q + \theta_{12}^L = 46.606^\circ \pm 1.019^\circ, \quad \theta_{23}^Q + \theta_{23}^L = 42.746^\circ \pm 3.171^\circ. \quad (2.37)$$

目前，互补性关系还仅停留在现象学的水平上，尽管已经有了一些理论模型上尝试 [28–31]，但是还没有理论上的很好解释。但是，即使在现象学的水平上，夸克轻子的互补性关系也还存在一些问题。其中的一个问题就是混合矩阵有很多不同的参数化形式，互补性关系只在特殊的参数化形式下成立 [32]。因此，夸克轻子的互补性关系有参数化依赖的问题。我们以早期的 KM 参数化为例来说明这一点。参考公式 (2.9) 用实验上关于混合矩阵的测量值可以得到：

$$\begin{aligned} \theta_1^Q &= 13.023^\circ \pm 0.038^\circ, \theta_2^Q = 2.192^\circ \pm 0.059^\circ, \theta_3^Q = 0.882^\circ \pm 0.036^\circ \\ \theta_1^L &= 34.485^\circ \pm 1.028^\circ, \theta_2^L = 28.086^\circ \pm 3.762^\circ, \theta_3^L = 14.830^\circ \pm 2.423^\circ. \end{aligned}$$

我们看到只有 $\theta_1^Q + \theta_1^L$ 接近 $\pi/4$ 。另外两个转动角的和并不满足互补性关系。

第一节中已经介绍了混合矩阵九种独立的参数化形式。我们对每种参数化形式进行核对，发现只有标准的 PDG 参数化满足互补性关系。因此，为了避免

夸克轻子互补性关系参数化依赖的问题, 寻找可以使夸克轻子互补性关系满足重新参数化不变的参量来表示互补性关系将会非常有意义。我们研究发现用混合矩阵元的模值来表示互补性关系是一个很好的选择。对公式 (2.36) 两边同时取 sine 和 cosine 我们得到:

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_{12}^Q + \theta_{12}^L) &= \sin \theta_{12}^Q \cos \theta_{12}^L + \cos \theta_{12}^Q \sin \theta_{12}^L = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\cos(\theta_{12}^Q + \theta_{12}^L) &= \cos \theta_{12}^Q \cos \theta_{12}^L - \sin \theta_{12}^Q \sin \theta_{12}^L = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\
\sin(\theta_{23}^Q + \theta_{23}^L) &= \sin \theta_{23}^Q \cos \theta_{23}^L + \cos \theta_{23}^Q \sin \theta_{23}^L = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\cos(\theta_{23}^Q + \theta_{23}^L) &= \cos \theta_{23}^Q \cos \theta_{23}^L - \sin \theta_{23}^Q \sin \theta_{23}^L = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

利用混合矩阵中混合角和矩阵元的关系, 可以得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan \theta_{12}^Q + \tan \theta_{12}^L}{1 - \tan \theta_{12}^Q \tan \theta_{12}^L} &= \frac{|V_{us}/V_{ud}| + |V_{e2}/V_{e1}|}{1 - |V_{us}/V_{ud}||V_{e2}/V_{e1}|} = 1, \\
\frac{\tan \theta_{23}^Q + \tan \theta_{23}^L}{1 - \tan \theta_{23}^Q \tan \theta_{23}^L} &= \frac{|V_{cb}/V_{tb}| + |V_{\mu3}/V_{\tau3}|}{1 - |V_{cb}/V_{tb}||V_{\mu3}/V_{\tau3}|} = 1. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

因此夸克轻子的互补性关系可以被重新表示为:

$$\begin{aligned}
\frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|} + \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} + \frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|} \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} &= 1, \\
\frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|} + \frac{|V_{\mu3}|}{|V_{\tau3}|} + \frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|} \frac{|V_{\mu3}|}{|V_{\tau3}|} &= 1. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

这就是新的重新参数化不变的夸克轻子互补性关系 [17]。它可以给出关于夸克轻子混合矩阵元的更多的信息。我们也可以用夸克混合的矩阵元的比值表示轻子混合矩阵元的比值来重新定义夸克轻子的互补性关系, 即:

$$\frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} = \frac{1 - |V_{us}|/|V_{ud}|}{1 + |V_{us}|/|V_{ud}|}, \quad \frac{|V_{\mu3}|}{|V_{\tau3}|} = \frac{1 - |V_{cb}|/|V_{tb}|}{1 + |V_{cb}|/|V_{tb}|}. \quad (2.41)$$

类似地, 也同样可以用轻子混合矩阵元的比值来表示夸克混合矩阵元的比值。由于实验上对于夸克矩阵元的测量相对比较精确, 因此, 可以用夸克混合矩阵元来预言轻子混合矩阵元:

$$\frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} = 0.624369 \pm 0.00095, \quad \frac{|V_{\mu3}|}{|V_{\tau3}|} = 0.921165 \pm 0.00166. \quad (2.42)$$

我们注意到 $|V_{\tau3}| > |V_{\mu3}|$ 。这于中微子震荡的实验数据是一致的。而且上面的比值分别在误差 2σ 和 1σ 范围内与实验数据一致。

对于轻子味混合矩阵，三双最大混合是一个很好的近似 [33–36]。

$$U_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

但是，目前的实验数据显示这种混合方式有一定程度的偏离。有模型倾向于保持三双最大混合矩阵的第二列矩阵元都等于 $1/\sqrt{3}$ 。如果这样，结合 $V_{e2} = 1/\sqrt{3}$ 和公式 (2.42) 我们得到 $|V_{e1}|^2 + |V_{e2}|^2 > 1$ 。这表明夸克轻子互补性关系和这类模型并不一致。也有一些其他的推测可以保持三双最大混合矩阵的其它行和列不变，然后改变其余的矩阵元来表示轻子混合 [37–39]。如果保持三双最大混合矩阵的第一列矩阵元不变，我们有 $V_{e1} = 2/\sqrt{6}$ ，结合公式 (2.42)。我们得到 $V_{e3} = 0.27$ 。这和中微子振荡实验的预言偏离太大。如果保持三双最大混合矩阵的第二行矩阵元不变，我们会得到 $|V_{\mu3}|^2 + |V_{\tau3}|^2 > 1$ 。这是混合矩阵的么正性所不允许的。如果保持保持第三行不变 [40]，我们会得到 $V_{e3} = 0.275$ ，它也很大地偏离了实验数据。因此，要满足夸克轻子互补性关系就要对三双最大混合矩阵作出很大程度的修改 [41–43]。

上面的关系中，矩阵元 V_{e3} 和 V_{ub} 没有直接的表示。为了得到混合矩阵 13 矩阵元的一些信息，可以考虑混合矩阵第一行和第三列的么正性关系。由公式 (2.41) 我们有：

$$\begin{aligned} |V_{e1}| &= \frac{a}{\sqrt{2}}(|V_{ud}| + |V_{us}|), & |V_{e2}| &= \frac{a}{\sqrt{2}}(|V_{ud}| - |V_{us}|), \\ |V_{\tau3}| &= \frac{b}{\sqrt{2}}(|V_{tb}| + |V_{cb}|), & |V_{\mu3}| &= \frac{b}{\sqrt{2}}(|V_{tb}| - |V_{cb}|). \end{aligned} \quad (2.44)$$

可以得到：

$$\sum_i |V_{ei}|^2 = a^2(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) + |V_{e3}|^2 = b^2(|V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2) + |V_{e3}|^2 = 1. \quad (2.45)$$

a 和 b 是相关的， $b^2 = a^2(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2)/(|V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2) = (1.0000 \pm 0.0004)a^2$ 。 V_{e3} 的大小由 a 来决定 $|V_{e3}| = \sqrt{1 - a^2(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2)}$ 。由目前实验上关于 $|V_{e3}|$ 误差在 1σ 范围内的数据， a 的值将会小于 0.99。

我们也可以考虑对夸克轻子互补性关系作出一些修改。修改的互补性关系可以表示为 $\theta^Q + \theta^L = \pi/4 + \alpha$ 。这样，重新参数化不变的夸克轻子互补性关系

可以被表示为:

$$\begin{aligned} \frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|} + \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} + \frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|} \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} &= 1 + \left(1 - \frac{|V_{us}|}{|V_{ud}|} \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|}\right) \frac{\tan \alpha_{12}}{1 - \tan \alpha_{12}}, \\ \frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|} + \frac{|V_{\mu 3}|}{|V_{\tau 3}|} + \frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|} \frac{|V_{\mu 3}|}{|V_{\tau 3}|} &= 1 + \left(1 - \frac{|V_{cb}|}{|V_{tb}|} \frac{|V_{\mu 3}|}{|V_{\tau 3}|}\right) \frac{\tan \alpha_{23}}{1 - \tan \alpha_{23}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

用夸克混合矩阵元和偏离角来表示轻子混合矩阵元, 我们有:

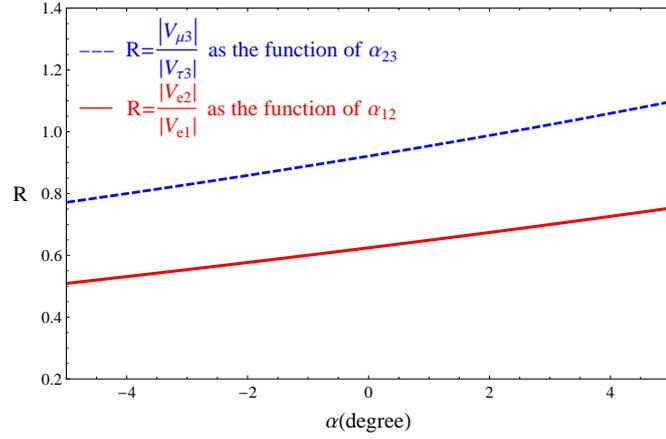


图 2.2 比值 $|V_{e2}|/|V_{e1}|$ 和 $|V_{\mu 3}|/|V_{\tau 3}|$ 随偏离角 α_{12} 和 α_{23} 的变化。

Figure 2.2 Ratios of $|V_{e2}|/|V_{e1}|$ and $|V_{\mu 3}|/|V_{\tau 3}|$ as functions of deviations α_{12} and α_{23} , respectively.

$$\begin{aligned} \frac{|V_{e2}|}{|V_{e1}|} &= \frac{1 + \tan \alpha_{12} - |V_{us}|/|V_{ud}|(1 - \tan \alpha_{12})}{1 - \tan \alpha_{12} + |V_{us}|/|V_{ud}|(1 + \tan \alpha_{12})}, \\ \frac{|V_{\mu 3}|}{|V_{\tau 3}|} &= \frac{1 + \tan \alpha_{23} - |V_{cb}|/|V_{tb}|(1 - \tan \alpha_{23})}{1 - \tan \alpha_{23} + |V_{cb}|/|V_{tb}|(1 + \tan \alpha_{23})}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

图 2.2 中显示了 $|V_{e2}|/|V_{e1}|$ 和 $|V_{\mu 3}|/|V_{\tau 3}|$ 是如何由偏离角 α_{12} 和 α_{23} 来决定的。我们看到当夸克轻子互补性关系发生很小的偏离时中微子混合矩阵元将会有很大的不同。随着实验上关于夸克轻子混合矩阵元更精确的测量, 夸克轻子的互补性关系和偏离程度将会得到更好研究, 而且也会给夸克轻子混合矩阵的理论模型研究带来更准确的信息。

2.4 本章小结

本章主要对夸克轻子味混合的参数化问题进行了研究分析。第一节介绍了 CKM 矩阵数学上等价的九种不同的参数化形式。第二节中介绍了一种新

的参数化 CKM 矩阵的方法。用实验上可测量的幺正三角形的内角 α , β 和 γ 角作为 CP 破坏的相角来构造夸克味混合矩阵。在 α, β, γ 参数化中, 每种参数化都有四种不同的参数化方式, 并证明不同的参数化形式都是等价的。研究了 α, β, γ 参数化和通常用味空间的转动角和 CP 破坏相角来进行参数化的关系。发现不能用三个转动角和 α, β, γ 角作为 CP 破坏相角来参数化 CKM 矩阵。然而, 在转动角的参数化形式中, CP 破坏相角非常接近于 α, β 或 γ 角。我们提出使用实验上可测量的描述夸克味混合的矩阵元来参数化 CKM 矩阵, 避免了味空间转动角参数化的参数化依赖问题。 α, β, γ 参数化所构造出的 CKM 矩阵是参数化独立的, 它和味空间转动角的参数化形式是互补的。同时, 也提出了新的类 Wolfenstein 参数化表示。由于实验上对 β 角的测量相对最为精确, 因此可以考虑 β 参数化为最好的参数化选择。在第三节中, 我们研究了夸克轻子混合角的互补性关系, 经研究发现互补性关系只在标准的 PDG 参数化形式下是自洽的。因此, 我们提出了重新参数化不变的夸克轻子互补性关系。用夸克轻子混合矩阵的矩阵元来表示互补性关系。在精确的互补性关系的极限下, 得到 $|V_{us}/V_{ud}| + |V_{e2}/V_{e1}| + |V_{us}/V_{ud}||V_{e2}/V_{e1}| = 1$ 和 $|V_{cb}/V_{tb}| + |V_{\mu3}/V_{\tau3}| + |V_{cb}/V_{tb}||V_{\mu3}/V_{\tau3}| = 1$ 。对偏离精确夸克轻子互补性关系的情形也进行了讨论, 也得到了偏离精确互补性关系的表示。

参考文献

- [1] Cabibbo N., “Unitary Symmetry and Leptonic Decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 531–533.
- [2] Kobayashi M. Maskawa T., “CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”, *Prog. Theor. Phys.*, 1973, **49**, 652–657.
- [3] Pontecorvo B., “Mesonium and anti-mesonium”, *Sov. Phys. JETP*, 1957, **6**, 429.
- [4] Maki Z., Nakagawa M., Sakata S., “Remarks on the unified model of elementary particles”, *Prog. Theor. Phys.*, 1962, **28**, 870–880.
- [5] Fritzsch H. Xing Z.z., “On the parametrization of flavor mixing in the standard model”, *Phys. Rev.*, 1998, **D57**, 594–597, [[arXiv:hep-ph/9708366](#)].

- [6] Jarlskog C., “Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation”, *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**, 1039.
- [7] Wu D.d., “Rephasing invariants and CP violation”, *Phys. Rev.*, 1986, **D33**, 860–863.
- [8] Chau L.L. Keung W.Y., “Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix”, *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **53**, 1802.
- [9] Bonna, M. et al., <http://www.utfit.org>.
- [10] Frampton P.H. He X.G., “Unitarity Boomerang”, *Phys. Lett.*, 2010, **B688**, 67–70, [[arXiv:1003.0310 \[hep-ph\]](#)].
- [11] Frampton P.H. He X.G., “Hunting for New Physics with Unitarity Boomerangs”, *Phys. Rev.*, 2010, **D82**, 017301, [[arXiv:1004.3679 \[hep-ph\]](#)].
- [12] Li S.W. Ma B.Q., “Unitarity boomerangs of quark and lepton mixing matrices”, *Phys. Lett.*, 2010, **B691**, 37–45, [[arXiv:1003.5854 \[hep-ph\]](#)].
- [13] Pham T., “CKM Matrix Elements”, 2011, [arXiv:1110.6050 \[hep-ph\]](#).
- [14] Zhang X. Ma B.Q., “On self-complementarity relations of neutrino mixing”, *Phys. Lett.*, 2012, **B710**, 630–635, [[arXiv:1202.4258 \[hep-ph\]](#)].
- [15] Nakamura K. *et al.*, “Review of particle physics”, *J. Phys.*, 2010, **G37**, 075021.
- [16] Bjorken J.D., “Topics in B Physics”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 1989, **11**, 325–341.
- [17] Li G.N., Lin H.H., Xu D., *et al.*, “The α , β and γ parameterizations of CP violating CKM phase”, *Int. J. Mod. Phys.*, 2013, **A28**, 1350014, [[arXiv:1204.1230 \[hep-ph\]](#)].
- [18] Li G.N., Lin H.H., Xu D., *et al.*, “The β angle as the CP violating phase in the CKM matrix”, *Phys. Lett.*, 2013, **B718**, 1454–1456, [[arXiv:1301.1078 \[hep-ph\]](#)].

- [19] Koide Y., “Shape of the unitary triangle and phase conventions of the CKM matrix”, Phys. Rev., 2006, **D73**, 073002, [arXiv:hep-ph/0603069].
- [20] Wolfenstein L., “Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix”, Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 1945.
- [21] Fogli G., Lisi E., Marrone A., *et al.*, “Evidence of $\theta_{13} > 0$ from global neutrino data analysis”, Phys. Rev., 2011, **D84**, 053007, [arXiv:1106.6028[hep-ph]].
- [22] Minakata H. Smirnov A.Y., “Neutrino mixing and quark-lepton complementarity”, Phys. Rev., 2004, **D70**, 073009, [arXiv:hep-ph/0405088].
- [23] Raidal M., “Relation between the neutrino and quark mixing angles and grand unification”, Phys. Rev. Lett., 2004, **93**, 161801, [arXiv:hep-ph/0404046].
- [24] Li N. Ma B.Q., “Unified parametrization of quark and lepton mixing matrices”, Phys. Rev., 2005, **D71**, 097301, [arXiv:hep-ph/0501226].
- [25] Frampton P.H. Matsuzaki S., “Strong Incompatibility of Tribimaximal Mixing with Quark-Lepton Complementarity”, Mod. Phys. Lett., 2009, **A24**, 429–430, [arXiv:0807.4785[hep-ph]].
- [26] Ahn Y., Cheng H.Y., Oh S., “Quark-lepton complementarity and tribimaximal neutrino mixing from discrete symmetry”, Phys. Rev., 2011, **D83**, 076012, [arXiv:1102.0879[hep-ph]].
- [27] Kang S.K., “Revisiting the Quark-Lepton Complementarity and Trimaximal Parametrization of Neutrino Mixing Matrix”, Phys. Rev., 2011, **D83**, 097301, [arXiv:1104.1969[hep-ph]].
- [28] Frampton P. Mohapatra R., “Possible gauge theoretic origin for quark-lepton complementarity”, JHEP, 2005, **0501**, 025, [arXiv:hep-ph/0407139].
- [29] Xing Z.z., “Nontrivial correlation between the CKM and MNS matrices”, Phys. Lett., 2005, **B618**, 141–149, [arXiv:hep-ph/0503200].

- [30] Winter W., “Systematic model building based on quark-lepton complementarity assumptions”, AIP Conf. Proc., 2008, **981**, 199–201, [arXiv:0710.5660[hep-ph]].
- [31] Patel K.M., “An SO(10)XS4 Model of Quark-Lepton Complementarity”, Phys. Lett., 2011, **B695**, 225–230, [arXiv:1008.5061[hep-ph]].
- [32] Jarlskog C., “Ambiguities pertaining to quark-lepton complementarity”, Phys. Lett., 2005, **B625**, 63–66, [arXiv:hep-ph/0507212].
- [33] Harrison P., Perkins D., Scott W., “A Redetermination of the neutrino mass squared difference in tri - maximal mixing with terrestrial matter effects”, Phys. Lett., 1999, **B458**, 79–92, [arXiv:hep-ph/9904297].
- [34] He X.G. Zee A., “Some simple mixing and mass matrices for neutrinos”, Phys. Lett., 2003, **B560**, 87–90, [arXiv:hep-ph/0301092].
- [35] Wolfenstein L., “Oscillations Among Three Neutrino Types and CP Violation”, Phys. Rev., 1978, **D18**, 958–960.
- [36] Harrison P. Scott W., “Symmetries and generalizations of tri - bimaximal neutrino mixing”, Phys. Lett., 2002, **B535**, 163–169, [arXiv:hep-ph/0203209].
- [37] He X.G. Zee A., “Minimal modification to the tri-bimaximal neutrino mixing”, Phys. Lett., 2007, **B645**, 427–431, [arXiv:hep-ph/0607163].
- [38] Albright C.H. Rodejohann W., “Comparing Trimaximal Mixing and Its Variants with Deviations from Tri-bimaximal Mixing”, Eur. Phys. J., 2009, **C62**, 599–608, [arXiv:0812.0436[hep-ph]].
- [39] He X.G. Zee A., “Minimal Modification to Tri-bimaximal Mixing”, Phys. Rev., 2011, **D84**, 053004, [arXiv:1106.4359[hep-ph]].
- [40] Friedberg R. Lee T., “Deviations of the Lepton Mapping Matrix from the Harrison-Perkins-Scott Form”, Chin. Phys., 2010, **C34**, 1547–1555, [arXiv:1008.0453[hep-ph]].

- [41] He X.G., Li S.W., Ma B.Q., “Triminimal Parametrization of Quark Mixing Matrix”, *Phys. Rev.*, 2008, **D78**, 111301, [arXiv:0809.1223[hep-ph]].
- [42] He X.G., Li S.W., Ma B.Q., “Unified triminimal parametrizations of quark and lepton mixing matrices”, *Phys. Rev.*, 2009, **D79**, 073001, [arXiv:0903.2880[hep-ph]].
- [43] Shimizu Y. Takahashi R., “Deviations from Tri-Bimaximality and Quark-Lepton Complementarity”, *Europhys. Lett.*, 2011, **93**, 61001, [arXiv:1009.5504[hep-ph]].

第三章 B^\pm 三体非轻衰变的味对称性分析

B 介子物理从过去的十年到一直到现在都是粒子物理领域研究的热点，科研工作者们也已经对 B 介子物理领域进行了大量的实验分析和理论探索。LHCb 实验每年都有大量的 B 介子实验数据 [1]，为 B 介子物理的研究提供了很好实验依据。B 介子也是研究 CP 破坏的理想场所。本章第一节简要介绍 B 介子的主要衰变模式以及 B 介子系统的 CP 破坏现象。由于 B 介子的非轻衰变过程相当复杂，而目前各种理论模型对于 B 介子非轻衰变过程的分支比以及强子矩阵元的理论计算都有很大的不确定性 [2]，因此我们考虑从夸克的为对称性角度来分析 B 介子的非轻衰变过程。目前实验上已经对 B^\pm 到带电赈标轻介子三体非轻衰变过程的分支比以及 CP 非对称性有很好的测量，所以在第二节和第三节中我们分别以 B^+ 和 B^- 为例介绍此过程的 $SU(3)$ 和 U 旋对称性分析。

3.1 B 物理简介

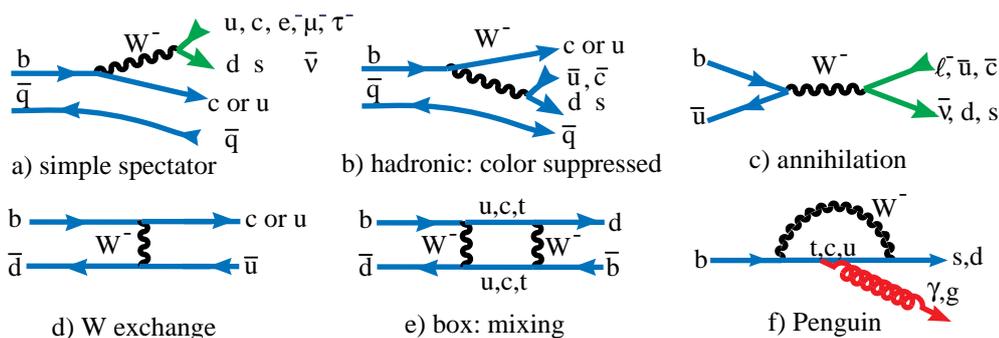


图 3.1 B 介子衰变费曼图。

Figure 3.1 Some B decay diagrams.

B 介子是包含有 b 夸克的强子束缚态，B 介子可以通过不同的过程进行衰变 [3]。图 3.1 给出了一些 B 介子通过中间矢量玻色子衰变的费曼图。图 3.1 (a) 表示最简单的有旁观者夸克的衰变过程，半轻衰变通过这类图发生，同时我们也可以通过这些过程来测量 CKM 矩阵元 V_{cb} 和 V_{ub} [4]。图 3.1 (b) 是色压低的过程 [5]，它只存在于强衰变的过程。在这类过程中末态中由虚的 W^- 粒子产生的夸克的颜色要受到初态 B 介子组分夸克颜色的限制，因此，这类过程的分支

比与图 3.1 (a) 相比被大大压低了。图 3.1 (c) 表示 B 介子的湮灭过程, 也是 B 介子的纯轻子衰变过程 [6]。图 3.1 (d) 是 W 交换过程。图 3.1 (e) 是箱图, 它会导致是 B 介子系统的混合 [7]。图 3.1 (f) 是企鹅图, 这类圈图将会导致稀有衰变过程 [8]。

在以上 B 介子各类衰变过程中, B 介子的非轻衰变过程是最为复杂的, 下面以衰变过程 $\bar{B}^0 \rightarrow D^+\pi^-$ 为例, 看一个 B 介子非轻衰变过程的实例。图 3.2 是

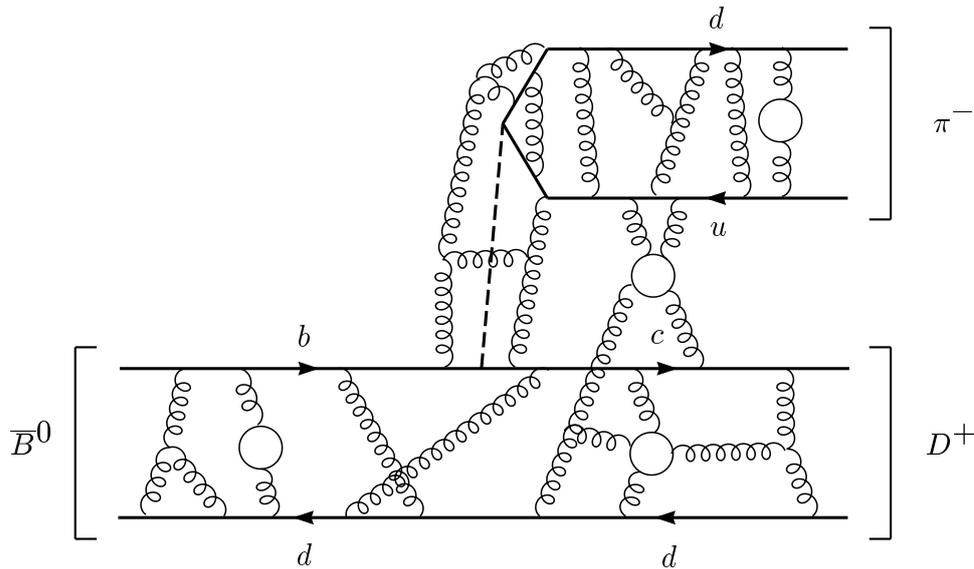


图 3.2 B 介子非轻衰变 $\bar{B}^0 \rightarrow D^+\pi^-$ 费曼图。

Figure 3.2 More realistic representation of a non-leptonic decay $\bar{B}^0 \rightarrow D^+\pi^-$.

B 介子非轻衰变的一个实例 [9]。其中, 组分夸克通过交换软胶子形成强子束缚态, 夸克被色禁闭在强子内部。在衰变过程中强相互作用和弱相互作用有非常复杂的相互影响, 这使得理论模型对于这类过程的计算非常困难。对于 B 介子非轻衰变过程强子矩阵元的计算, 目前理论上已经有简单因子化, pQCD, QCD 因子化等方法 [2, 10-12], 但是这些方法对于 B 介子非轻衰变强子矩阵元和分支比的计算都有很大的不确定性。因此, 夸克味对称性是一个很好的考虑途径。本章第二节和第三节分别用 $SU(3)$ 和 U 旋对称性对 B^\pm 到带电赝标轻介子三体非轻衰变过程进行了分析。

B 介子系统的 CP 也是 B 介子物理领域里理论和实验关注的焦点。对 B 介子系统, 存在三种类型的 CP 破坏 [13-16]: 带电 B 介子衰变中的 CP 破坏-直接 CP 破坏; 中性 B 介子混合中的 CP 破坏-间接 CP 破坏; 由混合与干涉引起的 CP 破坏-混合型 CP 破坏。下面, 介绍本章主要研究的带电 B 介子的衰变过程

中的 CP 破坏。

考虑在 CP 变换下相关的两个衰变过程。我们用 P 和 \bar{P} 表示初态介子及其 CP 共轭态。 f 和 \bar{f} 表示末态介子及其 CP 共轭态：

$$\mathbf{CP} |P\rangle = e^{i\varphi_P} |\bar{P}\rangle, \quad \mathbf{CP} |f\rangle = e^{i\varphi_f} |\bar{f}\rangle. \quad (3.1)$$

相角 φ_P 和 φ_f 是任意的。衰变振幅及其 CP 共轭可以写为：

$$\begin{aligned} A &= \langle f | \mathcal{H} | P \rangle = \sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{i\phi_i}, \\ \bar{A} &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \bar{P} \rangle = e^{i(\varphi_P - \varphi_f)} \sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{-i\phi_i}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 \mathcal{H} 是衰变的有效哈密顿量， A_i 是实的。两种类型的相角都出现在衰变振幅中。在衰变过程中，弱相互作用是 CP 破坏的， ϕ_i 是弱相互作用的参数，而强相互作用是 CP 守恒的， δ_i 是强相互作用的参数，它通常来自于末态的再散射过程。所以对于 A 和 \bar{A} ，强相位不改变符号，而弱相位要改变符号。强相位和弱相位的定义有很大的自由度，而比值

$$\left| \frac{\bar{A}}{A} \right| = \left| \frac{\sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{i\phi_i}}{\sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{-i\phi_i}} \right| \quad (3.3)$$

是有真正物理意义的参量。如果满足：

$$\left| \frac{\bar{A}}{A} \right| \neq 1 \Rightarrow \text{直接 CP 破坏} \quad (3.4)$$

将会导致直接的 CP 破坏。实验上对于带电介子发生直接 CP 破坏的 CP 非对称性定义为：

$$a_f = \frac{\Gamma(P^+ \rightarrow f) - \Gamma(P^- \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(P^+ \rightarrow f) + \Gamma(P^- \rightarrow \bar{f})} = \frac{1 - |\bar{A}/A|^2}{1 + |\bar{A}/A|^2}. \quad (3.5)$$

要得到非零的 a_f ，就需要非零的强相角和弱相角。可以有树图或者企鹅图的贡献。对于 B 介子的纯轻衰变和半轻衰变，衰变振幅主要由衰变过程中的一个费曼图决定，直接 CP 破坏效应一般都很小，很难观测到。像 $B \rightarrow K\pi$ 等非轻衰变道，它一般同时包含了树图和企鹅图的贡献，所以有两个不同的相角，通过末态再散射或湮灭相互作用可产生相位差。但是，由于我们不知道如何通过不依赖于理论模型的方法来计算衰变振幅中的强子矩阵元，不能准确地计算由末态相互作用产生的强相角，所以从实验数据中抽取弱相角就变得比较困难。

3.2 B^\pm 到带电赝标轻介子三体非轻衰变的 $SU(3)$ 对称性分析

大型强子对撞机上的 LHCb 实验小组最近报道了 B^+ 衰变到 $\pi^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$, $K^+K^+K^-$ 。我们称这些衰变为 B^+ 三体非轻衰变。实验上测得的 $\Delta S = 1$ 的末态 $K^+\pi^+\pi^-$ 和 $K^+K^+K^-$ 的 CP 非对称性为 [17]:

$$\begin{aligned} A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-) &= +0.032 \pm 0.008(stat) \pm 0.004(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+), \\ A_{CP}(K^+K^+K^-) &= -0.043 \pm 0.009(stat) \pm 0.003(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+), \end{aligned} \quad (3.6)$$

它们偏离零的误差分别为 2.8σ 和 3.7σ 。近期 BaBar 也报道了它们的测量结果 $A_{CP}(K^+K^+K^-) = -0.017_{-0.014}^{+0.019} \pm 0.014$ ，它和 LHCb 的实验结果有 1.1σ 误差偏离 [18]。

另外两个衰变道的 CP 非对称性的测量结果为 [19]:

$$\begin{aligned} A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= +0.117 \pm 0.021(stat) \pm 0.009(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+), \\ A_{CP}(\pi^+K^+K^-) &= -0.141 \pm 0.040(stat) \pm 0.018(syst) \pm 0.007(J/\psi K^+). \end{aligned} \quad (3.7)$$

显著性分别为 4.2σ 和 3.0σ 。

实验上对这 4 个衰变过程的分支比也进行了测量 [20]:

$$\begin{aligned} Br(\pi^+\pi^+\pi^-) &= (15.2 \pm 1.4) \times 10^{-6}, \\ Br(\pi^+K^+K^-) &= (5.0 \pm 0.7) \times 10^{-6}, \\ Br(K^+K^+K^-) &= (34.0 \pm 1.0) \times 10^{-6}, \\ Br(K^+\pi^+\pi^-) &= (51.0 \pm 3.0) \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

B^+ 三体非轻衰变可以给标准模型以及决定 B 介子衰变强子矩阵元的强相互作用提供新的信息。如果味 $SU(3)$ 对称性在 B 介子衰变中可以很好的保持 [21, 22] 并且衰变振幅主要贡献项是动量无关的, 对于过程 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = 1$ 将会有关系 [23]:

$$\begin{aligned} Br(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 2Br(\pi^+K^+K^-), \quad Br(K^+K^+K^-) = 2Br(K^+\pi^+\pi^-), \\ A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= A_{CP}(\pi^+K^+K^-), \quad A_{CP}(K^+K^+K^-) = A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-). \end{aligned} \quad (3.9)$$

同时, 不对称率 $\Delta_{CP} = \Gamma - \bar{\Gamma}$ 会满足:

$$\begin{aligned}\Delta_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 2\Delta_{CP}(\pi^+K^+K^-) \\ &= -\Delta_{CP}(K^+K^+K^-) = -2\Delta_{CP}(K^+\pi^+\pi^-).\end{aligned}\quad (3.10)$$

其中, Δ_{CP} 和 A_{CP} 是相关的。 $A_{CP} = \tau_B \Delta_{CP} / 2Br$ 。因此, 我们也可以得到不同衰变道之间 A_{CP} 的关系。

由 LHCb 的实验数据显示, 只有 $\Delta_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) = -\Delta_{CP}(K^+K^+K^-)$ 和实验数据一致, 其他的预言都和实验数据不符。尤其, 对于, $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 和 $A_{CP}(\pi^+K^+K^-)$, 以及 $A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 和 $A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$, $SU(3)$ 预言和实验数据的符号都是相反的。如果实验数据被进一步确定, 我们将要考虑超出 $SU(3)$ 守恒动量无关项等其它项对衰变振幅的贡献, 试图来解释这些观测到的衰变模式。其中的一种可以造成这种偏离的原因可能来自于由轻夸克 m_u , m_d 和 m_s 的质量差造成的 $SU(3)$ 破坏效应。 $SU(3)$ 味对称性只是一个近似的对称性, 因为 u , d , s 有不同的质量。在 B 介子到赝标介子八重态的两体非轻衰变过程中, $SU(3)$ 味对称性可以保持得很好, 尽管有一定程度的破坏 [24, 25]。同时也可以有很好的预言, 例如 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = 1$ 过程的不对称率 [26–28]。我们自然想到在 B^+ 的三体衰变过程中, 可以通过考虑 $SU(3)$ 味对称性的破坏效应来解释实验数据。

在考虑夸克质量项的贡献时, 需要考虑其它的同阶的贡献。我们注意到在手征微扰理论中, K 和 π 介子质量的平方正比于轻夸克的质量, 考虑轻夸克质量的贡献自然要考虑二阶导数项的贡献, 这就要在引入 $SU(3)$ 不变动量无关的衰变振幅中没有的新的动量相关项, 例如 $(\partial^\mu K^+\pi^+ - \partial^\mu \pi^+K^+)\partial_\mu K^-$ 和 $(\partial^\mu K^+\pi^+ - \partial^\mu \pi^+K^+)\partial_\mu \pi^-$ 。这些项将会对 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$, $K^+\pi^+\pi^-$ 的衰变振幅有新的贡献。而且对 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 的贡献是不同的。因此这类贡献将会使得公式 (3.9) 有所偏离, 这会有助于解释实验数据。

下面就介绍在 $SU(3)$ 味对称性的框架下, 考虑这两种类型的破坏效应, 同时也进行了数值分析, 我们发现要解释实验数据将会需要很大程度的 $SU(3)$ 破坏。

3.2.1 $SU(3)$ 不变且动量无关的衰变振幅

在夸克层次上, 从领头阶到单圈水平的无胶非轻 B 衰变的有效拉氏量为:

$$H_{eff}^q = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} [V_{ub}V_{uq}^*(c_1O_1 + c_2O_2) - \sum_{i=3}^{12} (V_{ub}V_{uq}^*c_i^{uc} + V_{tb}V_{tq}^*c_i^{tc})O_i], \quad (3.11)$$

这里, q 可以是 d 或 s , 系数 $c_{1,2}$ 和 $c_i^{jk} = c_i^j - c_i^k$ (j 和 k 代表内部的夸克) 是威尔逊系数 (WC)。树图的威尔逊系数为 $c_1 = -0.31$ 和 $c_2 = 1.15$ 。企鹅图的威尔逊系数很小, 其中最大的 c_6 为 -0.05 。许多研究小组已经对威尔逊系数进行了计算和评估 [29]。 V_{ij} 是 CKM 矩阵元。上式中由于 CKM 矩阵的么正性因子 $V_{cb}V_{cq}^*$ 已经被吸收在其它项中了。

算符 O_i 的具体形式为:

$$\begin{aligned} O_1 &= (\bar{q}_i u_j)_{V-A} (\bar{u}_i b_j)_{V-A}, & O_2 &= (\bar{q} u)_{V-A} (\bar{u} b)_{V-A}, \\ O_{3,5} &= (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V \mp A}, & O_{4,6} &= (\bar{q}_i b_j)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_j q'_i)_{V \mp A}, \\ O_{7,9} &= \frac{3}{2} (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}' q')_{V \pm A}, & O_{8,10} &= \frac{3}{2} (\bar{q}_i b_j)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}'_j q'_i)_{V \pm A}, \\ O_{11} &= \frac{g_s}{16\pi^2} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) b, & O_{12} &= \frac{Q_b e}{16\pi^2} \bar{q} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

这里 $(\bar{a}b)_{V-A} = \bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b$, $G^{\mu\nu}$ 和 $F^{\mu\nu}$ 分别表示胶子场和光子场。

在强子水平下, 衰变振幅通常可以写为:

$$A = \langle final\ state | H_{eff}^q | \bar{B} \rangle = V_{ub} V_{uq}^* T(q) + V_{tb} V_{tq}^* P(q), \quad (3.13)$$

这里 $T(q)$ 包含了树图以及由 u 夸克和 c 夸克诱导的企鹅图圈修正对强子矩阵元的贡献, $P(q)$ 包含了纯的单圈企鹅图的贡献。 B 表示 B^+ , B_d^0 , B_s^0 中的一个。 $B_i = (B^+, B^0, B_s^0)$ 形成了一个 $SU(3)$ 的三重态。

在味 $SU(3)$ 对称性下, 算符 $O_{1,2}$, $O_{3-6,11,12}$ 和 O_{7-10} 的变换性质分别为: $\bar{3}_a + \bar{3}_b + 6 + \bar{15}$, $\bar{3}$ 和 $\bar{3}_a + \bar{3}_b + 6 + \bar{15}$ 。在这些变换性质下, 在 $SU(3)$ 味中有效哈密顿算符的矩阵表示为: $H(\bar{3})$, $H(6)$ 和 $H(\bar{15})$ 。对于衰变过程 $q = d$, $H(i)$ 的非零矩阵元为 [30]:

$$\begin{aligned} H(\bar{3})^2 &= 1, H(6)_1^{12} = H(6)_3^{23} = 1, H(6)_1^{21} = H(6)_3^{32} = -1, \\ H(\bar{15})_1^{12} &= H(\bar{15})_1^{21} = 3, H(\bar{15})_2^{22} = -2, H(\bar{15})_3^{32} = H(\bar{15})_3^{23} = -1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

对于衰变过程 $q = s$, 非零矩阵元为:

$$\begin{aligned} H(\bar{3})^3 &= 1, H(6)_1^{13} = H(6)_2^{32} = 1, H(6)_1^{31} = H(6)_2^{23} = -1, \\ H(\bar{15})_1^{13} &= H(\bar{15})_1^{31} = 3, H(\bar{15})_3^{33} = -2, H(\bar{15})_2^{32} = H(\bar{15})_2^{23} = -1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

有了这些性质我们就可以写出衰变 $B \rightarrow PPP$ 的 $SU(3)$ 不变振幅 [31, 32]。这里 P 是赝标介子八重态中的其中一个介子。矩阵 $M = (M_{ij})$ 表示赝标介子八重

态:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

我们已经有了出末态介子以及有效哈密顿量的 $SU(3)$ 表示, 这样我们就可以在 $SU(3)$ 对称性的框架下按阶来构造 $B^+ \rightarrow PPP$ 的衰变振幅并引入其导数项贡献。下面首先可以写出最低阶没有动量依赖的 $SU(3)$ 不变振幅。对于振幅 $T(q)$ 我们有

$$\begin{aligned} T(q) &= a^T(\bar{3})B_i H^i(\bar{3})M_k^j M_l^k M_j^l + b^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^j B_j M_l^k M_k^l \\ &+ c^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^l M_l^j M_j^k B_k \\ &+ a^T(6)B_i H_k^{ij}(6)M_j^k M_n^l M_l^n + b^T(6)B_i H_k^{ij}(6)M_l^k M_n^l M_j^n \\ &+ c^T(6)B_i H_l^{jk}(6)M_j^i M_k^n M_n^l + d^T(6)B_i H_l^{jk}(6)M_n^i M_j^l M_k^n \\ &+ a^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})M_j^k M_n^l M_l^n + b^T(\bar{15})B_i H_k^{ij}(\bar{15})M_l^k M_n^l M_j^n \\ &+ c^T(\bar{15})B_i H_l^{jk}(\bar{15})M_j^i M_k^n M_n^l + d^T(\bar{15})B_i H_l^{jk}(\bar{15})M_n^i M_j^l M_k^n. \end{aligned} \quad (3.17)$$

对企鹅图 $P(q)$ 的部分我们也可以得到类似的振幅形式。

系数 $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$ 和 $d(i)$ 都是常数, 它们包含了威尔逊系数和 QCD 动力学的信息, 一些研究小组对衰变过程 $B \rightarrow PPP$ 进行了一系列研究 [33–35]。通常会有由于交换中间粒子所带来的共振态的贡献 [36, 37], 这将会使参数 $a(i)$ 到 $d(i)$ 依赖于动量的交换。当然也可能有其他的贡献使得衰变振幅动量相关。LHCb 实验也通过 $\pi^+\pi^-$ 和 K^+K^- 的不变质量谱测量了局域相空间的 CP 不对称性, 实验显示有更大的不对称性。如果这一点被确定, 将意味着衰变振幅的动量依赖来自于交换中间粒子 [37]。如果只考虑动量无关项的贡献, 将不能估计衰变过程的局域 CP 不对称性, 我们这里不考虑局域 CP 不对称性, 主要关注衰变过程全部相空间内的 CP 不对称性。

展开上面的振幅 $T(q)$ 我们可以抽取 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$, $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$, $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$, $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 的衰变振幅 $T(PPP)$ 。我们发现它们是相等的, 可以用 T 来标记, 这样我们就有:

$$\begin{aligned} T &= 2b^T(\bar{3}) + c^T(\bar{3}) + 2a^T(6) + b^T(6) - c^T(6) - d^T(6) \\ &+ 6a^T(\bar{15}) + 3b(\bar{15}) + c^T(\bar{15}) + 3d^T(\bar{15}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

类似地, 对于企鹅图 P 会有同样地情况, 在上面的表示中用 P 来替换 T 我们就可以得到振幅 P 。

因此, 就得到四个 B^+ 三体非轻衰变过程的衰变振幅:

$$\begin{aligned} A(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T + V_{tb}^*V_{td}P, \\ A(B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T + V_{tb}^*V_{td}P, \\ A(B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{us}T + V_{tb}^*V_{ts}P, \\ A(B^+ \rightarrow K^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{us}T + V_{tb}^*V_{ts}P. \end{aligned} \quad (3.19)$$

对于衰变振幅, 由于全同粒子的卷入, 我们在计算分支比的过程中使用包含全同粒子因子的约定形式。对于 CP 共轭过程 B^- 的衰变振幅, 可以通过用 $V_{ub}V_{uq}^*$ 和 $V_{tb}V_{tq}^*$ 替换 $V_{ub}^*V_{uq}$ 和 $V_{tb}^*V_{tq}$ 来得到。在 $SU(3)$ 极限下, 有:

$$Br(\pi^+\pi^+\pi^-) = 2Br(\pi^+K^+K^-), \quad Br(K^+\pi^+\pi^-) = 2Br(K^+K^+K^-). \quad (3.20)$$

上式中的因子 2 来自于 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 和 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 中的全同粒子 $\pi^+\pi^+$ 和 K^+K^+ 。

由于 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = 1$ 各自两个衰变过程的 CKM 因子是不同的, 因此它们的分支比并不相同。但是由于 CKM 矩阵元的关系 $Im(V_{ub}V_{ud}^*V_{tb}^*V_{td}) = -Im(V_{ub}V_{us}^*V_{tb}^*V_{ts})$ 所以 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = 1$ 各自两个衰变过程中 CP 破坏的对称率是相关的, 我们有:

$$\begin{aligned} 2\Delta(K^+\pi^+\pi^-) &= \Delta(K^+K^+K^-) \\ &= -\Delta(\pi^+\pi^+\pi^-) = -2\Delta(\pi^+K^+K^-), \end{aligned} \quad (3.21)$$

这会导致 A_{CP} 的关系:

$$\begin{aligned} \frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^+K^+K^-)}{Br(\pi^+\pi^+\pi^-)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^+K^+K^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+\pi^+\pi^-)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

LHCb 的实验数据显然不支持 $SU(3)$ 预言的分支比关系, 而且 CP 非对称性 A_{CP} 的关系也与实验数据不符, 除了比值 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 。LHCb 的

实验数据 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-) = -2.7 \pm 0.9$ 和 $SU(3)$ 的预言值 -2.2 ± 0.2 符合的很好。如果实验数据被进一步确定，我们就需要考虑超出 $SU(3)$ 守恒且动量无关的效应来解释实验数据。

表 3.1 $SU(3)$ 对称性预言和实验数据关于 $A_{CP}(\Delta S = 0)/A_{CP}(\Delta S = 1)$ 的对比。

$A_{CP}(\Delta S = 0)/A_{CP}(\Delta S = 1)$	$SU(3)$ 预言	实验数据
$A_{CP}(\pi^+K^+K^-)/A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$	-10.2 ± 1.5	-4.4 ± 2.0
$A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$	-2.2 ± 0.2	-2.7 ± 0.9
$A_{CP}(\pi^+K^+K^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$	-6.8 ± 1.1	$+3.3 \pm 1.4$
$A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)$	-3.4 ± 0.3	$+3.7 \pm 1.5$

3.2.2 $SU(3)$ 破坏和动量依赖项的贡献

下面首先讨论轻夸克质量带来的 $SU(3)$ 破坏。味 $SU(3)$ 的破坏来自于 u, d, s 夸克质量的不同。在 $SU(3)$ 味对称性下，质量矩阵可以被看做 $3 \times \bar{3}$ 表示的组合。由 (u, d, s) 基础表示的变换性质，质量矩阵就包含了 1 和 8 的不可约表示。对角化的质量矩阵可以表示为单位阵 I ，以及盖尔曼矩阵 λ_3 和 λ_8 的线性组合。与 s 夸克的质量 m_s 相比， u 和 d 夸克的质量 $m_{u,d}$ 要小的多可以忽略不计，这样使得正比于 λ_3 的项可以省略掉。 s 夸克的质量是味 $SU(3)$ 破坏的主要来源，在 $SU(3)$ 表示下它的对角化质量矩阵是 $m_s W$ ，其中 $W = \text{dig}(0, 0, 1)$ 。它可以进一步分解为 I 和 λ_8 ，其中单位矩阵不会给出新的贡献，它对于 B 介子衰变振幅的贡献和式 (3.17) 类似，可以被吸收在系数 $a(i)$ 到 $d(i)$ 当中。只有 λ_8 部分会给出 $SU(3)$ 破坏效应。我们将用它来构造 $SU(3)$ 破坏的衰变振幅，并标记为 [38]:

$$W = (W_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

为了构造 B^+ 三体衰变的 $SU(3)$ 破坏的衰变振幅，可以将 W 矩阵插入式 (3.17) 中，通过在不同的位置与上下指标收缩就得到了 $SU(3)$ 破坏的衰变振幅。附录 B 中给出了所有可能的收缩方式。每一种方式都有一个与之相对应的系数，可以作为一个自由的参数。展开所有的收缩形式可以得到 $SU(3)$ 破坏振幅

ΔT [31, 32, 39]。

$$\begin{aligned}
\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 2b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) + 2b_3^T(\bar{3}) + c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) + c_4^T(\bar{3}) \\
&\quad + 2a_1^T(6) + 2a_2^T(6) + 2a_3^T(6) + 2a_4^T(6) + b_1^T(6) + b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
&\quad + b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) - c_2^T(6) - c_3^T(6) - c_4^T(6) - c_5^T(6) \\
&\quad - d_1^T(6) - d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) - d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) \\
&\quad + 6a_2^T(\bar{15}) + 6a_3^T(\bar{15}) + 6a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) + 3b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) \\
&\quad + 3b_4^T(\bar{15}) + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) + c_2^T(\bar{15}) + c_3^T(\bar{15}) + c_4^T(\bar{15}) \\
&\quad + c_5^T(\bar{15}) + 3d_1^T(\bar{15}) + 3d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) + 3d_5^T(\bar{15}) ,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\Delta T(K^+K^-\pi^+) &= 2b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) - b_3^T(\bar{3}) + c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) - 2c_4^T(\bar{3}) \\
&\quad + 2a_1^T(6) + 2a_2^T(6) + 2a_3^T(6) - a_4^T(6) + b_1^T(6) + b_2^T(6) + b_3^T(6) \\
&\quad - 2b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) + 2c_2^T(6) - 4c_3^T(6) - c_4^T(6) + 2c_5^T(6) \\
&\quad - d_1^T(6) - d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) + 2d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) \\
&\quad + 6a_2^T(\bar{15}) + 6a_3^T(\bar{15}) - 3a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) + 3b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) \\
&\quad - 6b_4^T(\bar{15}) + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) + 4c_2^T(\bar{15}) + 4c_3^T(\bar{15}) + 7c_4^T(\bar{15}) \\
&\quad - 8c_5^T(\bar{15}) + 3d_1^T(\bar{15}) + 3d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) - 6d_5^T(\bar{15}) ,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\Delta T(K^+\pi^+\pi^-) &= -4b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) + 2b_3^T(\bar{3}) - 2c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) \\
&\quad + c_4^T(\bar{3}) + 2a_1^T(6) - 4a_2^T(6) + 2a_3^T(6) + 2a_4^T(6) + b_1^T(6) - 2b_2^T(6) \\
&\quad + b_3^T(6) + b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) - c_2^T(6) + 2c_3^T(6) - c_4^T(6) \\
&\quad - c_5^T(6) - d_1^T(6) + 2d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) - d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) \\
&\quad - 12a_2^T(\bar{15}) + 6a_3^T(\bar{15}) + 6a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) - 6b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) \\
&\quad + 3b_4^T(\bar{15}) + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) - 5c_2^T(\bar{15}) + 4c_3^T(\bar{15}) + c_4^T(\bar{15}) \\
&\quad + c_5^T(\bar{15}) + 3d_1^T(\bar{15}) - 6d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) + 3d_5^T(\bar{15}) ,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\Delta T(K^+K^-K^+) = & -4b_1^T(\bar{3}) + 2b_2^T(\bar{3}) - 2b_3^T(\bar{3}) - 2c_1^T(\bar{3}) + c_2^T(\bar{3}) + c_3^T(\bar{3}) \\
& - 2c_4^T(\bar{3}) + 2a_1^T(6) - 4a_2^T(6) + 2a_3^T(6) - a_4^T(6) + b_1^T(6) - 2b_2^T(6) \\
& + b_3^T(6) - 2b_4^T(6) + b_5^T(6) - c_1^T(6) + 2c_2^T(6) - c_3^T(6) - c_4^T(6) \\
& + 2c_5^T(6) - d_1^T(6) + 2d_2^T(6) - d_3^T(6) - d_4^T(6) + 2d_5^T(6) + 6a_1^T(\bar{15}) \\
& - 12a_2^T(\bar{15}) + 6a_3^T(\bar{15}) - 3a_4^T(\bar{15}) + 3b_1^T(\bar{15}) - 6b_2^T(\bar{15}) + 3b_3^T(\bar{15}) \\
& - 6b_4^T(\bar{15}) + 3b_5^T(\bar{15}) + c_1^T(\bar{15}) - 2c_2^T(\bar{15}) + 7c_3^T(\bar{15}) + 7c_4^T(\bar{15}) \\
& - 8c_5^T(\bar{15}) + 3d_1^T(\bar{15}) - 6d_2^T(\bar{15}) + 3d_3^T(\bar{15}) + 3d_4^T(\bar{15}) - 6d_5^T(\bar{15}).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

如果用 $W = \text{diag}(0, 0, 1)$ 来构建 $SU(3)$ 破坏项, 修正项 $\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 将会消失。这两种计算修正项的方法是等价的。因为在上面的表示中, 修正项 $\Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$, 可以全部被吸收在领头阶的振幅式 (3.18) 中。我们注意到这些修正项的振幅并不是完全独立的。

$$\Delta T(K^+K^-K^+) - \Delta T(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta T(K^+K^-\pi^+) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-). \tag{3.28}$$

类似地, 可以得到企鹅图的 $SU(3)$ 破坏项振幅。

我们已经讨论了由轻夸克的质量差带来的 $SU(3)$ 破坏项贡献, 下面我们就开始讨论同阶的有动量依赖的导数项贡献。同阶的导数项将会给出正比于动量平方的修正项。我们可以对式 (3.17) 的不同位置求两次偏导数, 然后找出所有不同的二阶偏微分形式, 这样就得到了导数项的贡献。如果其中的一个场有二阶偏微分, 例如, $\partial^2 B$ 或 $\partial^2 M$ 。用粒子的在壳条件, 在 $SU(3)$ 极限下, 这些项将正比于式 (3.17), 通过重新定义系数可以将这种形式的贡献吸收掉。其中, 包含 $\partial^2 K = m_K^2 K$ 和 $\partial^2 \pi = m_\pi^2 \pi$ 的项将会产生 $SU(3)$ 破坏项, 但是不会有新的贡献。我们发现独立的项只存在于两个不同场的偏微分形式。例如, 对于 $B_i H^i(\bar{3}) M_k^j M_l^k M_j^l$, 独立的导数项为:

$$\begin{aligned}
& (\partial_\mu B_i) H^i(\bar{3}) (\partial^\mu M_k^j) M_l^k M_j^l, \quad (\partial_\mu B_i) H^i(\bar{3}) M_k^j (\partial^\mu M_l^k) M_j^l, \\
& (\partial_\mu B_i) H^i(\bar{3}) M_k^j M_l^k (\partial^\mu M_j^l), \quad B_i H^i(\bar{3}) (\partial_\mu M_k^j) (\partial^\mu M_l^k) M_j^l, \\
& B_i H^i(\bar{3}) (\partial_\mu M_k^j) M_l^k (\partial^\mu M_j^l), \quad B_i H^i(\bar{3}) M_k^j (\partial_\mu M_l^k) (\partial^\mu M_j^l).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

在上式中上下指标直接收缩。我们自然要考察由 ϵ^{ijk} 和 ϵ_{ijk} 进行的收缩是否有新的贡献, 通过计算发现这种收缩方式不会有新的贡献, 这是由于这种收缩

的性质所导致的。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc} = \begin{vmatrix} \delta_i^a & \delta_i^b & \delta_i^c \\ \delta_j^a & \delta_j^b & \delta_j^c \\ \delta_k^a & \delta_k^b & \delta_k^c \end{vmatrix}. \quad (3.30)$$

我们将所有可能的项都列于附录 C 中。展开附录 C 中的所有项，可以得到 B^+ 三体非轻衰变最低阶的导数修正项振幅 T^p 。导数修正项的振幅有六种不同的形式，对于衰变过程 $\Delta S = -1$ 有：

$$\begin{aligned} (a) & (\partial_\mu B^+)(\partial^\mu K^+)[K^+K^- + \pi^+\pi^-], \\ (b) & (\partial_\mu B^+)K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)], \\ (c) & (\partial_\mu B^+)K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-], \\ (d) & B^+K^+[(\partial_\mu K^+)(\partial^\mu K^-) + (\partial_\mu \pi^+)(\partial^\mu \pi^-)], \\ (e) & B^+\partial_\mu K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)], \\ (f) & B^+\partial_\mu K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

为了更为清楚的看出这些项对 $SU(3)$ 不变振幅的新贡献，可以将它们表示为如下六种不同的形式：

$$\begin{aligned} (1) & (\partial_\mu B^+)[(\partial^\mu K^+)\pi^+ - K^+(\partial^\mu \pi^+)]\pi^-, \\ (2) & (\partial_\mu B^+)K^+[K^+(\partial^\mu K^-) + \pi^+(\partial^\mu \pi^-)], \\ (3) & (\partial_\mu B^+)[K^+(\partial^\mu K^+)K^- + \frac{1}{2}((\partial^\mu(K^+)\pi^+ + K^+(\partial^\mu \pi^+))\pi^-)], \\ (4) & B^+[(\partial^\mu K^+)\pi^+ - K^+(\partial^\mu \pi^+)]\partial_\mu \pi^-, \\ (5) & B^+\partial_\mu K^+[(\partial^\mu K^+)K^- + (\partial^\mu \pi^+)\pi^-], \\ (6) & B^+[(\partial_\mu K^+)K^+(\partial^\mu K^-) + \frac{1}{2}((\partial_\mu K^+)\pi^+ + K^+(\partial_\mu \pi^+))\partial^\mu \pi^-]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中，(1), (4), (3),(6) 分别通过 $(a) - (c), ((a) + (c))/2, (e) - (d), ((e) + (d))/2$ 的组合得到。用同样的方法可以得到衰变过程 $\Delta S = 0$ 的独立的导数修正项。六种相互独立的导数修正项的系数列于附录 C 中，因此衰变过程 $\Delta S = -1$ 的动量相关项的振幅 T^p 将正比于

$$\frac{1}{m_B^2} (\alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \alpha_4(4) + \alpha_5(5) + \alpha_6(6)). \quad (3.33)$$

上式中我们对于系数 α_i 的量纲进行了归一化以保持它是无量纲的。 α_i 的具体形式可以参考附录 C 中。类似的企鹅图贡献 P^p 也可以用同样的方法得到。对于衰变过程 $\Delta S = 0$ ，也有类似的振幅形式。

用动量 p^μ 来替换上面振幅形式的 ∂^μ ，可以得到树图水平下具有动量相关性的振幅修正 T^p 。

$$\begin{aligned}
& T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&\quad + 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3)) , \\
& T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&\quad + 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3)) .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

在 $SU(3)$ 极限下，有：

$$\begin{aligned}
& T^p(K^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) = T^p(\pi^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) , \\
& T^p(K^+(p_1)\pi^+(p_2)\pi^-(p_3)) = T^p(\pi^+(p_1)K^+(p_2)K^-(p_3)) .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2.3 数值分析

考虑前面所讨论的所有的贡献，树图 T_t 和企鹅图 P_t 总的衰变振幅可以写为：

$$T_t = T + T^p + \Delta T , \quad P_t = P + P^p + \Delta P . \tag{3.36}$$

动量无关项的贡献在解释实验数据时有两个问题。其中一个问题是分支比，式 (3.20) 的预言和实验数据不一致，第二个问题是式 (3.61) 关于 CP 不对称性比值的预言除了 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 和 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 的比值也和实验数据不符。下面就分三种情况来讨论考虑了新的修正项的振幅是否可以解释实验数据。

(A) 仅考虑 T^p 和 P^p 的修正：

如果没有 $SU(3)$ 破坏项的贡献， ΔT 和 ΔP 将会消失，修正项只有 T^p 和 P^p 。对

于这种情况, 在 $SU(3)$ 极限下, 仍然有:

$$\begin{aligned} T_t(K^+K^+K^-) &= T_t(\pi^+\pi^+\pi^-), \quad T_t(\pi^+K^+K^-) = T_t(K^+\pi^+\pi^-), \\ P_t(K^+K^+K^-) &= P_t(\pi^+\pi^+\pi^-), \quad P_t(\pi^+K^+K^-) = P_t(K^+\pi^+\pi^-), \end{aligned} \quad (3.37)$$

因此可以得到:

$$\frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} = -\frac{Br(K^+\pi^+\pi^-)}{Br(\pi^+K^+K^-)}, \quad (3.38)$$

这与实验数据是不符的。下面我们讨论 T^p 和 P^p 的修正对四个衰变道分支比的影响。忽略 K, π 介子的质量, 总的衰变振幅的形式为:

$$T_t = a^T + \frac{b^T}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^T}{m_B^2}(s-t), \quad P_t = a^P + \frac{b^P}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^P}{m_B^2}(s-t), \quad (3.39)$$

这里 $s = (p_2 + p_3)^2$, $t = (p_1 + p_3)^2$ 。系数 a, b, c 可以从式 (3.18) 和式 (3.75) 中得到。对于四个衰变道都有:

$$a^T = T + \frac{1}{4}(\alpha_3^T + \alpha_5^T), \quad b^T = \frac{1}{2}(\alpha_2^T - \frac{1}{2}\alpha_3^T - \alpha_5^T + \frac{1}{2}\alpha_6^T), \quad (3.40)$$

衰变道 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$, $\pi^+K^+K^-$ 的系数 c^T 是非零的, 而另外两个衰变道为零。

$$c^T = \frac{1}{2}(\alpha_1^T + \alpha_4^T). \quad (3.41)$$

类似地, 企鹅图振幅 P^p 有同样的形式。这样衰变宽度就可以表示为:

$$\Gamma = \frac{M_B}{512\pi^3} \left(|\tilde{a}|^2 + \frac{2}{3}(\tilde{a}\tilde{b}^* + \tilde{b}\tilde{a}^*) + \frac{1}{2}|\tilde{b}|^2 + \frac{1}{6}|\tilde{c}|^2 \right), \quad (3.42)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= V_{ub}^*V_{ud}a^T + V_{tb}^*V_{td}a^P, \quad \tilde{b} = V_{ub}^*V_{ud}b^T + V_{tb}^*V_{td}b^P, \\ \tilde{c} &= V_{ub}^*V_{ud}c^T + V_{tb}^*V_{td}c^P. \end{aligned} \quad (3.43)$$

我们注意到 \tilde{c} 和另外两项没有干涉, 由于 \tilde{c} 项的存在, 如果增大 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 相对于 $B^+ \rightarrow K^+K^+K^-$ 的分支比, 这时同时会增大 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$ 相对于 $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ 的分支比。因此来自于 \tilde{c} 项的新贡献不能满足 $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-$ 的分支比相对增大而 $B^+ \rightarrow \pi^+K^+K^-$ 的分支比相对减小的实验事实。这样就

需要考虑 $SU(3)$ 破坏项 ΔT 和 ΔP 的贡献, 下面首先讨论 T^p 和 P^p 为零, 仅有 $SU(3)$ 破坏项修正的情况。

(B) 仅有 ΔT 和 ΔP 的修正:

对于这种情况, 为了方便地进行数据分析可以用下面的方式对振幅进行转移。对于树图振幅, 重新定义 $T(\pi^+\pi^+\pi^-)_t = T' = T + \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 其余的衰变振幅为:

$$\begin{aligned} T(K^+K^+K^-)_t &= T' + \Delta T'(K^+K^+K^-), \\ T(\pi^+K^+K^-)_t &= T' + \Delta T'(\pi^+K^+K^-), \\ T(K^+\pi^+\pi^-)_t &= T' + \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-), \end{aligned} \quad (3.44)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta T'(K^+K^+K^-) &= \Delta T(K^+K^+K^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-), \\ \Delta T'(\pi^+K^+K^-) &= \Delta T(\pi^+K^+K^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-), \\ \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= \Delta T(K^+\pi^+\pi^-) - \Delta T(\pi^+\pi^+\pi^-). \end{aligned} \quad (3.45)$$

这样我们就有

$$\Delta T'(K^+K^-K^+) - \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) = \Delta T'(\pi^+K^+K^-). \quad (3.46)$$

下面的分析中以 $\Delta T'(K^+\pi^+\pi^-)$ 和 $\Delta T'(\pi^+K^+K^-)$ 作为独立变量。类似地, 对于 P 和 ΔP 可以重新定义 P' 和 $\Delta P'$ 。完整的衰变振幅可以表示为:

$$\begin{aligned} A(\pi^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{ud}T' + V_{tb}^*V_{td}P' \\ A(K^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{us}[T' + \Delta T'(K^+K^+K^-)] + V_{tb}^*V_{ts}[P' + \Delta P'(K^+K^+K^-)] \\ A(\pi^+K^+K^-) &= V_{ub}^*V_{ud}[T' + \Delta T'(\pi^+K^+K^-)] + V_{tb}^*V_{td}[P' + \Delta P'(\pi^+K^+K^-)] \\ A(K^+\pi^+\pi^-) &= V_{ub}^*V_{us}[T' + \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-)] + V_{tb}^*V_{ts}[P' + \Delta P'(K^+\pi^+\pi^-)]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

相应的 B^- 衰变过程的振幅可以通过用 $V_{ub}V_{uq}^*$ 和 $V_{tb}V_{tq}^*$ 分别来替换上面的 $V_{ub}^*V_{uq}$ 和 $V_{tb}^*V_{tq}$ 得到。在进行数值计算时我们可以约定 T' 为实数, 而 $P' = P_a + P_b i$, $\Delta T' = \Delta T_a + \Delta T_b i$, $\Delta P' = \Delta P_a + \Delta P_b i$ 。CKM 矩阵元 V_{ij} 可以由不同实验数据来确定, 在这里的分析中用标准的 PDG 参数化的中心值来进行数值计算 [40]。

$$\begin{aligned} \theta_{13} &= 0.0034_{-0.0001}^{+0.0002}, \theta_{23} = 0.0412_{-0.0007}^{+0.0011}, \theta_{12} = 0.2273_{-0.0007}^{+0.0007} \\ \delta &= 1.208_{-0.039}^{+0.057}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

前面已经提到 $SU(3)$ 预言的比值 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 和实验数据基本一致，这就暗示着这两个衰变道可以不考虑 $SU(3)$ 破坏的效应，即： $T'(K^+K^+K^-) = T'(\pi^+\pi^+\pi^-)$ 。还可以得到：

$$\begin{aligned} \Delta T'(K^+K^+K^-) &= T'(\pi^+\pi^+\pi^-) = 0 \\ \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= -\Delta T'(\pi^+K^+K^-). \end{aligned} \quad (3.49)$$

这样减少了自由参数的个数。在这种情况下，强子矩阵元有七个自由参数 $T, P_a, P_b, \Delta T_a, \Delta T_b, \Delta P_a, \Delta P_b$ ，可以用这七个自由参数来拟合实验数据的四个分支比 $Br(i)$ 和四个 CP 非对称性 $A_{CP}(i)$ 。我们计算发现可以有很好的拟合，其中 χ^2 的最小值为 0.044。自由参数的中心值以及在 1σ 范围的误差为：

$$\begin{aligned} T' &= (2.70_{-0.12}^{+0.14}) \times 10^{-5}, \\ P' = P_a + P_b i &= (4.16_{-0.05}^{+0.07}) \times 10^{-6} - (7.22_{-1.0}^{+1.2}) \times 10^{-7} i, \\ \Delta T' = \Delta T_a + \Delta T_b i &= (-2.04_{-0.20}^{+0.21}) \times 10^{-5} - (2.05_{-0.17}^{+0.19}) \times 10^{-5} i, \\ \Delta P' = \Delta P_a + \Delta P_b i &= (-1.74_{-0.24}^{+0.25}) \times 10^{-6} - (4.06_{-0.31}^{+0.32}) \times 10^{-6} i. \end{aligned} \quad (3.50)$$

我们将由上面参数的中心值得到的 8 个物理可测量值 A_{CP} [输出值] 和 Br [输出值] 列于表 3.2 的第一列中，通过和实验数据进行对比，可以清楚地看到拟合值和实验数据符合的很好。比值 $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-)$ 的预言值是

表 3.2 包含 $SU(3)$ 破坏效应的拟合结果与实验数据的对比。(第一, 二, 三列的输出值分别对应于式 (3.50), (3.51), (3.55) 的输入参数)

B^+ 衰变模式	A_{CP} [输出值]	A_{CP} [实验值]
$K^+\pi^+\pi^-$	0.031, 0.032, 0.032	0.032 ± 0.011
$K^+K^+K^-$	-0.042, -0.043, -0.043	-0.043 ± 0.012
$\pi^+\pi^+\pi^-$	0.120, 0.117, 0.118	0.117 ± 0.024
$\pi^+K^+K^-$	-0.142, -0.143, -0.140	-0.141 ± 0.044
B^+ 衰变模式	$Br(10^{-6})$ [输出值]	$Br(10^{-6})$ [实验值]
$K^+\pi^+\pi^-$	51.0, 51.0, 51.1	51.0 ± 3.0
$K^+K^+K^-$	33.9, 34.1, 33.9	34.0 ± 1.0
$\pi^+\pi^+\pi^-$	15.2, 15.2, 15.2	15.2 ± 1.4
$\pi^+K^+K^-$	5.0, 5.0, 5.0	5.0 ± 0.7

-2.2 ± 0.2 。这与实验数据 -2.7 ± 0.9 有微小的偏离，并且中心值不同。解决这

个问题就要引入更多的参数来拟合实验数据, 可以保持 $\Delta T'(K^+K^+K^-)$ 不为零来拟合实验数据 [39]。这样就有:

$$\begin{aligned}
T' &= 1.7 \times 10^{-5}, \quad P' = -4.5 \times 10^{-6} - 5.7 \times 10^{-7}i, \\
\Delta T'(K^+\pi^+\pi^-) &= 3.3 \times 10^{-5} + 4.2 \times 10^{-5}i, \\
\Delta P'(K^+\pi^+\pi^-) &= -3.3 \times 10^{-6} - 4.4 \times 10^{-6}i, \\
\Delta T'(\pi^+K^+K^-) &= -3.4 \times 10^{-5} - 1.8 \times 10^{-5}i, \\
\Delta P'(\pi^+K^+K^-) &= -4.5 \times 10^{-6} - 5.7 \times 10^{-7}i.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

通过拟合当衰变振幅选择上面的参数时, $A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)/A_{CP}(K^+K^+K^-) = -2.7$, 它和实验数据的中心值符合地很好。相对应的可观测的输出值列于表 3.2 的第二列中。以上分析显示可以通过考虑 $SU(3)$ 破坏的贡献来自洽地解释分支比和 CP 非对称性的实验数据, 但同时将会有很大的 $SU(3)$ 破坏效应。

(C) 包含 $SU(3)$ 破坏项和导数项贡献的修正:

下面考虑包含 $SU(3)$ 破坏项和导数项贡献的修正 $\Delta T(\Delta P)$, 和 $T^p(P^p)$ 来拟合实验数据, 研究加入 $T^p(P^p)$ 的贡献是否可以使 $SU(3)$ 的破坏程度减小。在下面的分析中导数项中正比于 K, π 介子质量的项实际上是 $SU(3)$ 的破坏项, 可以通过重新定义振幅吸收到其它项当中, 所以总的振幅可以表示为:

$$\begin{aligned}
T_t &= a^T + \frac{b^T}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^T}{m_B^2}(s-t) + \Delta a^T, \\
P_t &= a^P + \frac{b^P}{m_B^2}(s+t) + \frac{c^P}{m_B^2}(s-t) + \Delta a^P,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta a^T(\pi^+\pi^+\pi^-) &= 0, \\
\Delta a^T(K^+K^+K^-) &= \Delta T'(K^+K^+K^-), \\
\Delta a^T(K^+\pi^+\pi^-) &= \Delta T'(K^+\pi^+\pi^-), \\
\Delta a^T(\pi^+K^+K^-) &= \Delta T'(\pi^+K^+K^-).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

式 (3.42) 仍然可以用来计算衰变宽度, 这时只需将其中的 a^T 和 a^P 替换为 $a^T + \Delta a^T$ 和 $a^P + \Delta a^P$ 即可。通过计算扫描所有的参数空间, 不可能使 $\Delta T'(\Delta P')$ 的量级比 $T'(P')$ 小, 也就说要解释实验数据就一定要有较大的 $SU(3)$ 破坏效应。尽管如此, 考虑了包含 $SU(3)$ 破坏项和导数项贡献的修正同样可以和实验

数据拟合地很好。例如, 选择参数:

$$\begin{aligned}
a^T &= 1.3 \times 10^{-5}, \quad a^P = 1.1 \times 10^{-6} + 5.7 \times 10^{-6}i, \\
b^T &= 1.1 \times 10^{-5} - 1.2 \times 10^{-5}i, \quad b^P = 7.0 \times 10^{-6} - 2.1 \times 10^{-5}i, \\
c^T &= 2.4 \times 10^{-5} + 4.3 \times 10^{-5}i, \quad c^P = 1.5 \times 10^{-5} + 3.4 \times 10^{-5}i, \\
\Delta a^T(K^+\pi^+\pi^-) &= -1.2 \times 10^{-5} - 1.1 \times 10^{-5}i, \\
\Delta a^P(K^+\pi^+\pi^-) &= 3.0 \times 10^{-6} - 1.4 \times 10^{-6}i, \\
\Delta a^T(K^+K^-\pi^+) &= -1.4 \times 10^{-5} + 1.4 \times 10^{-5}i, \\
\Delta a^P(K^+K^-\pi^+) &= -3.8 \times 10^{-6} + 5.0 \times 10^{-6}i,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

我们得到和实验数据符合很好的拟合结果, 输出结果列于表 3.2 的第三列中。

3.3 B^\pm 到带电赝标轻介子三体非轻衰变的 U 旋对称性分析

上一小节已经在 $SU(3)$ 框架下对 B^\pm 到带电赝标轻介子三体非轻衰变过程进行了分析。当然对于带电 B 介子的三体衰变的研究有很多, 其中考虑共振态贡献的动力学模型有很多 [41, 42], 但是由于强子矩阵元中强相互作用的复杂性, 各种理论模型对于衰变过程分支比的计算有很大的不确定性。以 $SU(3)$ 味对称性为基础, 不考虑共振态贡献的代数方法和拓扑方法的计算也有很多 [39, 43, 44]。也有传统的 U 旋对称性分析 [45]。和 $SU(3)$ 相比 U 旋对称性的分析将会更加简洁。下面我们以 B^- 为例, 采用系统的收缩指标的方法在 U 旋对称性框架下对带电 B 介子的三体非轻衰变过程进行分析。

通常地, 在 U 旋对称性的分析中存在一个与由 K^- 和 π^- 形成的 $U = 0$ 的态对应的振幅 A_0 。它对衰变过程 $B^- \rightarrow K^-\pi^-\pi^+$ 和 $B^- \rightarrow \pi^-K^-K^+$ 有贡献而对 $B^- \rightarrow K^-K^-K^+$ 和 $B^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+$ 没有贡献。简单的说, 由于 K^- 和 π^- 是玻色子, 由于全同粒子的性质, 如果振幅 A_0 不依赖于 K^- 和 π^- 的任何动力学和运动学变量将等于零。这将导致 U 旋对称性预言和实验测量值的偏离。如果 A_0 依赖于末态粒子的动量, 它在 K^- 和 π^- 介子的动量交换下是反对称的。要解决实验测量值的偏离问题, 需要保持 A_0 非零的性质。然而, 振幅对动量的具体依赖形式并不知道。下面研究讨论如何来构造动量无关, 动量相关和 U 旋破坏项的振幅。首先介绍传统的 U 旋对称性分析方法。

U 旋对称性是一个 $SU(2)$ 的整体对称性, d 和 s 夸克作为其基础表示, 在夸克味空间 $(q_i) = (d, s)$ 形成一个 U 旋的二重态, 因此 π^+ 和 K^+ 作为一个 U 旋二重态进行变换, $(M_i) = (\pi^+, K^+)$, 对应的复共轭表示为 $(\tilde{M}_i) = \epsilon_{ij}(M_j)^* =$

$(K^+, -\pi^+)$ 。由于 B^- 由一个 b 夸克和一个轻的 u 夸克组成, 因此 B^- 是一个 U 旋的单态。用类似于自旋分析的表示形式, 可以写出态 $d, s, \pi^-(\pi^+)$, 和 $K^-(K^+)$ 的表示:

$$\begin{aligned} |d\rangle &= |1/2, +1/2\rangle, & |s\rangle &= |1/2, -1/2\rangle, \\ |\pi^-\rangle &= |1/2, +1/2\rangle_{\pi^-}, & |K^-\rangle &= |1/2, -1/2\rangle_{K^-}, \\ |K^+\rangle &= |1/2, +1/2\rangle_{K^+}, & |\pi^+\rangle &= -|1/2, -1/2\rangle_{\pi^+}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

上一节中已经给出了带电 B 介子三体非轻衰变的有效哈密顿量, 我们可以清楚看出有效哈密顿量有非常简单的 U 旋结构, 在树图和企鹅图水平它都可以作为一个 U 旋二重态进行变换。它将 B^- 态湮灭, 产生一个末态 $|1/2, +1/2\rangle$ (对于 $q = d$), 或 $|1/2, -1/2\rangle$ (对于 $q = s$)。强子水平的衰变振幅写为:

$$A = \langle \text{final state} | H_{eff}^q | B^- \rangle = V_{ub}V_{uq}^* T(q) + V_{tb}V_{tq}^* P(q), \quad (3.56)$$

对于末态粒子而言, 在 U 旋对称下, 它们将耦合形成不同的 U 旋本征态, 但是有效哈密顿量产生的 U 旋本征态只有 $|1/2, +1/2\rangle$ 和 $|1/2, -1/2\rangle$, 因此我们需要选出允许的末态耦合形式。末态荷电介子耦合组成的 U 旋本征态为:

$$\begin{aligned} |K^- K^- K^+\rangle &= |1/2, -1/2\rangle_{K^-} |1/2, -1/2\rangle_{K^-} |1/2, +1/2\rangle_{K^+} \\ &= |1, -1\rangle_{K^- K^-} |1/2, +1/2\rangle_{K^+} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, -1/2\rangle_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle_1, \\ |\pi^- \pi^- \pi^+\rangle &= -|1/2, +1/2\rangle_{\pi^-} |1/2, +1/2\rangle_{\pi^-} |1/2, -1/2\rangle_{\pi^+} \\ &= -|1, +1\rangle_{\pi^- \pi^-} |1/2, -1/2\rangle_{\pi^+} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, +1/2\rangle_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, +1/2\rangle_1, \\ |K^- \pi^- \pi^+\rangle &= -|1/2, -1/2\rangle_{K^-} |1/2, +1/2\rangle_{\pi^-} |1/2, -1/2\rangle_{\pi^+} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle_{K^- \pi^-} - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle_{K^- \pi^-} \right) |1/2, -1/2\rangle_{\pi^+} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, -1/2\rangle_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} |1/2, -1/2\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, -1/2\rangle_0, \\ |\pi^- K^- K^+\rangle &= |1/2, +1/2\rangle_{\pi^-} |1/2, -1/2\rangle_{K^-} |1/2, +1/2\rangle_{K^+} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle_{\pi^- K^-} + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle_{\pi^- K^-} \right) |1/2, +1/2\rangle_{K^+} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |3/2, +1/2\rangle_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} |1/2, +1/2\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} |1/2, +1/2\rangle_0, \end{aligned}$$

这里下标“0”和“1”暗示两个带负电介子形成的 U 旋本征态。用 A_0^T 和 A_1^T 来表示 $U = 0$ 和 $U = 1$ 本征态的衰变振幅 [45]，振幅 T 可以表示为：

$$\begin{aligned} T(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= 2A_1^T(p_1, p_2, p_3), \\ T(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= 2A_1^T(p_1, p_2, p_3), \\ T(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= A_1^T(p_1, p_2, p_3) - A_0^T(p_1, p_2, p_3), \\ T(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= A_1^T(p_1, p_2, p_3) - A_0^T(p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \quad (3.57)$$

这里我们已经得到传统方法下的振幅形式。清晰地把振幅 $A_{0,1}^T$ 表示为末态介子动量的函数。这对于振幅 A_0^T 非常重要。它在 K^- 和 π^- 的动量交换下是反对称的，因此如果振幅没有动量依赖的话，它将由于全同粒子的性质自然等于零。振幅 A_1^T 是交换对称的，即使没有动量依赖它也不必为零。对于企鹅图振幅 $A_{0,1}^P$ 也同样如此。如果振幅没有动量依赖，即 $A_0^T = A_0^P = 0$ ，会得到：

$$\begin{aligned} A(K^-K^-K^+) &= 2(V_{ub}V_{us}^*A_1^T + V_{tb}V_{ts}^*A_1^P), \\ A(K^-\pi^-\pi^+) &= V_{ub}V_{us}^*A_1^T + V_{tb}V_{ts}^*A_1^P, \\ A(\pi^-\pi^-\pi^+) &= 2(V_{ub}V_{ud}^*A_1^T + V_{tb}V_{td}^*A_1^P), \\ A(\pi^-K^-K^+) &= V_{ub}V_{ud}^*A_1^T + V_{tb}V_{td}^*A_1^P. \end{aligned} \quad (3.58)$$

衰变振幅将会预言

$$\begin{aligned} Br(\pi^-\pi^-\pi^+) &= 2Br(\pi^-K^-K^+), \quad Br(K^-K^-K^+) = 2Br(K^-\pi^-\pi^+), \\ A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-) &= A_{CP}(\pi^+K^+K^-), \quad A_{CP}(K^+K^+K^-) = A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-). \end{aligned} \quad (3.59)$$

定义和 A_{CP} 相关的参量 $\Delta(PPP) = |A(PPP)|^2 - |\bar{A}(\bar{P}\bar{P}\bar{P})|^2$ ，会有：

$$\begin{aligned} \Delta(K^-K^-K^+) &= 4\Delta(K^-\pi^-\pi^+) = -16Im(V_{ub}V_{us}^*V_{tb}^*V_{ts})Im(A_1^T A_1^{P*}), \\ \Delta(\pi^-\pi^-\pi^+) &= 4\Delta(\pi^-K^-K^+) = -16Im(V_{ub}V_{ud}^*V_{tb}^*V_{td})Im(A_1^T A_1^{P*}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

我们注意到要使 Δ 不为零从而产生非零的 A_{CP} ，需要保持 $Im(V_{ub}V_{uq}^*V_{tb}^*V_{tq})$ 和 $Im(A_1^T A_1^{P*})$ 都不等于零。标准模型中， $Im(V_{ub}V_{uq}^*V_{tb}^*V_{tq})$ 正比于表征 CP 破坏的 Jarlskog 参数 [46]，它已经由实验确定是非零的。非零的 $Im(A_1^T A_1^{P*})$ 要求强相互作用所决定的树图振幅 A_1^T 和企鹅图振幅 A_1^P 有不同的末态强相

角。强相角不能仅通过 U 旋对称性确定。我们可以让振幅 $A_1^{T,P}$ 为复数，它们的相角即为强相角，通过拟合实验数据来确定相角的具体数值。由关系 $Im(V_{ub}V_{us}^*V_{tb}^*V_{ts}) = -Im(V_{ub}V_{ud}^*V_{tb}^*V_{td})$ [46] 可以得到 U 旋对称性预言：

$$\begin{aligned}\frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^-\pi^-\pi^+)}{Br(\pi^-K^-K^+)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^-K^-K^+)}{Br(\pi^-\pi^-\pi^+)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+K^+K^-)}{A_{CP}(K^+K^+K^-)} &= -\frac{Br(K^-K^-K^+)}{Br(\pi^-K^-K^+)}, \\ \frac{A_{CP}(\pi^+\pi^+\pi^-)}{A_{CP}(K^+\pi^+\pi^-)} &= -\frac{Br(K^-\pi^-\pi^+)}{Br(\pi^-\pi^-\pi^+)}.\end{aligned}\quad (3.61)$$

这里可以看出 $SU(3)$ 预言和 U 旋对称性预言有同样的形式。很清楚， U 旋对称性预言与实验数据不符。因此需要考虑修正项，一种可能是考虑动量依赖的非零的振幅 A_0 。有动量依赖的振幅 $A_0^T(p_1, p_2, p_3)$ 不为零，但需要满足：

$$A_0^T(p_1, p_2, p_3) = -A_0^T(p_2, p_1, p_3). \quad (3.62)$$

要满足式 (3.62) 可以考虑类似 $c[(\partial^\mu K^-(p_1))\pi^-(p_2) - K^-(p_1)(\partial^\mu \pi^-(p_2))]\partial_\mu \pi^+(p_3)$ 的项。它是的 $U = 0$ 态但是对应的振幅不为零。 c 是动量无关的常数，这样的项在拉氏量中将会贡献出一个振幅：

$$c(p_1 - p_2) \cdot p_3, \quad (3.63)$$

通常地，衰变振幅对动量的具体依赖形式是不知道的，可以来自于共振态的贡献，也可以来自于导数项的贡献。下面讨论不考虑共振态的贡献的导数项修正，研究通过初末态介子场的洛伦兹结构来构造动量依赖的衰变振幅。

衰变振幅有动量依赖的导数项贡献可以通过系统的方法来构建 [47]。洛伦兹不变性要求导数的阶数为偶数，领头阶的阶数为 0，次领头阶的阶数为 2。构建的方法是：将 U 旋的表示 B^- , M_i , M^i 和有效哈密顿量 H_{eff}^q 按不同的方式收缩形成 U 旋的单态，同时对初末态介子场取不同的导数结构。其中，由有效哈密顿量形成的二重态表示为 H^i 。 $H^1 = 1$ 和 $H^2 = 1$ 分别表示 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = -1$ 的相互作用。下面首先考虑最低阶的形式。对于 B^- 衰变到三个荷电介子，我们需要两个 M_i 和一个 M^i 。对于最低阶的 U 旋单态只有一种收缩方式：

$$a_1^0 M_i M^i M_j H^j B^-, \quad (3.64)$$

这里 a_1^0 为常数。展开上式得到最低阶的动量无关的衰变振幅：

$$\begin{aligned} T^0(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= 2a_1^0, \\ T^0(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= 2a_1^0, \\ T^0(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= a_1^0, \\ T^0(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= a_1^0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

上式中，前两项的因子 2 来自于全同粒子的效应。注意到这里的没有振幅 A_0 。这是由于相对应 U 旋的单态需要两个 M_i 来构成。没有洛伦兹结构时，唯一的 U 旋单态为：

$$\epsilon^{ij} M_i M_j. \quad (3.66)$$

由于玻色子 K 和 π 的全同粒子特性，使上面的收缩为零。要得到非零的 A_0 ，就要包含动量相关项的贡献。由两个带负电的介子形成的 U 旋单态的导数项为：

$$\epsilon^{ij} M_i \partial_\mu M_j. \quad (3.67)$$

要构造洛伦兹和 U 旋不变的项，还需要另外一个 M^i 或 B^- 的偏导数。这样包含 $\epsilon^{ij} M_i \partial_\mu M_j$ 的二阶导数项有两种收缩方式：

$$\begin{aligned} (i) \quad & \epsilon^{ij} M_i (\partial_\mu M_j) \epsilon_{kl} M^k H^l (\partial^\mu B^-), \\ (ii) \quad & \epsilon^{ij} M_i (\partial_\mu M_j) \epsilon_{kl} (\partial^\mu M^k) H^l B^-. \end{aligned} \quad (3.68)$$

对于二阶导数项还有其它的收缩方式：

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\partial_\mu M_i) M^i M_j H^j (\partial^\mu B^-), \quad (b) \quad M_i (\partial_\mu M^i) M_j H^j (\partial^\mu B^-), \\ (c) \quad & M_i M^i (\partial_\mu M_j) H^j (\partial^\mu B^-), \quad (d) \quad (\partial_\mu M_i) (\partial^\mu M^i) M_j H^j B^-, \\ (e) \quad & M_i (\partial_\mu M^i) (\partial^\mu M_j) H^j B^-, \quad (f) \quad M_i (\partial^\mu M^i) (\partial_\mu M_j) H^j B^-. \end{aligned} \quad (3.69)$$

在这里与 $SU(3)$ 的情况类似，对于含有 $\partial^2 M_i$, $\partial^2 M^i$ 和 $\partial^2 B^-$ 的项，利用运动方程，在 U 旋极限下，它们将不会产生不同于式 (3.64) 的新贡献。式 (3.68) 和式 (3.69) 中的所有项并不是完全独立的。因为

$$\epsilon^{ij} \epsilon_{kl} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j. \quad (3.70)$$

我们可以将式 (3.68) 的两项表示为式 (3.69) 中的项的线性组合：

$$(i) = (c) - (a), \quad (ii) = (f) - (e). \quad (3.71)$$

为了强调振幅 A_0 项的贡献, 对于 $\Delta S = -1$ 的衰变过程, 我们用 (i), (ii), (b), ((a) + (c))/2, (d) 和 ((e) + (f))/2 作为独立的项并标记为:

$$\begin{aligned}
(1) & (\partial_\mu B^-) \pi^+ [(\partial^\mu K^-) \pi^- - K^- (\partial^\mu \pi^-)] , \\
(2) & (\partial_\mu B^-) K^- [K^- (\partial^\mu K^+) + \pi^- (\partial^\mu \pi^+)] , \\
(3) & (\partial_\mu B^-) [K^- (\partial^\mu K^-) K^+ + \frac{1}{2} ((\partial^\mu (K^-) \pi^- + K^- (\partial^\mu \pi^-)) \pi^+)] , \\
(4) & B^- (\partial_\mu \pi^+) [(\partial^\mu K^-) \pi^- - K^- (\partial^\mu \pi^-)] , \\
(5) & B^- \partial_\mu K^- [(\partial^\mu K^+) K^- + (\partial^\mu \pi^+) \pi^-] , \\
(6) & B^- [(\partial_\mu K^-) K^- (\partial^\mu K^+) + \frac{1}{2} ((\partial_\mu K^-) \pi^- + K^- (\partial_\mu \pi^-)) \partial^\mu \pi^+] .
\end{aligned} \tag{3.72}$$

类似于 $SU(3)$ 的情况, 它们对衰变振幅的贡献为:

$$\frac{1}{m_B^2} (\alpha_1(1) + \alpha_2(2) + \alpha_3(3) + \alpha_4(4) + \alpha_5(5) + \alpha_6(6)) . \tag{3.73}$$

这样就可以得到树图水平的动量依赖振幅 T^p :

$$\begin{aligned}
& T^p(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&+ 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3)) , \\
& T^p(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3) , \\
& T^p(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} (2\alpha_2 p_B \cdot p_3 + \alpha_3 p_B \cdot (p_1 + p_2) + 2\alpha_5 p_1 \cdot p_2 + \alpha_6 (p_1 + p_2) \cdot p_3 \\
&+ 2(\alpha_1 p_B \cdot (p_1 - p_2) + \alpha_4 (p_1 - p_2) \cdot p_3)) .
\end{aligned} \tag{3.74}$$

其中, $\alpha_{1,4}$ 和 $\alpha_{2,3,5,6}$ 项分别对 A_0 和 A_1 有贡献。在 U 旋对称性极限下, 有:

$$\begin{aligned}
T^p(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= T^p(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) , \\
T^p(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^-(p_3)) &= T^p(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) .
\end{aligned} \tag{3.75}$$

忽略 K 和 π 介子的质量, 有:

$$\begin{aligned}
T^p(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= T^p(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{2m_B^2} [(s+t)(2\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_5 + \alpha_6) + 2m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5)], \\
T^p(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= T^p(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) \\
&= \frac{1}{4m_B^2} [(s+t)(2\alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_5 + \alpha_6) + 2m_B^2(\alpha_3 + \alpha_5) - 2(s-t)(\alpha_1 + \alpha_4)].
\end{aligned} \tag{3.76}$$

其中 $s = (p_2 + p_3)^2$ 和 $t = (p_1 + p_3)^2$.

上面已经讨论了导数项的贡献, 下面讨论 U 旋对称性破坏项的贡献。 U 旋对称性的破坏来自于 d 夸克和 s 夸克质量的不同。 d 夸克和 s 夸克的质量矩阵可以表示为:

$$(\chi_j^i) = \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} = \frac{m_d + m_s}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{m_d - m_s}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.77}$$

质量矩阵在 U 旋对称性下的变换可以可以被看做是 U 旋单态(正比于单位阵的部分)和三重态(正比于 σ_3 的部分)的线性组合。将质量矩阵插入式 (3.64) 的不同位置将得到 U 旋破坏项振幅。类似于 $SU(3)$ 破坏的情况, 只有正比于 σ_3 的项包含新的信息。独立的破坏项有两种:

$$\begin{aligned}
\beta_1 M_i \sigma_j^i M^j M_k H^k B^-, \\
\beta_2 M_i M^i M_j \sigma_k^j H^k B^-.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

展开上式就得到衰变振幅的 U 旋破坏项贡献:

$$\begin{aligned}
T^b(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= -2\beta_1 - 2\beta_2, \\
T^b(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= 2\beta_1 + 2\beta_2, \\
T^b(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= \beta_1 - \beta_2, \\
T^b(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= -\beta_1 + \beta_2.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

同时有

$$T^b(K^-K^-K^+) - T^b(K^-\pi^-\pi^+) = T^b(\pi^-K^-K^+) - T^b(\pi^-\pi^-\pi^+). \tag{3.80}$$

注意到 U 旋破坏项振幅中没有与振幅 A_0 相关的项。这是由于非零的振幅 A_0 是由导数项诱导产生的。包含洛伦兹结构的破坏项有两种形式:

$$\begin{aligned}
(i) \quad \gamma_1 \partial_\mu (M_i) M_j \epsilon^{ij} \partial^\mu (M^k) \sigma_k^l H^m \epsilon_{lm} B^-, \\
(ii) \quad \gamma_2 \partial_\mu (M_i) M_j \epsilon^{ij} M^k \sigma_k^l H^m \epsilon_{lm} \partial^\mu B^-.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

上面的两项在轻夸克的一阶近似下是等价的, 这是由于

$$\begin{aligned} (i) + (ii) &= \partial^\mu (\partial_\mu (M_i) M_j \epsilon^{ij} M^k \sigma_k^l H^m \epsilon_{lm} B^-) \\ &- \partial^\mu (\partial_\mu (M_i) M_j \epsilon^{ij}) M^k \sigma_k^l H^m \epsilon_{lm} B^-. \end{aligned} \quad (3.82)$$

上式中的第一项总的微分, 不会有新的贡献。第二项正比于 $(m_K^2 - m_\pi^2)$, 在按轻夸克质量展开中, 与正比于 β_i 破坏项相比高出一个量级可以被忽略不计。因此, (i) 和 (ii) 是等价的。以 (i) 为例来讨论, 可以得到对于 T^b 的额外修正项 T^{bp} :

$$\begin{aligned} T^{bp}(K^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= 0, \\ T^{bp}(\pi^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= 0, \\ T^{bp}(K^-(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)) &= \gamma_1(p_1 - p_2) \cdot p_B, \\ T^{bp}(\pi^-(p_1)K^-(p_2)K^+(p_3)) &= -\gamma_1(p_1 - p_2) \cdot p_B. \end{aligned} \quad (3.83)$$

对于 U 旋破坏项的其他洛伦兹结构, 还有 $\partial^2 M_i M^i M_j H^j B^-$, $M_i \partial^2 M^i M_j H^j B^-$ 和 $M_i M^i \partial^2 M_j H^j B^-$ 。这是因为 $\partial^2 K = m_K^2 K$ 和 $\partial^2 \pi = m_\pi^2 \pi$ 。运用运动方程这些项的贡献可以被吸收如正比于 β_i 的项中, 因此这些项不会有新的贡献。

3.4 本章小结

本章主要对带电 B 介子的三体非轻衰变过程进行了味对称性分析, 分别考虑了 $SU(3)$ 和 U 旋对称性, 用系统的方法构建了对称性破坏以及导数项修正的振幅贡献, U 旋对称性分析比 $SU(3)$ 的对称性分析更为简洁, 但 $SU(3)$ 的对称性分析可以应用到包括 B_d^0 和 B_s 等中性 B 介子的三体非轻衰变过程。成功解释了实验上关于 CP 非对称性以及分支比的实验数据, 通过拟合实验数据进行数值分析, 发现了衰变过程有很大的味对称性破坏。

$SU(3)$ 和 U 旋的对称性分析中, 对于衰变振幅的构建是类似的。我们知道 $SU(3)$ 对称性包括了 U 旋对称性, 因此人们会期望对于同样的衰变过程, 这两种对称性分析会得到相同的振幅形式。事实上, 我们对比发现对于带电 B 介子的三体非轻衰变过程, 这两种对称性分析是等价的。在 U 旋对称性分析中总的衰变振幅 T_t 和 P_t 为:

$$T_t = T^0 + T^p + T^b, \quad P_t = P^0 + P^p + P^b. \quad (3.84)$$

上式中 T^b 和 P^b 分别包含了 T^{bp} 和 P^{bp} 。在 $SU(3)$ 对称性分析中，总的衰变振幅为：

$$T_t = T + T^p + \Delta T, \quad P_t = P + P^p + \Delta P. \quad (3.85)$$

除了全同粒子的因子约定不同外， $SU(3)$ 对称性分析中的 T^0, P^0, T^p 和 P^p 所对应的物理分别和 U 旋对称性分析中的 T, P, T^p 和 P^p 对应。并且 $SU(3)$ 对称性分析中的破坏项振幅 ΔT 和 ΔP 与 U 旋对称性分析并不相同。但是，我们通过重新定义和转移振幅 T^0 和 ΔT ：

$$\begin{aligned} \tilde{T}^0(\pi^- \pi^- \pi^+) &= \tilde{T}^0(K^- K^- K^+) = T^0(\pi^- \pi^- \pi^+) + T^b(\pi^- \pi^- \pi^+), \\ \tilde{T}^0(K^- \pi^- \pi^+) &= \tilde{T}^0(\pi^- K^- K^+) = T^0(K^- \pi^- \pi^+) + \frac{1}{2}T^b(\pi^- \pi^- \pi^+), \\ \Delta \tilde{T}(K^- K^- K^+) &= T^b(K^- K^- K^+) - T^b(\pi^- \pi^- \pi^+), \\ \Delta \tilde{T}(K^- \pi^- \pi^+) &= T^b(K^- \pi^- \pi^+) - \frac{1}{2}T^b(\pi^- \pi^- \pi^+), \\ \Delta \tilde{T}(\pi^- K^- K^+) &= T^b(\pi^- K^- K^+) - \frac{1}{2}T^b(\pi^- \pi^- \pi^+), \end{aligned} \quad (3.86)$$

这样 U 旋对称性分析中的振幅 \tilde{T} 和 $\Delta \tilde{T}$ 与 $SU(3)$ 对称性分析中的振幅 T' 和 $\Delta T'$ 就是等价的 [47]。因子 1/2 来自于两种对称性分析中对全同粒子效应的不同约定。这样我们看到这两种对称性分析有同样地振幅形式。因此，对于实验数据的拟合及分析两种对称性分析是等价的。

通过数值分析以及对实验数据的拟合，我们发现要同时解释分支比以及 CP 非对称性的实验数据，一定需要很大对称性破坏效应，在我们构建的对称性破坏项振幅中，无论是树图还是企鹅图都是很多项构成的，即使每个破坏项的贡献和守恒项相比只有 10%，破坏效应也会很大。在现象学水平，衰变过程中造成这种破坏的具体的动力学机制目前还不是很清楚。

参考文献

- [1] Alves A. Augusto J. *et al.*, “The LHCb Detector at the LHC”, JINST, 2008, **3**, S08005.
- [2] Bauer C.W., Pirjol D., Stewart I.W., “A Proof of factorization for $B \rightarrow D\pi$ ”, Phys. Rev. Lett., 2001, **87**, 201806, [arXiv:hep-ph/0107002].
- [3] Artuso M., Barberio E., Stone S., “ B Meson Decays”, PMC Phys., 2009, **A3**, 3, [arXiv:0902.3743[hep-ph]].

- [4] Bartelt J.E. *et al.*, “Measurement of charmless semileptonic decays of B mesons”, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**, 4111–4115.
- [5] Abe, K and Abe, R and Adachi, I and Ahn, Byoung Sup and Aihara, H and Akatsu, M and Asano, Y and Aso, T and Aulchenko, V and Aushev, T and others, “Observation of the Color-Suppressed Decay $B^0 \rightarrow D^0\pi^0$ ”, *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**(5), 052002.
- [6] Altarelli G., Cabibbo N., Corbo G., *et al.*, “Leptonic Decay of Heavy Flavors: A Theoretical Update”, *Nucl. Phys.*, 1982, **B208**, 365–380.
- [7] Abe K. *et al.*, “Observation of large CP violation in the neutral B meson system”, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 091802, [arXiv:hep-ex/0107061].
- [8] Bobeth C., Hiller G., van Dyk D., “More Benefits of Semileptonic Rare B Decays at Low Recoil: CP Violation”, *JHEP*, 2011, **1107**, 067, [arXiv:1105.0376[hep-ph]].
- [9] Neubert M., “Introduction to B physics”, 2000, 244–295, arXiv:hep-ph/0001334.
- [10] Ali A., Kramer G., Li Y., *et al.*, “Charmless non-leptonic B_s decays to PP , PV and VV final states in the pQCD approach”, *Phys. Rev.*, 2007, **D76**, 074018, [arXiv:hep-ph/0703162].
- [11] Li H.N. Yu H.L., “PQCD analysis of exclusive charmless B meson decay spectra”, *Phys. Lett.*, 1995, **B353**, 301–305.
- [12] Beneke, Martin and Buchalla, Gerhard and Neubert, M and Sachrajda, Christopher T, “QCD factorization for exclusive non-leptonic B-meson decays: General arguments and the case of heavy–light final states”, *Nucl. Phys.*, 2000, **B591**(1), 313–418.
- [13] Bondar A., Poluektov A., Pakhlov P.N., “Observation of CP violation in B-meson decays”, *Phys. Usp.*, 2007, **50**, 669–690.
- [14] Schubert K.R., “CP violation in B-meson decays”, *Int. J. Mod. Phys.*, 2005, **A20**, 385–398.

- [15] Schubert K.R., “CP violation in B meson decays”, *Eur. Phys. J.*, 2003, **A18**, 147–153.
- [16] Neubert M., “B decays and CP violation”, *Int. J. Mod. Phys.*, 1996, **A11**, 4173–4240, [hep-ph/9604412](#).
- [17] Aaij R. *et al.*, “Measurement of CP violation in the phase space of $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^-$ and $B^\pm \rightarrow K^\pm K^+ K^-$ decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 101801, [[arXiv:1306.1246\[hep-ex\]](#)].
- [18] Lees J. *et al.*, “Study of the $K^+ K^-$ invariant-mass dependence of CP asymmetry in $B^+ \rightarrow K^+ K^- K^+$ decays”, 2013, [[arXiv:1305.4218\[hep-ex\]](#)].
- [19] Aaij R. *et al.*, “Measurement of CP violation in the phase space of $B^\pm \rightarrow K^+ K^- \pi^\pm$ and $B^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^\pm$ decays”, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, **112**, 011801, [[arXiv:1310.4740\[hep-ex\]](#)].
- [20] Amhis Y. *et al.*, “Averages of B-Hadron, C-Hadron, and tau-lepton properties as of early 2012”, 2012, [arXiv:1207.1158\[hep-ex\]](#).
- [21] Zeppenfeld, Dieter, “SU(3) relations for B-meson decays”, *Z. Phys. C*, 1981, **8**(1), 77–84.
- [22] Gronau M., Hernandez O.F., London D., *et al.*, “Decays of B mesons to two light pseudoscalars”, *Phys. Rev.*, 1994, **D50**, 4529–4543, [[arXiv:hep-ph/9404283](#)].
- [23] Bhattacharya B., Gronau M., Rosner J.L., “CP asymmetries in three-body B^\pm decays to charged pions and kaons”, *Phys. Lett.*, 2013, **B726**, 337–343, [[arXiv:1306.2625\[hep-ph\]](#)].
- [24] Dighe A.S., Gronau M., Rosner J.L., “B decays involving η and η' in the light of the $B \rightarrow K \eta'$ process”, *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79**, 4333–4336, [[arXiv:hep-ph/9707521](#)].
- [25] He X.G. McKellar B.H., “Hadron decay amplitudes from $B \rightarrow K\pi$ and $B \rightarrow \pi\pi$ decays”, 2004, [[arXiv:hep-ph/0410098](#)].

- [26] He X.G., Li S.F., Lin H.H., “CP Violation in $B_s^0 \rightarrow K^- \pi^+$, $B^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ Decays and Tests for SU(3) Flavor Symmetry Predictions”, JHEP, 2013, **1308**, 065, [arXiv:1306.2658[hep-ph]].
- [27] Lipkin H.J., “Is observed direct CP violation in $B(d) \rightarrow K^+ \pi^-$ due to new physics ? Check standard model prediction of equal violation in $B(s) \rightarrow K^- \pi^+$ ”, Phys. Lett., 2005, **B621**, 126–132, [arXiv:hep-ph/0503022].
- [28] Deshpande N., He X.G., Shi J.Q., “SU(3) flavor symmetry and CP violating rate differences for charmless $B \rightarrow PV$ decays”, Phys. Rev., 2000, **D62**, 034018, [arXiv:hep-ph/0002260].
- [29] Buchalla G., Buras A.J., Lautenbacher M.E., “Weak decays beyond leading logarithms”, Rev. Mod. Phys., 1996, **68**, 1125–1144, [arXiv:hep-ph/9512380].
- [30] Deshpande N. He X.G., “CP asymmetry relations between $\bar{B}^0 \rightarrow \pi\pi$ and $\bar{B}^0 \rightarrow \pi K$ rates”, Phys. Rev. Lett., 1995, **75**, 1703–1706, [arXiv::hep-ph/9412393].
- [31] Savage M.J. Wise M.B., “SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays”, Phys. Rev., 1989, **D39**, 3346.
- [32] Savage, Martin J. and Wise, Mark B., “Erratum: SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays [Phys. Rev., 1989, **D39**, 3346] ”, Phys. Rev. , 1989, **D40**, 3127.
- [33] Deshpande N., Eilam G., He X.G., *et al.*, “The nonresonant Cabibbo suppressed decay $B^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^\pm$ and signal for CP violation”, Phys. Rev., 1995, **D52**, 5354–5357, [arXiv:hep-ph/9503273].
- [34] Fajfer S., Pham T.N., Prapotnik A., “Cp violation in the partial width asymmetries for $b^- \rightarrow \pi^+ \pi^- k^-$ and $b^- \rightarrow k^+ k^- k^-$ decays”, Phys. Rev., 2004, **D70**, 034033, [arXiv:hep-ph/0405065].
- [35] Cheng H.Y., Chua C.K., Soni A., “Charmless three-body decays of B mesons”, Phys. Rev., 2007, **D76**, 094006, [arXiv:0704.1049[hep-ph]].

- [36] Bhattacharya B., Imbeault M., London D., “Extraction of the CP-violating phase γ using $B \rightarrow K\pi\pi$ and $B \rightarrow KK\bar{K}$ decays”, Phys. Lett., 2014, **B728**, 206–209, [arXiv:1303.0846[hep-ph]].
- [37] Zhang Z.H., Guo X.H., Yang Y.D., “CP violation in $B^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^+\pi^-$ in the region with low invariant mass of one $\pi^+\pi^-$ pair”, Phys. Rev., 2013, **D87**(7), 076007, [arXiv:1303.3676[hep-ph]].
- [38] Gronau M., Hernandez O.F., London D., *et al.*, “Broken SU(3) symmetry in two-body B decays”, Phys. Rev., 1995, **D52**, 6356–6373, [arXiv:hep-ph/9504326].
- [39] Xu D., Li G.N., He X.G., “Large SU(3) breaking effects and CP violation in B^+ decays into three charged octet pseudoscalar mesons”, Int. J. Mod. Phys., 2014, **A29**, 1450011, [arXiv:1307.7186[hep-ph]].
- [40] Beringer J. *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP)”, Phys. Rev., 2012, **D86**, 010001.
- [41] Cheng H.Y. Yang K.C., “Nonresonant three-body decays of D and B mesons”, Phys. Rev., 2002, **D66**, 054015, [arXiv:hep-ph/0205133].
- [42] Cheng H.Y. Chua C.K., “Branching Fractions and Direct CP Violation in Charmless Three-body Decays of B Mesons”, Phys. Rev., 2013, **D88**, 114014, [arXiv:1308.5139[hep-ph]].
- [43] Lorier N.R.L., Imbeault M., London D., “Diagrammatic Analysis of Charmless Three-Body B Decays”, Phys. Rev., 2011, **D84**, 034040, [arXiv:1011.4972[hep-ph]].
- [44] Rey-Le Lorier N. London D., “Measuring gamma with $B \rightarrow K\pi\pi$ and $B \rightarrow KK\bar{k}$ Decays”, Phys. Rev., 2012, **D85**, 016010, [arXiv:1109.0881[hep-ph]].
- [45] Gronau M., “U-spin breaking in CP asymmetries in B decays”, Phys. Lett., 2013, **B727**, 136–140, [arXiv:1308.3448[hep-ph]].
- [46] Greenberg O., “Rephase Invariant Formulation of CP Violation in the Kobayashi-Maskawa Framework”, Phys. Rev., 1985, **D32**, 1841.

- [47] Xu D., Li G.N., He X.G., “U-spin analysis of CP violation in B^- decays into three charged light pseudoscalar mesons”, Phys. Lett., 2014, **B728**, 579–584, [arXiv:1311.3714[hep-ph]].

第四章 辐射翻转跷跷板机制下的暗物质模型

暗物质和中微子一直都是超标准模型新物理理论和实验关注的焦点问题。随着大亚湾中微子振荡实验的进行,中微子混合的最后一个混合角 θ_{13} 已经被实验测到 [1,2]。中微子的振荡实验表明了中微子是有质量的,并且也已经对三代中微子的质量平方差进行了测量。但是标准模型中中微子是无质量的,这就要求寻找超出标准模型的新物理。目前理论上已经对对于中微子质量起源的研究有了很多研究,有传统的类型 I [3-7], 类型 II [8-10], 类型 III 的跷跷板机制 (Seesaw) [11], 翻转的跷跷板机制 (Inverse seesaw) [12,13], 辐射机制 [14,15], 辐射的跷跷板机制等 [16]。普朗克卫星的观测数据显示我们的宇宙大约有 27% 是有暗物质构成的,目前各种直接的,间接的和强子对撞机上的实验都在寻找暗物质粒子的信号,目前还没有明显的实验证据。理论上,在粒子物理的标准模型中是没有可以作为暗物质的基本粒子,所以研究超标准模型的暗物质粒子成为了理论关注的热点。既然中微子和暗物质都是超标准模型新物理现象学的研究热点,因此探索中微子和暗物质的联系是一个值得关注的研究课题,目前,辐射的跷跷板机制可以自然地包括暗物质粒子,本章以此模型为基础,研究中微子和暗物质之间的现象学联系,建立了辐射的翻转跷跷板机制下的暗物质模型,可以尽可能大地压低新物理的能标,以提供实验上验证和发现新物理信号以更大的可能性,并得到了一系列的现象学暗示。

本章第一节介绍各种暗物质粒子的基本模型,第二节介绍理论上各种中微子质量起源机制,第三节主要介绍辐射翻转跷跷板机制下的暗物质模型。第四节介绍该模一系列的现象学暗示,包括解释实验上的中微子质量平方差和中微子混合角,模型中的暗物质候选者粒子,解释实验上 Higgs 到双光子衰变的实验误差,轻子味破坏现象对模型的限制,以及模型中预言的新粒子在 LHC 上的信号。

4.1 暗物质粒子基本模型简介

按照宇宙大爆炸理论,暗物质和正常物质一样都是宇宙大爆炸的产物 [17,18]。根据最终生成的暗物质粒子状态的不同,从宇宙形成和演化的角度来看可以有三种不同性质的暗物质:接近光速的暗物质粒子最终形成了热的暗物质,速度比光速低的多的暗物质粒子最终形成了冷的暗物质,速度介于

两种暗物质粒子之间的暗物质粒子最终形成了温的暗物质。对于宇宙的形成和演化,不同的暗物质理论的解释是不同的。冷的暗物质理论认为,宇宙的大尺度结构是分级增长的,具体过程是:小天体先塌缩、瓦解,最后合并成大天体;热的暗物质理论认为,宇宙的大尺度结构不是分级增长的,而是首先形成类似于银河系那样的扁平盘状结构,然后不断碎裂。由于冷的暗物质的预言与观测结果一致,而热的暗物质理论与观测结果严重不符,因此冷的暗物质理论目前比较被看好 [19]。在小尺度上,暗物质是如何构成的,暗物质粒子的性质以及相互作用的动力学机制是理论研究热点。由于标准模型中没有暗物质粒子的候选者,因此需要考虑超出标准模型的新物理理论。下面介绍目前超标准模型理论中的若干暗物质粒子模型。

弱作用的重粒子 (WIMPs): 非重子冷的暗物质普遍一类选择是弱作用的重粒子 [20]。这类暗物质粒子的质量和相互作用强度一般都接近弱电能标。这类暗物质在早起宇宙的化学平衡中自然地给出正确的冷的暗物质的残余密度,而且这类暗物质粒子的相互作用强度为实验探测提供了可能性。因此这一类暗物质粒子候选者是理论研究最多的。在早起宇宙中,当宇宙温度大于暗物质质量时,暗物质粒子和其它粒子处于热平衡状态,随着宇宙的膨胀温度降低,当温度低于暗物质质量时,暗物质通过相互作用湮灭为标准模型的粒子,当湮灭率小于哈勃膨胀率,暗物质就残留下来,就是暗物质的丰度。在标准宇宙学中,这类暗物质模型都是通过求解玻尔兹曼方程来得到暗物质的丰度。根据宇宙学上对暗物质丰度的观测可以限制暗物质和标准模型粒子相互作用的截面,从而对理论上构造各种模型去探索暗物质的性质以及与标准模型粒子相互作用的动力学机制提供很大帮助。

惰性中微子: 惰性中微子是没有弱相互作用的一种中微子。由于弱作用的味本征态和中微子的质量本征态并不重合,惰性中微子可以和弱相互作用的活性中微子产生混合,也是中微子领域研究的热点。它可以作为活性中微子的右手态用于活性中微子的质量的产生机制,也可以解释一些中微子实验的异常。作为暗物质的候选者,惰性中微子可以在早期宇宙中以各种方式产生 [21]。这依赖于它的产生机制,这种产生机制会由于它对宇宙小尺度结构的影响而受到限制。强烈的宇宙学和天文观测的限制来自于惰性中微子宇宙学丰度和衰变产物的分析和研究。对于轻的中微子,质量小于几个 KeV 的中微子候选者已经被排除。如果有很小的轻子非对称性,惰性中微子也可以作为冷的暗物质,这种情况下,惰性中微子将会在非热平衡态中共振产生 [22]。

轴子: 轴子是在尝试解决粒子物理的强 CP 破坏问题中引入的 [23]。标准模

型的强相互作用有非平凡的真空结构,在量子色动力学的拉氏量中就可以存在一个破坏 CP 对称性的项。QCD 中的 CP 破坏会对中子的电偶极矩有贡献。由于目前实验上没有观测到中子的电偶极矩,因此 QCD 的 CP 破坏会非常小,接近于零。这是一个精细调节的问题。Peccei-Quinn 机制是解决强 CP 的一个很好的办法。通过引入一个新的动力学场,加入一个整体对称性。当这个新的对称性自发破坏时,这个新的场就会产生波动,从而有新的粒子出现,我们称之为轴子。轴子也经常作为暗物质的候选者粒子被进行讨论。对于实验上的寻找,恒星的冷却和超新星 1987A 的动力学性质显示轴子的质量非常轻,轴子和普通物质的相互作用会很弱,这暗示着它们不存在于早起宇宙的平衡态中。对于轴子残余密度的计算有很大的不确定性,这是由于轴子的残余密度会依赖于轴子产生机制的假设。

超对称粒子:超对称理论是超标准模型新物理的一个很有吸引力的理论模型。超对称性指的是玻色子和费米子的对称性。在超对称理论中,所有的粒子都有它的超对称伴子,超对称伴子与原来的粒子有完全相同的量子数。玻色子的超对称伴子是费米子,费米子的超对称伴子是玻色子。在超对称理论中通过抵消 Higgs 粒子质量平方项中辐射修正的平方发散可以使电弱对称性破坏的能标稳定,这是超对称理论的一个成功之处。超对称模型一个另外值得关注的地方是低能标的超对称理论,在超对称模型中最轻的超对称伴子 (LSP) 在 R 宇称守恒下会很重,而且可以自然地稳定,因此可以很好地作为暗物质的候选者 [24]。在最小超对称模型的一些限制下中微子的超对称伴子可以作为暗物质粒子的选择。在超对称模型的其它限制下,引力子的超对称伴子也是很好的暗物质粒子的选择。这将依赖于超对称性是如何破坏的。

额外维粒子:尽管在通常的物理现象只存在四维时空中,但是在高能标的物理背景下有出现额外维的可能。额外维物理最早是从 Kaluza-Klein 理论开始的,通过把时空拓展为五维而统一了电磁相互作用和引力相互作用。最近,理论学家发现额外维也可以用来解决粒子物理的规范等级问题。目前, Kaluza-Klein 理论也被用于探索暗物质粒子的性质。如果标准模型存在于额外维空间中,所有的标准模型粒子在额外维空间中都 KK 激发态。它们都是暗物质粒子的可能的选择。一个新的维度的出现将意味着一个新的维度下的动量守恒的出现。这将导致一个新的分立对称性的出现,可以称之为 KK 宇称。在普遍的额外维模型中,这种对称性是守恒的,因此最轻的 KK 粒子 (LKP) 是稳定的,可以作为暗物质的候选者 [25]。

暗物质粒子的理论模型众多,除了上面介绍的还有小 Higgs 模型 [26],超重

的暗物质模型 [27], Q-ball 模型 [28], 镜像粒子模型 [29], 自相互作用暗物质模型 [30], 超弱相互作用暗物质模型 [31]等。下面就简单介绍一种最简单的暗物质模型 Darkon 模型。

Darkon 暗物质模型 [32–35]:

Darkon 暗物质模型是 WIMPs 中的一种。在 Darkon 模型中, Darkon 场 D 是一个实标量场, 是标准模型的单态, 不带有标准模型的荷, 只通过 Higgs 场与标准模型粒子发生弱相互作用。另外引入额外的 Z_2 对称性保持 D 稳定, 在 Z_2 对称性下 $D \rightarrow -D$, 而标准模型粒子在 Z_2 对称下保持不变, 其标准 Darkon 模型拉氏量为

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \partial^\mu D \partial_\mu D - \frac{\lambda_D}{4} D^4 - \frac{m_0^2}{2} D^2 - \lambda D^2 H^\dagger H, \quad (4.1)$$

其中 λ_D, m_0, λ 是自由参数。 \mathcal{L}_D 在 Z_2 变换下保持不变。要保持 Z_2 对称不被破坏和暗物质场没有真空期待值, 这样, D 不与 Higgs 粒子混合, 因而可以避免 D 很容易衰变为标准模型的粒子。当 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 自发对称性破缺为 $U(1)_{\text{em}}$ 后, 拉氏量(4.1)可以写为与物理的 Higgs h 相互作用形式,

$$\mathcal{L}_D = -\frac{\lambda_D}{4} D^4 - \frac{(m_0^2 + \lambda v^2)}{2} D^2 - \frac{\lambda}{2} D^2 h^2 - \lambda v D^2 h, \quad (4.2)$$

其中 Higgs 粒子 H 的真空期待值为 $v = 246 \text{ GeV}$, D 的质量为 $m_D = (m_0^2 + \lambda v^2)^{1/2}$, $-\lambda v D^2 h$ 项是暗物质残余密度的主要来源。具体暗物质的物质残余密度的贡献是一对 D 通过交换 Higgs 场湮灭成标准模型粒子, 即 $DD \rightarrow h^* \rightarrow X(\text{SM})$ (X 为标准模型粒子)。Darkon 模型中暗物质是冷暗物质, 质量重速度慢, 速度是非相对论的。暗物质通过 s 道进行湮灭, 可以有近似关系 $\sqrt{s} \simeq 2m_D$ 。由拉氏量(4.2)可以得到, 一对暗物质 D 通过交换 Higgs 粒子 h 湮灭为标准模型粒子的湮灭率为:

$$\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} = \frac{8\lambda^2 v^2}{(4m_D^2 - m_h^2)^2 + \Gamma_h^2 m_h^2} \frac{\sum_i \Gamma(\tilde{h} \rightarrow X_i)}{2m_D}, \quad (4.3)$$

其中 $v_{\text{rel}} = 2|\mathbf{p}_D^{\text{cm}}|/m_D$ 是一对暗物质 D 在质心坐标系中的相对速度, Γ_h 是 Higgs 粒子衰变到标准模型粒子的衰变率, \tilde{h} 表示虚的 Higgs 粒子, $\Gamma(\tilde{h} \rightarrow X_i)$ 是将虚的 Higgs 粒子的质量 m_h 替换为 $2m_D$ 的质量时的衰变率。当暗物质的质量大于 Higgs 粒子的质量时, 暗物质将湮灭到一对 Higgs, 所以 $DD \rightarrow hh$ 的过程同样对暗物质的湮灭率有贡献。

对于暗物质和标准模型粒子的给定的相互作用，我们可以计算暗物质的暗灭率，根据标准宇宙学热力学性质可以得到湮灭率和暗物质残余密度的关系 [34, 36]:

$$\Omega_D h^2 \simeq \frac{1.07 \times 10^9 x_f}{\sqrt{g_*} m_{\text{Pl}} \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle \text{GeV}}, \quad x_f \simeq \ln \frac{0.038 m_{\text{Pl}} m_D \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle}{\sqrt{g_*} x_f}, \quad (4.4)$$

这里 h 是 Hubble 常数，单位为 $100 \text{km}/(s \times \text{Mpc})$ ， x_f 又由关系式 $x_f = m_D/T_f$ 决定， T_f 是冻出温度。利用方程(4.4)就可以应用宇宙学对暗物质残余密度 $\Omega_D h^2$ 观测限制 $\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}}$ 范围。从而限制出耦合常数和暗物质质量的关系。

对于暗物质的直接探测过程，由拉氏量(4.2)可以计算出暗物质与原子核在 t 通道碰撞的弹性散射截面，

$$\sigma_{\text{el}} \simeq \frac{\lambda^2 g_{NN\mathcal{H}}^2 v^2 m_N^2}{\pi (m_D + m_N)^2 m_h^4}, \quad (4.5)$$

由于暗物质远大于原子核的质量，所以有近似 $(p_D + p_N)^2 \simeq (m_D + m_N)^2$ 。如果知道耦合常数 $g_{NN\mathcal{H}}$ 后，利用耦合常数和暗物质质量的关系就可以预言弹性散射截面 σ_{el} 随暗物质质量 m_D 的变化关系。这样就可以与暗物质直接探测的实验数据进行比较。

4.2 中微子质量产生机制

中微子质量的实验测量暗示着中微子有非零的质量，这就要求我们要对标准模型的中微子进行扩充，考虑超标准模型的新物理。通常地，高能标的新物理在低能标下以不可重整化算符 (NRO) 的形式来直接研究。在低能标下，NRO 受到高能标 Λ 的强烈压低，可以给出很小的修正，是一个可以描述地很好的可重整化理论。在标准模型的拉氏量中加入 NRO 后，轻子数 L_e, L_μ, L_τ 和重子数 B 不再守恒:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{(LH)^2}{2\Lambda_L} + \frac{1}{\Lambda_B^2} \left[c_1(\bar{U}\bar{D})(QL) + c_2(QQ)(\bar{U}\bar{E}) + c_3(QQ)(QL) \right. \\ & \left. + c_4(Q\tau^a Q)(Q\tau^a L) + c_5(\bar{D}\bar{U})(\bar{U}\bar{E}) + c_6(\bar{U}\bar{U})(\bar{D}\bar{E}) + \text{h.c.} \right] + \dots \quad (4.6) \end{aligned}$$

其中 Λ_L 和 Λ_B 分别对应轻子数破坏和重子数破坏的新物理的能标。算符 $(LH)^2$ 对应于中微子的 Majorana 质量，算符 $(LH)^2$ 的来源是各种中微子模型研究的重点 [37]。树图水平上有三种不同类型的新粒子可以使中微子产生质量：右手

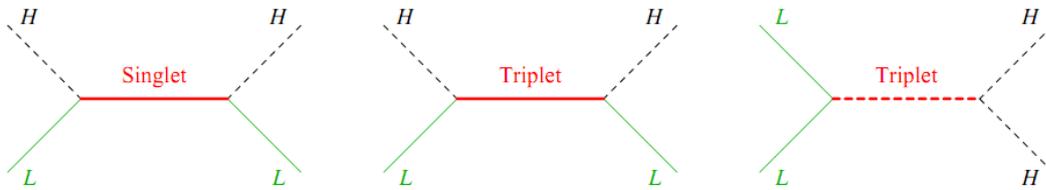


图 4.1 类型 I, II, III 跷跷板机制费曼图。

Figure 4.1 Feynman diagram for type I, II, III See-saw.

中微子, 费米子的 $SU(2)_L$ 三重态和标量场的 $SU(2)_L$ 三重态。这就是类型 I, 类型 II 和类型 III 跷跷板机制, 分别对应于图 4.1 中从左到右的三个费曼图。

类型 I 跷跷板:

类型 I 跷跷板是最简单的产生中微子质量的办法, 就是直接添加一个额外的费米子单态右手中微子 $N = \nu_R$ 将标准模型拉氏量扩充为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \bar{N}_i i \not{\partial} N_i + (\lambda_N^{ij} N^i L^j H + \frac{M_N^{ij}}{2} N_i N_j + \text{h.c.}) \quad (4.7)$$

这样的中微子通常会有 6×6 的质量矩阵:

$$\begin{pmatrix} \nu_L & \nu_R \\ \nu_L & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_N^T v \\ \lambda_N v & M_N \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

这里 λ_N 和 M_N 都是 3×3 的味矩阵。如果 $M_N \gg \lambda_N v$ 左手中微子的质量为

$$m_\nu = -(v \lambda_N)^T M_N^{-1} (v \lambda_N) \quad (4.9)$$

类型 I 跷跷板通过交换右手中微子产生了轻子数破坏的 Majorana 质量算符。

类型 III 跷跷板:

类型 III 跷跷板与类型 I 跷跷板的不同之处在于它添加一个新的 $SU(2)_L$ 的费米子三重态而不是单态。新的额外的费米子三重态是不带弱超荷的。在此基础上拉氏量为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \bar{N}_i i \not{\partial} N_i + \left[\lambda_N^{ij} N_i^a (L_j \cdot \tau^a \cdot \varepsilon \cdot H) + \frac{M_N^{ij}}{2} N_i^a N_j^a + \text{h.c.} \right]. \quad (4.10)$$

其中, τ^a 是泡利矩阵, ε 是二阶反对称张量矩阵, N 的三个分量是: N^3 不带电荷, $(N^1 \pm iN^2)/\sqrt{2}$ 带电荷 ± 1 。类型 III 跷跷板的中微子的质量与式 (4.9) 有类似地形式, 他是通过交换费米子三重态产生 Majorana 质量算符。

类型 II 跷跷板:

类型 II 跷跷板是通过添加一个额外的 $SU(2)_L$ 标量场三重态 $T^a (a = \{1, 2, 3\})$, 新的标量粒子的弱超荷为 $Y_T = 1$ 。在这样的构建下新的拉氏量写为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + |D_\mu T|^2 - M_T^2 |T^a|^2 + \frac{1}{2} (\lambda_T^{ij} L^i \varepsilon \tau^a L^j T^a + \lambda_H M_T H \varepsilon \tau^a H T^{a*} + \text{h.c.}) \quad (4.11)$$

这里 λ_T 是对称的味矩阵, ε 是置换矩阵, τ^a 是通常的泡利矩阵。积分掉重的标量粒子三重态可以产生 Majorana 质量算符 $(LH)^2$ 。这会得到类型 II 跷跷板机制下的中微子质量:

$$m_\nu^{ij} = \lambda_T^{ij} \lambda_H v^2 / M_T^2 \quad (4.12)$$

可以看出这三种跷跷板机制都是通过引入超重的新粒子的质量来压低中微子的质量, 这也是跷跷板机制的精神所在。

上面介绍了产生中微子质量通常的跷跷板机制, 此外, 还有翻转的跷跷板机制(后面将会介绍), 混合的跷跷板机制, 线性跷跷板机制, 以及辐射的跷跷板机制等。值得注意的是辐射的跷跷板机制, 因为在辐射的跷跷板机制中通过加入新的偶然对称性可以使最轻的新粒子保持稳定, 这就自然地可以使得最轻的中性粒子作为暗物质粒子, 这种跷跷板机制把中微子质量产生和暗物质粒子很好地结合在了一起。下面简单介绍辐射的跷跷板机制。

辐射的跷跷板机制 [16]:

把暗物质作为中微子质量起源的想法是目前许多研究共同讨论的问题。辐射的跷跷板机制如图 4.2 所示, 在单圈图水平上使中微子产生质量, 是最简单的一个例子。标准模型的夸克和轻子的相互作用被扩充到三个中性的 Majorana

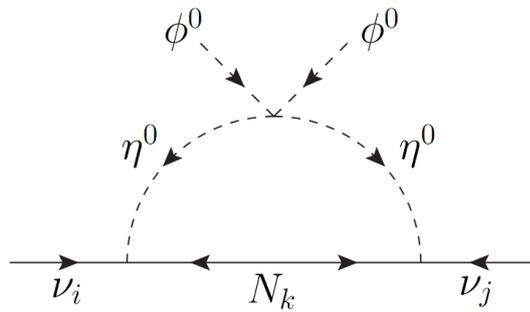


图 4.2 Z_2 对称性下中微子质量产生的费曼图。

Figure 4.2 one loop generation of neutrino mass with Z_2 symmetry.

费米子 $N_{1,2,3}$ 和一个额外的标量粒子二重态 (η^+, η^0) 。通过一个新的偶然分立对称 Z_2 来禁戒中微子通过树图产生质量, 并且限制了标量场的相互作用的势

的结构, 可以使最轻的中性粒子保持稳定从而成为暗物质粒子的很好的选择。在新的分立对称性 Z_2 下, 所有引入的新粒子是奇数而标准模型的粒子都是偶数。其中复标量场 $\eta^0 = (\eta_R + i\eta_I)/\sqrt{2}$ 通过 Higgs 和标量场的相互作用势中的 $(\lambda_5/2)(\Phi^\dagger\eta)^2 + H.c.$ 项发生质量劈裂, 因此, $m_R \neq m_I$ 这样可以得到辐射的跷跷板机制下的中微子质量:

$$(\mathcal{M}_\nu)_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{16\pi^2} \left[\frac{m_R^2}{m_R^2 - M_k^2} \ln \frac{m_R^2}{M_k^2} - \frac{m_I^2}{m_I^2 - M_k^2} \ln \frac{m_I^2}{M_k^2} \right]. \quad (4.13)$$

模型中, 所有新粒子中最轻的粒子是中性的, 质量重的粒子会通过新引入的 Yukawa 相互作用以及弱相互作用衰变到质量最轻的中性粒子, 而质量最轻的粒子将不会继续衰变, 保持稳定。所以暗物质粒子的选择为 η_R (假设 $m_R < m_I$) 或者 N_1 (假设 $M_1 < M_{2,3}$)。

在辐射的跷跷板模型基础上我们希望最大限度的压低新物理的能标并包含暗物质粒子以提供实验上观测新物理信号更大的可能。我们对此进行了一些探索并提出了辐射的翻转跷跷板机制下的暗物质模型, 下面就来具体介绍这个模型 [38] 以及模型相关的现象学的暗示 [39]。

4.3 辐射翻转跷跷板机制下的暗物质模型

前面提到跷跷板机制是目前比较流行的用于解释中微子质量远小于其对应带电轻子质量的一种中微子产生机制。在通常的跷跷板机制中引入的右手中微子都很重, 它接近大统一的能标。这将会使实验上检验这些理论模型变得十分困难。理论上如果可以使 Seesaw 能标降到 TeV 范围以下, LHC 上的 ATLAS 和 CMS 实验就有可能对其信号进行直接的探测。目前理论上确实也已经有一些特殊的办法可以把很重的右手中微子的质量压低到 TeV 的量级, 但是这些办法都是要通过参数的精细调节做到的 [40, 41]。虽然理论是允许这种做法的, 但是却失去了自然性。辐射的跷跷板机制可以解决这个问题而且同时自然地包括了暗物质粒子 [16]。另一方面, 翻转的跷跷板机制也可以压低 Seesaw 能标 [12, 13]。在 Inverse seesaw 模型中重的 Majorana 中微子被替换为了重的 Dirac 粒子。轻的中微子质量在 $\mu(m_D/M)^2$ 的量级。这里 M 是重 Dirac 粒子的质量, μ 重 Dirac 粒子的 Majorana 质量, 它将远小于 Dirac 质量 m_D 。很清楚的看出重 Dirac 质量标度可以比通常的 Seesaw 模型的 Majorana 质量。如果 Inverse seesaw 也可以通过辐射圈图实现, 新物理的能标可以更低 [42]。下面就来研究辐射的跷跷板机制模型, 通过两圈的辐射机制产生中微子质量, 引入新的整体对称性并使

对称性保持来禁戒中微子通过树图产生质量，这种对称性的引入同时也使得模型中质量最轻的中性粒子保持稳定，这种新的粒子可以扮演占据我们宇宙大约 27% 能量的暗物质的角色。下面首先介绍树图的 Inverse seesaw，然后讨论辐射的两圈 Inverse seesaw 模型。

树图的 Inverse seesaw：

产生 Inverse seesaw 中微子质量矩阵 M_ν 的有效拉氏量为：

$$L_m = -\bar{\nu}_L m_D N_R - \bar{N}_L M N_R - \frac{1}{2} \bar{N}_R^c \mu_R N_R - \frac{1}{2} \bar{N}_L \mu_L N_L^c + h.c. \quad (4.14)$$

这里 ν_L 是轻的活性中微子， $N_{L,R}$ 是重的中微子。在基矢 $(\nu_L^c, N_R, N_L^c)^T$ 下， M_ν 为

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D & 0 \\ m_D^T & \mu_R & M^T \\ 0 & M & \mu_L \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

这里有质量等级 $\mu_L \sim \mu_R \ll m_D \ll M$ ，轻的中微子质量矩阵 m_ν 由拉氏量 $L_{mass} = -(1/2)\nu_L m_\nu \nu_L^c$ 定义，保留到 $(m_D/M)^2$ 的量级有：

$$m_\nu = m_D M^{-1} \mu_L (M^{-1})^T m_D^T. \quad (4.16)$$

有许多不同的方法来实现翻转的跷跷板机制，这依赖于 $N_{L,R}$ 的选择，这里简单介绍两种树图水平下实现 Inverse seesaw 的比较简单的可能性。

一种比较简单的方法是引入右手 N_R 和左手 N_L 的单态重的中微子。同时添加一个额外的分立对称性 Z_2 对称性，在这个对称性下， $N_R \rightarrow N_R$ ， $N_L \rightarrow -N_L$ 而标准模型的粒子在这种对称性的变化是不变的。质量 m_D 是通过 Yukawa 耦合 $\bar{L}_L Y_D \tilde{H} N_R$ 产生。这里 $H = (h^+, (v_H + h + iI)^T/\sqrt{2})$ 是标准模型 Higgs 二重态，在标准模型弱电规范群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 下的量子数为 $(2, 1/2)$ 。 $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$ 。 v_H 是 Higgs 场的真空期待值。 $L_L = (\nu_L, e_L)^T : (2, -1/2)$ 是标准模型的轻子二重态。 $\mu_{L,R}$ 项来自于裸的 Majorana 质量项 $\bar{N}_R^c \mu_R N_R$ 和 $\bar{N}_L \mu_L N_L^c$ 。由于 Z_2 对称性，裸的 Dirac 质量项 $\bar{N}_L M N_R$ 是被禁戒的。为了产生非零的 M ，我们可以引入一个单态标量场 S ， Z_2 对称性下的变换为 $S \rightarrow -S$ ，同时让这个标量场自发破缺从而产生非零的真空期待值 $v_s/\sqrt{2}$ 。在这种情况下，Yukawa 耦合项 $\bar{N}_L Y_s S N_R$ 是允许的，它将产生 Dirac 质量 $Y_s v_s/\sqrt{2}$ 。

同样地，也可以引入新的轻子二重态 $D_{L,R} : (2, -1/2)$ 以及标量场的单态 S 和三重态 $\Delta : (3, -1)$ (Δ_{ij} 的表示 $\Delta_{11} = \Delta^0$ ， $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta^-/\sqrt{2}$ 和

$\Delta_{22} = \Delta^{--}$)来实现 Inverse seesaw。同时引入新的整体对称性 $U(1)_D$ 对称性来区分 D_L 和 L_L ，在这种对称性下， $D_{L,R} \rightarrow \exp[i\alpha_D]D_{L,R}$ ， $S \rightarrow \exp[-i\alpha_D]S$ ， $\Delta \rightarrow \exp[2i\alpha_D]\Delta$ ，而标准模型的场不变。因此我们有与中微子质量相关的拉氏量：

$$L_D = -\bar{L}_L Y_D D_R S - \bar{D}_L M D_R - \frac{1}{2} \bar{D}_L Y_L D_L^c \Delta - \frac{1}{2} \bar{D}_R^c Y_R D_R \Delta^\dagger + h.c. \quad (4.17)$$

如果 S 和 Δ 都有不为零的真空期待值，Inverse seesaw 就可以实现。然而，在这个模型中，由于 $U(1)_D$ 整体对称性的破坏必然导致额外的 Goldstone 玻色子的出现这将会使问题变得比较复杂。为了避免理论中 Goldstone 玻色子的出现需要额外的扩充。同时以上两种模型中都没有暗物质的候选者。下面介绍 Inverse seesaw 通过辐射的圈图产生，这样可以自然地存在暗物质候选者。

辐射的两圈 Inverse seesaw [38]：

为了避免理论中无质量的 Goldstone 玻色子的出现，一个可能的办法就是不破坏新引入的这种整体对称性，这样就不会有新的 Goldstone 玻色子的出现。建立在这个思想基础上，引入 $D_{L,R}$ ， S 和 Δ ，这些场都没有对称性的破坏。这样就禁戒掉轻的中微子通过树图产生质量。在这种情况下，为了使中微子获得质量，我们还需要引入另外一个单态 σ ，在整体对称性 $U(1)_D$ 下得变换性质为 $\sigma \rightarrow \exp[2i\alpha_D]\sigma$ 。我们称这个模型为 $U(1)_D$ 模型。标量场相互作用势 V_D 的可重整化形式为：

$$\begin{aligned} V_D = & -\mu_H^2 H^\dagger H + \lambda_H (H^\dagger H)^2 + \mu_S^2 S^\dagger S + \lambda_S (S^\dagger S)^2 + \mu_\sigma^2 \sigma^\dagger \sigma + \lambda_\sigma (\sigma^\dagger \sigma)^2 \\ & + \mu_\Delta^2 \Delta^\dagger \Delta + \lambda_\Delta^\alpha (\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta)_\alpha + \sum_{ij} \lambda_{ij} i^\dagger i j^\dagger j \\ & + (\mu_{S\sigma} S^2 \sigma + \lambda_{\Delta\sigma H} H \Delta \sigma^\dagger H + h.c.), \end{aligned} \quad (4.18)$$

这里求和 \sum_{ij} 是对指标 i 和 j 所有的可能求和，其中 i 是 H ， S ， σ 和 Δ 中的一个。允许的项为：

$$\begin{aligned} & \lambda_{H\Delta}^\beta (H^\dagger H \Delta^\dagger \Delta)_\beta + \lambda_{H\sigma} (H^\dagger H \sigma^\dagger \sigma) + \lambda_{HS} (H^\dagger H S^\dagger S) \\ & + \lambda_{\Delta\sigma} (\Delta^\dagger \Delta \sigma^\dagger \sigma) + \lambda_{\sigma S} (\sigma^\dagger \sigma S^\dagger S). \end{aligned} \quad (4.19)$$

上面的指标 α 和 β 表示形成单态的不同的方式。它们为：

$$\begin{aligned} (\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta)_1 &= \Delta_{ij}^* \Delta_{ij} \Delta_{kl}^* \Delta_{kl}, & (\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta)_2 &= \Delta_{ij}^* \Delta_{ik} \Delta_{kl}^* \Delta_{jl} \\ (\Delta^\dagger \Delta H^\dagger H)_1 &= \Delta_{ij}^* \Delta_{ij} H_k^* H_k, & (\Delta^\dagger \Delta H^\dagger H)_2 &= \Delta_{ij}^* \Delta_{kj} H_k^* H_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

上的所有的 μ_i^2 都是大于零的。势场中只有 H 有非零的真空期待值 v_H 。理论有不破坏的 $U(1)_D$ 整体对称性，规范对称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 破坏到 $U(1)_{em}$ 。在

树图水平下, 轻的中微子是无质量的。模型中的拉氏量和标量场相互作用势是破坏轻子数守恒的。这是因为在相互作用顶点 $\bar{L}_L D_R S$, $\bar{D}_{L,R} D_{L,R}^c \Delta$, $S^2 \sigma$ 和 $H \Delta \sigma^\dagger H$ 中, 总是有一个相互作用顶点是轻子数破坏的。例如, 假设 L_L 有轻子数 $+1$, $D_{L,R}$ 有 X , 如果保持顶点 $\bar{L}_L D_R S$, $\bar{D}_{L,R} D_{L,R}^c \Delta$ 和 $S^2 \sigma$ 的轻子数守恒, 顶点 $H \Delta \sigma^\dagger H$ 将会有 2 个单位的轻子数破坏。当然也可以保持其它的顶点轻子数守恒, 但是不管如何选择, 在正比于 $Y_D Y_L \mu_{S\sigma} \lambda_{\Delta\sigma H} Y_D$ 项的组合中总会有 2 个单位的轻子数破坏。然而整体对称性 $U(1)_D$ 是保持, 这也意味着它所对应的荷, 可以称为 D 荷, 是守恒的。由于轻子数的破坏, 在圈图水平, 可以产生 Majorana 质量。我们发现非零的 Majorana 中微子的质量可以在两圈图的水平上产生, 如图 4.3 所示。两圈图有 2 个单位的轻子数破坏。这两圈图的质量产生机制和 Babu-Zee 模型的两圈中微子质量产生机制是类似的 [43, 44], 但是把其圈图中的带电轻子换成了新的重粒子。相互作用势的后两项对于中微子的质量产生有着至关重要的作用。下面介绍两圈图诱导的轻的中微子质量的具体计算

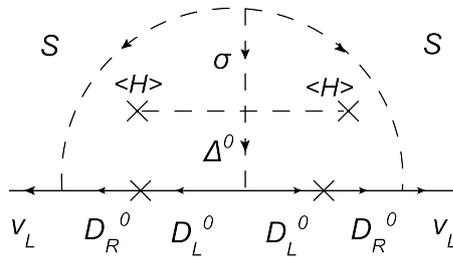


图 4.3 中微子质量产生的两圈费曼图

Figure 4.3 Two loop diagram for neutrino mass generation.

过程。由于 H 有非零的真空期待值, 因此相互作用项 $H \Delta \sigma^\dagger H$ 将会使 Δ^0 和 σ 产生混合。对应的 $(\Delta^0, \sigma)^T$ 味空间的质量矩阵可以表示为:

$$\begin{pmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{pmatrix}$$

有

$$\begin{aligned} M_{11}^2 &= \mu_\Delta^2 + \frac{1}{2} \lambda_{H\Delta}^1 v_H^2, \\ M_{22}^2 &= \mu_\sigma^2 + \frac{1}{2} \lambda_{H\sigma} v_H^2, \\ M_{12}^2 &= M_{21}^2 = \frac{1}{2} \lambda_{\Delta\sigma H} v_H^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

可以在质量本征态空间将质量矩阵对角化

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

其中

$$m_{\phi_{1,2}}^2 = \frac{M_{11}^2 + M_{22}^2 \pm \sqrt{(M_{11}^2 - M_{22}^2)^2 + 4M_{12}^2 M_{21}^2}}{2},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2M_{12}^2}{\sqrt{(M_{11}^2 - M_{22}^2)^2 + 4M_{12}^2 M_{21}^2}}.$$

通过两圈图产生的轻的中微子的质量 m_ν 为:

$$m_\nu = Y_D^2 M^2 Y_L \mu_{S\sigma} \cos \alpha \sin \alpha \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_S^2} \frac{1}{q^2 - m_S^2} \frac{1}{p^2 - M^2} \frac{1}{q^2 - M^2}$$

$$\times \left(\frac{1}{(p-q)^2 - m_{\phi_1}^2} - \frac{1}{(p-q)^2 - m_{\phi_2}^2} \right). \quad (4.22)$$

上式中的最后一个因子可以写为 $(m_{\phi_1}^2 - m_{\phi_2}^2)/((p-q)^2 - m_{\phi_1}^2)((p-q)^2 - m_{\phi_2}^2)$, 利用关系 $\sin \alpha \cos \alpha (m_{\phi_1}^2 - m_{\phi_2}^2) = M_{12}^2 = \frac{1}{2} \lambda_{\Delta\sigma H} v_H^2$, 同时忽略分母中 m_{ϕ_1} 和 m_{ϕ_2} 的质量劈裂, 可以得到:

$$m_\nu = \frac{\lambda_{\Delta\sigma H} Y_L Y_D^2 \mu_{S\sigma} v_H^2 M^2}{2(M^2 - m_S^2)^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times$$

$$\frac{1}{[(p-q)^2 - m_{\phi_1}^2]^2} \left(\frac{1}{p^2 - m_S^2} \frac{1}{q^2 - m_S^2} - \frac{1}{p^2 - m_S^2} \frac{1}{q^2 - M^2} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p^2 - M^2} \frac{1}{q^2 - m_S^2} + \frac{1}{p^2 - M^2} \frac{1}{q^2 - M^2} \right). \quad (4.23)$$

完成圈图积分可以得到:

$$m_\nu = \frac{\lambda_{\Delta\sigma H} Y_L Y_D^2 \mu_{S\sigma} v_H^2}{2(4\pi)^4 M^2 (1 - m_S^2/M^2)^2} [g(m_{\phi_1}, m_S, m_S) - g(m_{\phi_1}, M, m_S)$$

$$- g(m_{\phi_1}, m_S, M) + g(m_{\phi_1}, M, M)], \quad (4.24)$$

这里

$$g(m_1, m_2, m_3) = \int_0^1 dx [1 + Sp(1 - \mu^2) - \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \log \mu^2]$$

其中

$$\mu^2 = \frac{ax + b(1-x)}{x(1-x)}, a = \frac{m_2^2}{m_1^2}, b = \frac{m_3^2}{m_1^2}$$

$Sp(z)$ 是 Spence 函数, 被定义为:

$$Sp(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt \quad (4.25)$$

对比 Inverse seesaw 的质量形式, 我们重新把质量矩阵的形式表示在 M 为对角化的基矢下:

$$m_\nu^{ij} = \frac{v_H Y_D^{ik} (\lambda_{\Delta\sigma H} \mu_{S\sigma} Y_L^{kl}) Y_D^{jl} v_H}{M_{kk}^2} \kappa_{kl}, \quad (4.26)$$

这里 κ_{kl} 的定义为:

$$\begin{aligned} \kappa_{kl} = & \delta_{kl} \frac{1}{2(4\pi)^4} \frac{1}{(1 - m_S^2/M_{kk}^2)^2} [g(m_{\phi_1}, m_S, m_S) - g(m_{\phi_1}, M_{kk}, m_S) \\ & - g(m_{\phi_1}, m_S, M_{kk}) + g(m_{\phi_1}, M_{kk}, M_{kk})] \end{aligned} \quad (4.27)$$

如果我们有效地选择质量矩阵中的相关参数的形式为 $m_D = Y_D v_H$, $M = \text{diag}(M_{ii})$ 和 $\mu_L = (\mu_L^{ij})$ 。其中 $\mu_L^{ij} = (\lambda_{\Delta\sigma H} \mu_{S\sigma}) Y_L^{ij} \kappa_{ij}$, 这样轻的中微子的质量矩阵就是一个有效的 Inverse seesaw 质量矩阵的形式。因此, 我们称这种中微子产生机制为辐射的 Inverse seesaw 机制。这个模型与其它的一些辐射的 Inverse seesaw 模型是不同的 [45]。通过引入额外的中性的重费米子来产生辐射的中微子质量。

式 4.26 给出了模型中轻的中微子的质量形式, 它将决定 $U(1)_D$ 模型是否和目前中微子质量和中微子混合的实验数据一致。要使模型和实验数据一致就至少保持两代中微子有非零的质量, 这就要求至少有两代的 $D_{L,R}$ 。我们这里假设它们有三代。混合模式由两个 Yukawa 耦合 Y_D 和 Y_L 来决定。对于三代的 $D_{L,R}$ 这两个 Yukawa 耦合矩阵都是 3×3 的矩阵。在我们的数值计算中, 我们假定 Y_D 来决定中微子混合的味结构, 有: $Y_D = y_D U_{PMNS} \hat{Y}_D$, 而 Y_L 为对角矩阵, 只对中微子正常排序和反常排序的质量有贡献。数值分析中, 我们将使用全局拟合的实验数据的中心值。实验上测得的中微子的正常排序和反常排序 (NH 和 IH) 的混合角和质量平方差分别为 [46]:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= 0.307_{-0.016}^{+0.018}(\text{NH}, \text{IH}); \sin^2 \theta_{23} = 0.386_{-0.021}^{+0.024}(\text{NH}), 0.392_{-0.022}^{+0.039}(\text{IH}); \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0.0241 \pm 0.0025(\text{NH}), 0.0244_{-0.0025}^{+0.0023}(\text{IH}); \\ \delta m^2 &= m_2^2 - m_1^2 = (7.54_{-0.22}^{+0.26}) \times 10^{-5} \text{eV}^2(\text{NH}, \text{IH}); \\ |\Delta m^2| &= |m_3^2 - (m_2^2 + m_1^2)/2| \\ &= (2.43_{-0.1}^{+0.06}) \times 10^{-3} \text{eV}^2(\text{NH}), (2.42_{-0.11}^{+0.07}) \times 10^{-3} \text{eV}^2(\text{IH}); \\ \delta &= 194.4^\circ(\text{NH}), 196.2^\circ(\text{IH}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

下面给出在中微子这两种质量排序下的模型的参数设定, 而且作为后面 $U(1)_D$ 模型各种现象学分析中参数选择的基准。

对于正常排序, 选择 $\hat{Y}_D = \text{diag}(1, \sqrt{1.03}, \sqrt{1.77})$, $y_D \times \lambda_{\Delta\sigma H} = 10^{-3}$, $Y_L = \mathbf{I} \times 10^{-2}$, $\mu_{S\sigma} = 100\text{GeV}$, $m_{\phi_1} = 300\text{GeV}$, $m_S = 150\text{GeV}$, $M_{ii} = 500\text{GeV}$ 。我们可以得到三代中微子的质量分别为: $3.39 \times 10^{-2}\text{eV}$, $3.50 \times 10^{-2}\text{eV}$, $5.98 \times 10^{-2}\text{eV}$ 。它们和实验数据是一致的。

对于反常排序, 只需把 \hat{Y}_D 换为 $\hat{Y}_D = \text{diag}(\sqrt{1.46}, \sqrt{1.48}, \sqrt{0.100})$, 而其它的参数不变, 中微子的质量分别为: $4.93 \times 10^{-2}\text{eV}$, $5.01 \times 10^{-2}\text{eV}$, $3.39 \times 10^{-3}\text{eV}$ 。同样, 它和实验数据也是一致的。这时, 我们可以看到新物理的能标被压低到了几百个 GeV。

同样的想法, 上面辐射的两圈 Inverse seesaw 机制还有另外一种实现方式。可以添加额外的整体对称性 $U(1)_S$ 。超标准模型的新粒子非别为: $N_{L,R} : (1, 0)$, $\eta : (2, -1/2)$, $\Delta : (3, -1)$ 和 $S : (1, 0)$ 。在这种新的对称性 $U(1)_S$ 下, 新粒子的变换形式为: $N_{L,R} \rightarrow \exp[i\alpha_S]$, $\eta \rightarrow \exp[-i\alpha_S]\eta$, $\Delta \rightarrow \exp[-2i\alpha_S]$, $S \rightarrow \exp[-2i\alpha_S]S$ 。这样, 两圈中微子质量产生的拉氏量 L_S 和标量场相互作用势 V_S 分别为:

$$\begin{aligned} L_S &= -\bar{N}_L M N_R - \bar{L}_L Y_D N_R \eta - \frac{1}{2} \bar{N}_R^c Y_R N_R S - \frac{1}{2} \bar{N}_L Y_L N_L^c S^\dagger + h.c. \\ V_S &= \mu_{\Delta\eta} \eta \Delta^\dagger \eta + \lambda_{\Delta S H} H \Delta^\dagger S H + h.c. + \dots, \end{aligned} \quad (4.29)$$

这里“...”指代其它的可能的项。轻的中微子的质量矩阵可以通过式 (4.26) 中的 $\mu_{S\sigma}$ 和 $\lambda_{\Delta\sigma H}$ 分别换为 $\mu_{\Delta\eta}$ 和 $\lambda_{\Delta S H}$ 。在这个模型中, 正比 $Y_D Y_L \mu_{\Delta\eta} \lambda_{\Delta S H} Y_D$ 有 2 个单位的轻子数破坏, 这与 $U(1)_D$ 模型中的原因相同。

这两个模型对于实现中微子通过两圈的 Inverse seesaw 机制来产生质量是非常类似的。由于这两种模型都引入额外的整体对称性, 可以使最轻的中性粒子保持稳定, 自然地提供了暗物质粒子的选择。下面一节会以 $U(1)_D$ 模型为例, 具体分析引入的新粒子当中, 暗物质粒子的性质以及其它现象学的一些暗示。

4.4 $U(1)_D$ 模型的现象学暗示

$U(1)_D$ 模型通过新粒子的引入使中微子通过两圈的 Inverse seesaw 机制获得质量。下面就介绍 $U(1)_D$ 模型的一些现象学暗示 [39], 分析模型中暗物质的候选者以及暗物质的性质, 解释实验上中微子的质量和混合角, 研究新粒子诱导的轻子味破坏过程, 考虑 Higgs 衰变到双光子的新物理贡献, 给出 LHC 上寻找模型中所预言的新粒子的信号。

4.4.1 $U(1)_D$ 模型的暗物质粒子

在 $U(1)_D$ 模型中, 重费米子有非零的弱超荷, 不能作为暗物质粒子。这是因为虽然重费米子可以通过模型中已知的相互作用湮灭到规范玻色子来产生暗物质的残余密度, 但是重费米子有弱超荷, 可以通过交换 Z 玻色子与原子核发生 t 通道的弹性散射, 这样的散射截面很大, 已经被暗物质的直接探测实验排除在外。因此模型中的标量场的中性分量是暗物质粒子选择的其它可能。中性标量粒子 Δ^0 有非零的弱超荷, 因此会出现和重费米子同样问题, 但是如果 Δ^0 粒子的实部质量 m_r 和虚部质量 m_i 有质量劈裂 $\delta = m_r - m_i$, 非零的弱超荷的问题就可以通过引入暗物质的非弹性散射机制来予以解决 [47]。也就是说, 如果劈裂质量 δ^0 大于 100 KeV, 核子被暗物质散射开在运动学上是禁戒的。在 $U(1)_D$ 模型中 Δ^0 粒子是没有质量劈裂的, 因此, 非弹性散射的暗物质机制是无效的。

中性的暗物质场是 S 。它不带有弱超荷, 而且与其它有弱超荷的粒子也没有混合。对于这个模型暗物质的性质, 它于实标量场单态的 Darkon 模型非常类似, 模型中暗物质的性质与复标量场单态的暗物质模型是相同的 [48], 实部和虚部具有简并的质量。这就是传统的 Higgs 通道的暗物质模型。暗物质的湮灭和探测都通过 Higgs 粒子。 S 与 Higgs 场的相互作用项为 $S^\dagger S H^\dagger H$, 在 Higgs 场自发破缺后, 相互作用项为:

$$\lambda_{SH} S^\dagger S H^\dagger H = \frac{1}{2} \lambda_{SH} (v_H^2 + 2v_H h + hh) S S^\dagger. \quad (4.30)$$

第一项将把 S 的质量变为 $m_D^2 = \mu_S^2 + \lambda_{SH} v_H^2 / 2$ 。考虑暗物质的湮灭以及直接探测, 自由参数为: m_D, λ_{SH} 。目前 LHC 的数据显示 Higgs 的质量在 125 GeV 左右 [49, 50]。在模型的分析当中我们选择 $m_h = 125$ GeV。暗物质的残余密度和直接探测实验对于耦合常数 λ_{SH} 和质量 m_D 的限制如图 4.4 所示。在我们的模型中复标量场的暗物质的质量是简并的, 暗物质残余密度对于 λ_{SH} 的限制是 Darkon 模型的 $1/\sqrt{2}$ 。最近的 LUX 暗物质直接探测实验对模型中暗物质的质量有了更强的限制 [62], 模型中暗物质质量在几十个 GeV 的区域已经被若干实验组排除, 但是在暗物质质量大约为 Higgs 质量一般和大于 130 GeV 的区域仍是实验允许的。

另外一个标量场 σ 也有可能作为暗物质粒子, 虽然它不带有弱超荷, 但是它通过相互作用项 $\lambda_{\Delta\sigma H} H \Delta\sigma^\dagger H$ 与 Δ^0 产生混合。因此通过混合, 它会与标准模型粒子有非零的 Z 耦合。然而对于这种情况, 我们可以通过调节混合角这个参数使它满足实验的限制。我们发现当混合角参数 $\sin \alpha$ 小于 10^{-3} 时, 实验探测的较大的弹性散射截面的问题就可以得到解决。在这种情况下 σ 粒子对暗物

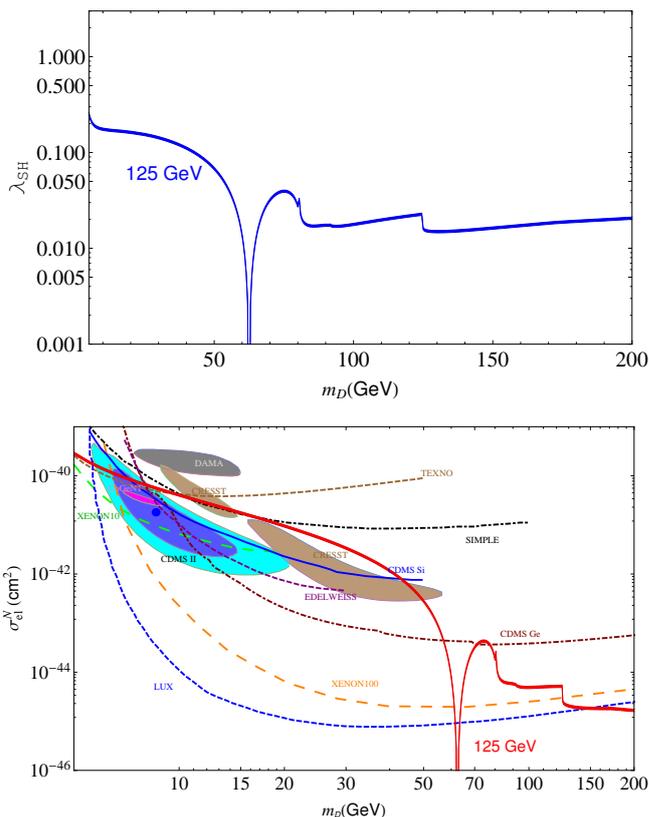


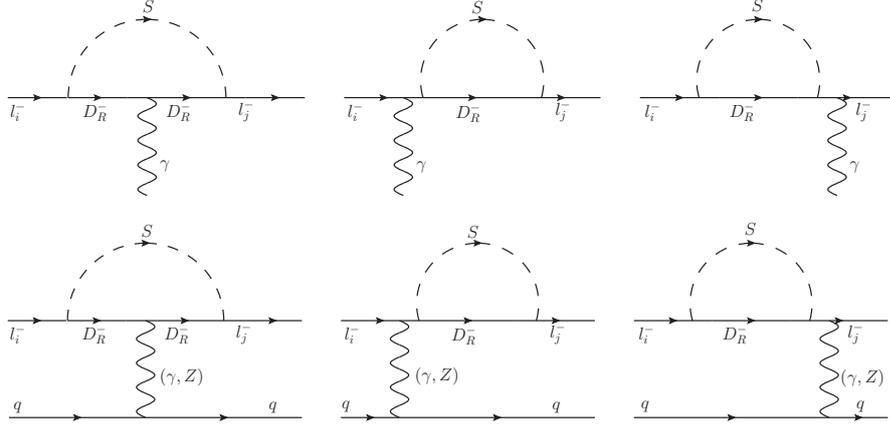
图 4.4 暗物质残余密度和直接探测实验 [51–62] 对暗物质 Higgs 耦合常数和残余密度的限制，其中 S 作为暗物质的候选者，Higgs 粒子的质量选为 125 GeV。

Figure 4.4 Constraints on the coupling and dark matter mass from dark matter relic density and direct detection [51–62] for S as the dark matter with Higgs mass set to be 125 GeV.

质的贡献将会占主导地位。它作为暗物质候选者粒子的性质与暗物质场 S 的性质类似。混合角参数在 10^{-3} 的数量级上与中微子质量和中微子混合的实验限制是可以兼容的。以上对模型中的新粒子可能作为暗物质粒子的选择及其作为暗物质粒子的具体动力学性质以及实验限制进行了分析讨论，下面对模型中新粒子诱导产生的粒子味破坏过程进行讨论分析。

4.4.2 轻子味破坏

对于中微子质量，两个参数 y_D 和 $\lambda_{\Delta\sigma H}$ 一起出现，但是对于带电轻子的单圈轻子味破坏过程只依赖于一个参数 y_D 。我们将研究 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ 和 $\mu - e$ 翻转过程对 y_D 的限制。轻子的辐射衰变过程 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ 可以通过单圈图产生如图 4.5 的上图所示。如果将辐射的光子换为 γ 和 Z 同时与夸克线连接可以直接诱导

图 4.5 轻子味破坏过程 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ (上图) 和 $l_i - l_j$ 翻转 (下图) 费曼图。Figure 4.5 Feynman diagrams for $l_i \rightarrow l_j \gamma$ (up) and $l_i - l_j$ conversion (down).

$\mu - e$ 翻转过程如图 4.5 的下图所示。对于我们的模型，轻子味破坏过程 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ 和 $l_i - l_j$ 翻转过程的拉氏量可以参数化为：

$$\mathcal{L} = - \bar{l}_j \sigma^{\mu\nu} (A_{Lji} P_L + A_{Rji} P_R) l_i F_{\mu\nu} + \left[\sum_q e Q_q \bar{q} \gamma^\mu q \bar{l}_j B_{Lji} \gamma_\mu P_L l_i + H.c. \right], \quad (4.31)$$

函数 $A_{L,R}$ 和 B_L 为：

$$\begin{aligned} A_{Lji} &= Y_{Djk} Y_{Dki}^* \frac{e}{32\pi^2} \frac{1}{m_S^2} F_D\left(\frac{M_k^2}{m_S^2}\right) m_j, \quad A_{Rji} = \frac{m_i}{m_j} A_{Lji}, \\ B_{Lji} &= Y_{Djk} Y_{Dki}^* \frac{e}{16\pi^2} \frac{1}{m_S^2} G_D\left(\frac{M_k^2}{m_S^2}\right), \\ F_D(z) &= \frac{z^2 - 5z - 2}{12(z-1)^3} + \frac{z \ln z}{2(z-1)^4}, \\ G_D(z) &= \frac{7z^3 - 36z^2 + 45z - 16 + 6(3z-2) \ln z}{36(1-z)^4}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

具体计算过程见附录 (D)。轻子味破坏过程 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ 衰变的分支比为：

$$B(l_i \rightarrow l_j \gamma) = \frac{48\pi^2}{G_F^2 m_i^2} (|A_{Lji}|^2 + |A_{Rji}|^2). \quad (4.33)$$

$\mu - e$ 转化率的可观测量为：

$$B_{\mu \rightarrow e}^A = \Gamma_{conv}^A / \Gamma_{capt}^A = \frac{\Gamma(\mu^- + A(N, Z) \rightarrow e^- + A(N, Z))}{\Gamma(\mu^- + A(N, Z) \rightarrow \nu_\mu + A(N+1, Z-1))} \quad (4.34)$$

为了得到 $\mu - e$ 转化率, 我们需要将夸克的贡献转化为相关的原子核的贡献。根据相关文献的理论计算 [63, 64], $\mu \rightarrow e\gamma$ 分支比和 $\mu - e$ 转化率有关系:

$$\frac{B_{\mu \rightarrow e}^A}{B(\mu \rightarrow e\gamma)} = R_{\mu \rightarrow e}^0(A) \left| 1 + \frac{\tilde{g}_{LV}^{(p)} V^{(p)}(A)}{A_R D(A)} + \frac{\tilde{g}_{LV}^{(n)} V^{(n)}(A)}{A_R D(A)} \right|^2, \quad (4.35)$$

这里

$$R_{\mu \rightarrow e}^0(A) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^2 \Gamma_{capt}^A} |D(A)|^2. \quad (4.36)$$

其中

$$\tilde{g}_{LV}^{(p)} = 2g_{LV(u)} + g_{LV(d)}, \tilde{g}_{LV}^{(n)} = g_{LV(u)} + 2g_{LV(d)}, g_{LV(q)} = -4eQ_q m_\mu B_L. \quad (4.37)$$

参数 $D(A)$, $V^{(p,n)}(A)$ 是依赖于原子核的参量 [63, 64]。采用模型中设定的基准参数, $B(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ 和 $\mu - e$ 转化率只依赖于耦合常数 y_D , 下面讨论实验数据对于耦合常数的限制。

虽然实验上还没有观测到 $\mu \rightarrow e\gamma$ 的过程, 但是对于分支比的上限, 实验上有强烈的限制。目前在置信度 90% 水平上的实验上限为 2.4×10^{-12} [65]。实验的灵敏度也在不断的改善。我们用 $B(\mu \rightarrow e\gamma) = 1 \times 10^{-13}$ 作为 MEG 实验即将到达的灵敏度来限制耦合常数 [66]。对于过程 $\tau \rightarrow \mu(e)\gamma$ 也有实验上的限制。目前, 置信度 95% 水平上的实验限制为 $B(\tau \rightarrow e\gamma) < 3.3 \times 10^{-8}$, $B(\tau \rightarrow \mu\gamma) < 4.4 \times 10^{-8}$ [67]。

实验上对于不同原子核的 $\mu - e$ 转化率也有了一些测量。最好的实验限制来自于 Au 原子核的测量, 在置信度 90% 水平上的实验上限为 $B_{\mu \rightarrow e}^{\text{Au}} < 7 \times 10^{-13}$ [68]。对于 Au 原子核, 文献给出了相关参数 [63]: $D(\text{Au}) = 0.189$, $V^{(p)}(\text{Au}) = 0.0974$, $V^{(n)}(\text{Au}) = 0.146$ 和 $R_{\mu \rightarrow e}^0(\text{Au}) = 0.0036$ 。同时, 也有一些平行的实验, 例如 Mu2E [69]/COMET [70] 用 Al 原子核来测量 $\mu - e$ 转化率。预期的灵敏度将会达到 10^{-16} [70]。对于 Al 原子核, 我们计算中的相关参数为 [63]: $D(\text{Al}) = 0.0362$, $V^{(p)}(\text{Al}) = 0.0161$, $V^{(n)}(\text{Al}) = 0.0173$ 和 $R_{\mu \rightarrow e}^0(\text{Al}) = 0.0026$ 。

实验对 y_D 的限制如图 4.6 所示。我们看到 $\mu \rightarrow e\gamma$ 和 Au 原子核 $\mu - e$ 转化的实验数据分别把 y_D 限制在小于 0.2 和 0.4 的范围内。将来的 $\mu - e$ 转化实验所达到的灵敏度所对应的 y_D 为 0.05。如果有更多的实验数据, 模型将受到更强的限制。 $\tau \rightarrow \mu(e)\gamma$ 对 y_D 的实验限制更弱。我们的分析显示在将来的实验中有可能观测到很大的轻子味破坏效应, 尤其对于 $\mu - e$ 转化实验。同时可以注意,

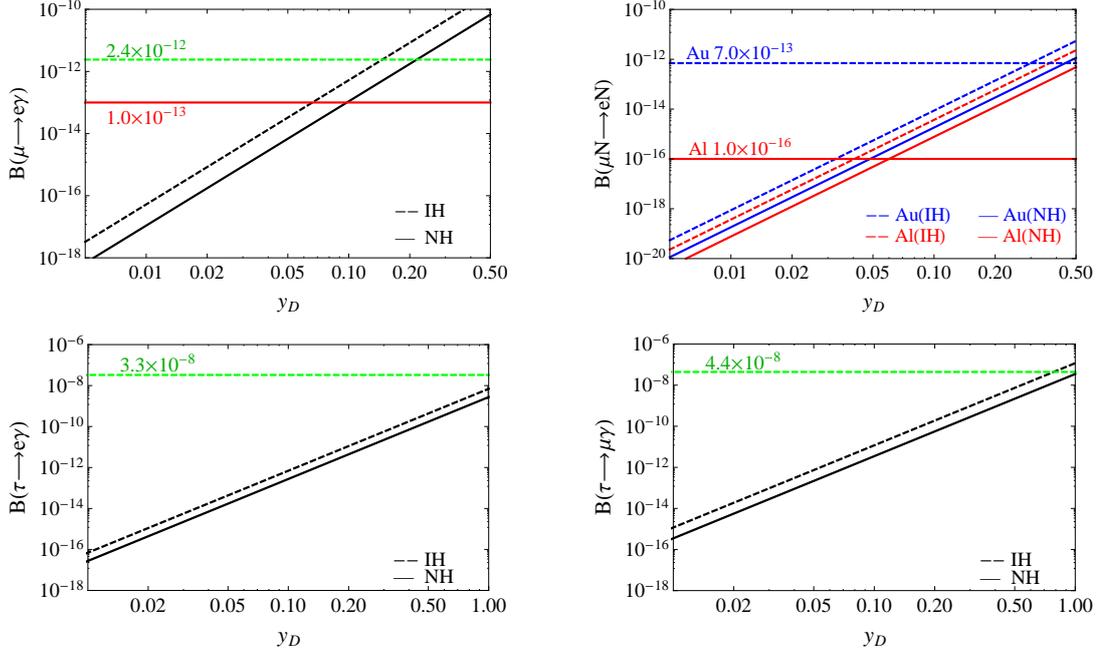


图 4.6 上图为目前实验(虚线)和将来的灵敏度(实线)对 $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ 和 $\mu - e$ 转化率中 y_D 的限制, 下图为 $\tau \rightarrow e\gamma$ (左侧) 和 $\tau \rightarrow \mu\gamma$ (右侧) 中 y_D 的实验限制, 其中 NH(实线) 和 IH(虚线) 对应于正常排序和反常排序。

Figure 4.6 Figures on the top show constraints on y_D from $B(\mu \rightarrow e\gamma)$ and $\mu - e$ conversion rate with current bound (dashed line) and future sensitivity (solid line) for normal(solid line) and inverted(dashed line) hierarchy. Figures at the bottom show constraints on y_D from $\tau \rightarrow e\gamma$ (left) and $\tau \rightarrow \mu\gamma$ (right).

仅通过轻子味破坏过程是无法排除我们的模型的。因为, 在 $U(1)_D$ 模型中有足够的参数空间允许有很大的或很小的轻子味破坏效应。例如, 中微子的质量的质量标度依赖于 $y_D \times \lambda_{\Delta\sigma H}$, 但是 $\lambda_{\Delta\sigma H}$ 不影响轻子味破坏过程。因此, 可以调节 $\lambda_{\Delta\sigma H}$ 的大小来使 y_D 满足轻子味破坏的实验限制。此外, 还有其它的过程将对模型进行额外的检验。下面讨论 Higgs 衰变到双光子过程的模型检验。

4.4.3 Higgs 衰变到双光子过程的新物理效应

LHC 上的实验小组发现了 Higgs 衰变到双光子的分支比与标准模型的预言有一定程度的偏离。实验上的观测值为 1.55 ± 0.3 (ATLAS) [71] 和 $0.78 \pm 0.27(1.11 \pm 0.31)$ (CMS) [72] 乘以标准模型的预言值。如果实验数据被进一步确定, 就需要超标准模型的新物理来给予解释。在 $U(1)_D$ 模型中, 标量场的三重态 Δ 有新的带电粒子 $\Delta^{\pm, 0}$, 它们和 Higgs 场有非零的耦合, 因此会对

$h \rightarrow \gamma\gamma$ 过程有新的贡献。在我们的模型中, 新引入的粒子都没有强相互作用, 因此 $gg \rightarrow h$ 的最低阶过程将不会受到影响。模型不会改变 Higgs 粒子在 LHC 上的产生率, 这也与目前标准模型的预言和实验数据保持一致。

h 到 $\Delta^{-,--}$ 的耦合来自于 $\lambda_{\Delta H}^{1,2}(\Delta^\dagger \Delta H^\dagger H)_{1,2}$, 在 H 对称性自发破坏后, $h\bar{\Delta}\Delta$ 的耦合为:

$$L \sim -[\lambda_{\Delta H}^1(\Delta^+\Delta^- + \Delta^{++}\Delta^{--}) + \lambda_{\Delta H}^2(\Delta^{++}\Delta^{--} + \frac{1}{2}\Delta^+\Delta^-)]vh. \quad (4.38)$$

结合 W 和 top 夸克的圈图贡献, $h \rightarrow \gamma\gamma$ 的衰变率通过新物理贡献的比例因子进行修正:

$$\begin{aligned} R_{\gamma\gamma} &= \frac{\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)_{U(1)_D}}{\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)_{SM}} = \left| 1 + \frac{v^2}{2} \frac{1}{A_1(\tau_W) + N_c Q_t^2 A_{1/2}(\tau_t)} \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{\lambda_{H\Delta}^1 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^2}{m_{\Delta^-}^2} A_0(\tau_{\Delta^-}) + \frac{4(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2)}{m_{\Delta^{--}}^2} A_0(\tau_{\Delta^{--}}) \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

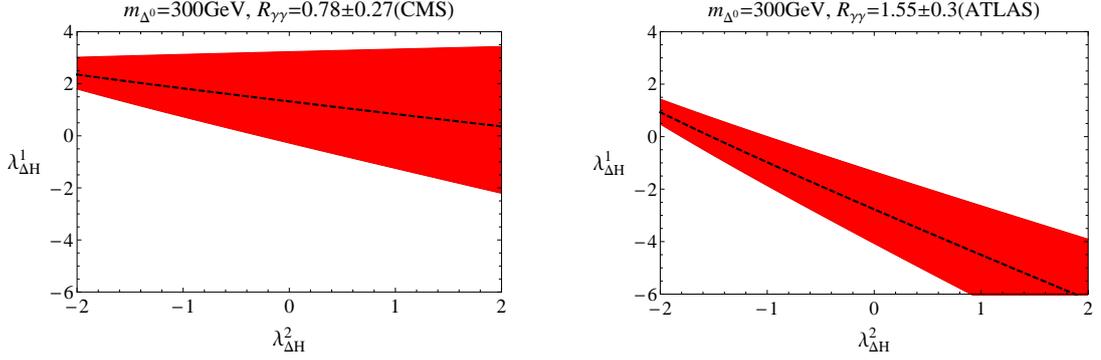
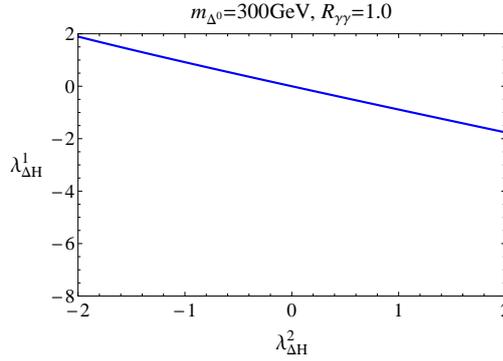
这里 $\tau_i \equiv (m_h^2/4m_i^2)$, $i = t, W, \Delta^-$ and Δ^{--} . N_c 是颜色自由度, Q_t 是 top 夸克的电荷。 $A_1(\tau_W)$ 和 $A_{1/2}(\tau_t)$ 分别来自于标准模型 W 玻色子和 top 夸克的贡献。 $A_0(\tau_{\Delta})$ 来自模型中新的标量粒子的贡献。它们为:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= -x^{-2}[x - f(x)]; \quad A_{1/2}(x) = 2x^{-2}[x + (x-1)f(x)]; \\ A_1(x) &= -x^{-2}[2x^2 + 3x + 3(2x-1)f(x)]; \\ f(x) &= \begin{cases} \arcsin^2 \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{4}[\ln \frac{1+\sqrt{1-x^{-1}}}{1-\sqrt{1-x^{-1}}} - i\pi]^2, & x < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

式 (4.39) 显示新物理的贡献依赖于耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 以及新的带电标量粒子的质量。标量粒子的质量依赖于若干参数。忽略 σ 和 Δ^0 的混合, 标量场三重态 Δ 粒子的质量为:

$$\begin{aligned} m_{\Delta^0}^2 &= \mu_{\Delta}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^1 v^2, \\ m_{\Delta^-}^2 &= \mu_{\Delta}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^1 v^2 + \frac{1}{4}\lambda_{H\Delta}^2 v^2, \\ m_{\Delta^{--}}^2 &= \mu_{\Delta}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^1 v^2 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^2 v^2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

为了分析实验数据, 我们选择 $m_{\Delta^0} = 300$ GeV 和模型参数的基准设定一致。不同的 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 将对 $R_{\gamma\gamma}$ 给出新的贡献。如图 4.7 和 4.8 所示。

图 4.7 耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^1$ 和 $\lambda_{H\Delta}^2$ 的实验限制, 其中 $m_{\Delta^0} = 300\text{GeV}$ 。Figure 4.7 Constraints on $\lambda_{H\Delta}^1$ and $\lambda_{H\Delta}^2$ with $m_{\Delta^0} = 300\text{GeV}$.图 4.8 耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^1$ 和 $\lambda_{H\Delta}^2$ 在 $R_{\gamma\gamma} = 1$ 时的关系限制, 其中, $m_{\Delta^0} = 300\text{GeV}$ 。Figure 4.8 Constraints on $\lambda_{H\Delta}^1$ and $\lambda_{H\Delta}^2$ with $R_{\gamma\gamma} = 1$ for $m_{\Delta^0} = 300\text{GeV}$.

我们也计算了过程 $h \rightarrow \gamma Z$ 的新贡献。 $U(1)_D$ 模型中 $h \rightarrow \gamma Z$ 衰变率与标准模型的比值为：

$$R_{Z\gamma} = \left| 1 - \frac{2v}{A_{SM}^{Z\gamma}} \left\{ \frac{g_{Z\Delta^-\Delta^-}(\lambda_{H\Delta}^1 + \frac{1}{2}\lambda_{H\Delta}^2)}{m_{\Delta^-}^2} A_0(z_{\Delta^-}, \lambda_{\Delta^-}) + \frac{2g_{Z\Delta^-\Delta^0}(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2)}{m_{\Delta^0}^2} A_0(z_{\Delta^0}, \lambda_{\Delta^0}) \right\} \right|^2 \quad (4.42)$$

这里 $z_i = 4m_i^2/m_h^2$, $\lambda_i \equiv 4m_i^2/m_Z^2$, $g_{Z\Delta\Delta} \equiv (T_\Delta^3 - Q_\Delta s_W^2)/s_W c_W$ 。 $A_{SM}^{Z\gamma}$ 来自于标准模型 W 玻色子和 top 夸克的贡献, 而 A_0 来自新粒子的贡献。它们分别为：

$$A_{SM} = \frac{2}{v} \left[\cot \theta_W A_1(z_W, \lambda_W) + N_c \frac{2Q_t(T_3^t - 2Q_t s_W^2)}{s_W c_W} A_{1/2}(z_t, \lambda_t) \right],$$

$$A_0(x, y) = I_1(x, y),$$

$$A_{1/2}(x, y) = I_1(x, y) - I_2(x, y),$$

$$A_1(x, y) = 4(3 - \tan^2 \theta_W) I_2(x, y) + [(1 + 2x^{-1}) \tan^2 \theta_W - (5 + 2x^{-1})] I_1(x, y),$$

这里 T_3^t 是 top 夸克同位旋第三分量, 其中 I_1, I_2 为:

$$I_1(x, y) = \frac{xy}{2(x-y)} + \frac{x^2y^2}{2(x-y)^2}[f(x^{-1}) - f(y^{-1})] + \frac{x^2y}{(x-y)^2}[g(x^{-1}) - g(y^{-1})],$$

$$I_2(x, y) = -\frac{xy}{2(x-y)}[f(x^{-1}) - f(y^{-1})],$$

$$g(x) = \sqrt{x^{-1} - 1} \arcsin \sqrt{x}.$$

在 $\lambda_{H\Delta}^i$ 允许的空间, $h \rightarrow \gamma Z$ 也有很大程度的改变。我们预言的比例因子 $R_{\gamma Z} = \Gamma(h \rightarrow \gamma Z)_{U(1)_D} / \Gamma(h \rightarrow \gamma Z)_{SM}$ 如图 4.9 和 4.10 所示。

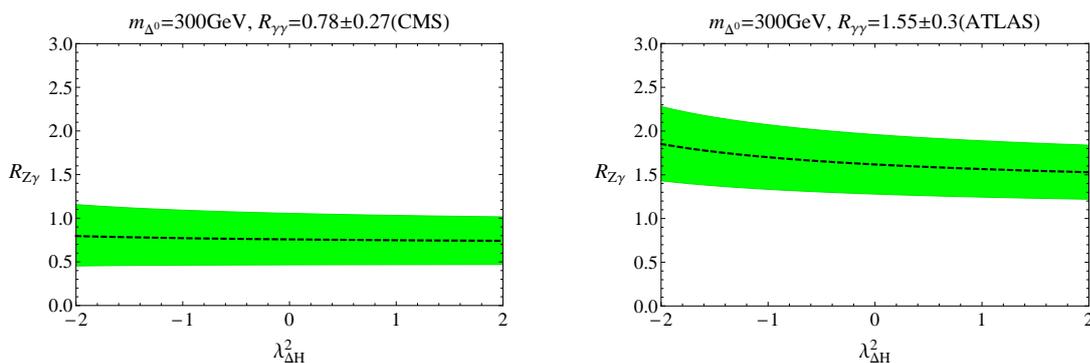


图 4.9 在 $h \rightarrow \gamma\gamma$ 同样的参数下对 $h \rightarrow Z\gamma$ 比例因子的预言。

Figure 4.9 Scaling factor for $h \rightarrow Z\gamma$ with the same parameters for $h \rightarrow \gamma\gamma$.

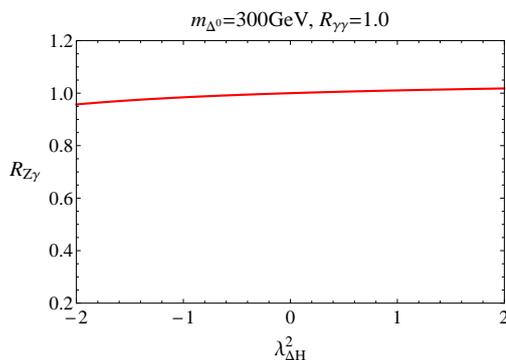


图 4.10 在 $R_{\gamma\gamma} = 1$ 时同样参数下 $h \rightarrow Z\gamma$ 比例因子的预言。

Figure 4.10 Scaling factor for $h \rightarrow Z\gamma$ with the same parameters for $R_{\gamma\gamma} = 1$.

我们可以看到 CMS 实验倾向于 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 都大于零, 而 ATLAS 实验倾向于 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 都小于零。这需要实验上的进一步确定。如果 $R_{\gamma\gamma} = 1$ 和标准模型预言的一致时, 在我们的模型中两个耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 会取相反的值, 这时新物理的贡献会抵消掉。通常地, $h \rightarrow \gamma\gamma$ 和 $h \rightarrow \gamma Z$ 之间是有一定的关联的, 增强的 $h \rightarrow \gamma\gamma$ 会

导致增强的 $h \rightarrow \gamma Z$ 。这个性质可以用来作模型的检验。同时我们可以看到当 $h \rightarrow \gamma\gamma$ 和标准模型一致时, $h \rightarrow \gamma Z$ 可以与标准模型不同。

对于耦合常数 $\lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 而言, 还有来自于 Higgs 势场平稳性的限制 [73], 在我们的模型中有足够多的参数可以保证势场的稳定性。势场有最小值是考虑标量场在取很大值时的相互作用势。我们考虑含有参数 $\lambda_H, \lambda_\Delta^{1,2}, \lambda_{H\Delta}^{1,2}$ 的情况, 这里 S 和 σ 先不做考虑。在 H 和 Δ 取很大值时, 相互作用势为:

$$\lambda_H x^2 + (\lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2 \eta) y^2 + (\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2 \xi) xy, \quad (4.43)$$

相互作用势的参数为 $x = H^\dagger H, y = \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta), \eta = \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta) / (\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta))^2$, 和 $\xi = (H^\dagger \Delta \Delta^\dagger H) / (H^\dagger H \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta))$ 。其中, η 和 ξ 的范围分别是 $1/2 \sim 1$ 和 $0 \sim 1$ 。

由上面的定义 x 和 y 都是大于零的, 要使势场满足正定性条件, λ_H 和 $(\lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2 \eta)$ 必须是正的。如果 $(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2 \xi)$ 大于零, 势场恒大于零, 自然满足条件。对于 $(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2 \xi) < 0$ 的情况, 就要求如下矩阵的对角元素和行列式大于零。

$$M_p = \begin{pmatrix} \lambda_H & (\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2 \xi)/2 \\ (\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2 \xi)/2 & \lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2 \eta \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

参数需要满足的条件为:

$$\begin{aligned} \lambda_H > 0, \quad \lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2 > 0, \quad \lambda_\Delta^1 + \frac{1}{2}\lambda_\Delta^2 > 0, \\ \lambda_H(\lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2) > \frac{1}{4}(\lambda_{H\Delta}^1)^2, \quad \lambda_H(\lambda_\Delta^1 + \lambda_\Delta^2) > \frac{1}{4}(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2)^2, \\ \lambda_H(\lambda_\Delta^1 + \frac{1}{2}\lambda_\Delta^2) > \frac{1}{4}(\lambda_{H\Delta}^1)^2, \quad \lambda_H(\lambda_\Delta^1 + \frac{1}{2}\lambda_\Delta^2) > \frac{1}{4}(\lambda_{H\Delta}^1 + \lambda_{H\Delta}^2)^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

在我们的模型中考虑标量场 S 和 σ 后情况就比较复杂, 我们选择正比于 $\lambda_{\Delta\sigma H}$ 的项取很小从而可以被忽略。相应的 M_p 矩阵就变为一个 4×4 的矩阵, 势场的平稳性条件要求对角元素, 行列式以及所有子矩阵的行列式都是正定的。在这种情况下, 新引入的独立参数有 $\lambda_{S,\sigma,H\sigma,HS,\Delta S,\Delta\sigma,\Delta S}$ 。我们有足够的参数空间来满足正定条件。

4.4.4 新粒子在 LHC 上的信号

在 $U(1)_D$ 模型中费米子二重态 D 和标量场三重态 Δ 都带有 $SU(2)_L$ 的荷, 因此可以在对撞机上通过质子质子对撞成对产生。下面就来讨论这些新粒子

在 LHC 上的信号。 $D^0\bar{D}^0$, D^0D^- 和 D^-D^+ 通过 Z , W^- , γ 和 Z 的 s 道湮灭在 LHC 上成对产生, 在模型的基准选择 M_D 在 500 GeV 左右产生截面在 $\mathcal{O}(10)$ fb 的量级。对于 $D^0\bar{D}^0$ 的产生, 由于 D^0 可以衰变到 νS , 因此它的信号与暗物质的信号类似, 都是通过初态夸克辐射出的光子或胶子和逸失能量寻找这种中性粒子。这样末态的信号就是高横动量的胶子或光子和逸失能量。CMS [74] 和 ATLAS [75] 实验已经在寻找暗物质成对产生的信号。实验上没有发现超出标准模型预言的额外的信号, 这样就可以利用暗物质候选者成对产生的性质来限制暗物质的质量。目前的实验数据不能排除 D^0 在几百个 GeV 的情况 [76]。

由于 D^- 将会衰变到 l^-S 。因此, D^0D^- 通过交换 W 对产生的信号可以通过 $pp \rightarrow l^- + E_T + X$ 来寻找。当然这个信号中会有来自 $W^- \rightarrow l^- \bar{\nu}$ 和 $W^-Z/W^- \rightarrow l^- \bar{\nu} \nu \bar{\nu}$ 的标准模型本底。额外地, 轻子衰变的 W^+W^- 产生过程也是有可能对本底有一定的贡献。这是因为当有一个带电轻子 (这里是 l^+) 动量太小或者太软, 将不会被探测器探测到, 所以 W^+W^- 的末态信号会对本底有一定的影响。为了降低标准模型的本底影响而找到新粒子的信号, 我们可以对轻子的横动量 p_T^l 做截断。在 LHC 上积分亮度为 $20fb^{-1}$ 质心系能量为 8 TeV 的情况下进行恒动量截断很难压低标准模型的本底而有足够多的新粒子信号。我们发现在质心系能量 14 TeV 积分亮度为 $300fb^{-1}$ 可以有置信度水平 5σ 的一个新粒子的信号。在表 4.1 中我们给出了截断区域 $p_T^l > 120$ GeV 的产生截面。这样的选择是因为在这个横动量截断区域可以有统计上 5σ 水平的信号。如果有更高横动量的截断, 可以有更高的置信度, 但是事例数相对较少。在这个截断下, 信号有轻微的减弱而本底被有效的压低了。在我们的信号计算当中, 我们选择 D 二重态几乎有简并的质量而其他参数采用模型的基准设定。具体计算过程可以参考附录 E 中。在窄宽度近似下, 新粒子信号的截面正比于 $\sum_i (Y_D^{li} Y_D^{li*} / \sum_l Y_D^{li} Y_D^{li*})$ 。因此, $pp \rightarrow l^- + E_T + X$ 的截面依赖于 y_D , 由于轻子味破坏过程的限制, 计算中我们选择 $y_D = 0.1$ 。 D^-D^+ 对产生的信号为 l^-l^+ 和逸失能量, 由于末态有双轻子, 分析就更加复杂, 这里不进行讨论。在表 4.1 中给出了质心系能量 14 TeV 积分亮度为 $300fb^{-1}$ 的新粒子信号的截面, 对于正常和反常排序都可以有置信度水平 5σ 的信号, 因此实验上可以用 $pp \rightarrow l^- + E_T + X$ 来寻找新粒子的信号。

对标量场三重态 Δ 可以通过与 D 类似的过程在 LHC 上产生。当 $\lambda_{H\Delta}^2 < 0$ 时, Δ^{--} 是 Δ 三重态中最轻的粒子, 当 $2m_S$ 的质量大于 Δ 粒子的质量时, 它可以保持稳定, 就是说 $\Delta^{--} \rightarrow D^-D^- \rightarrow l^-Sl^-S$ 的过程是运动学禁戒的。这与我们模型中参数设定的情况一致。当 Δ^{--} 的质量在几百个 GeV 的量级

表 4.1 新粒子信号的产生截面与标准模型本底对比, 其中包含带电轻子 e^- 和 μ^- 的贡献, $M_D = 500\text{GeV}$, $m_S = 150\text{ GeV}$ 。

	信号[fb](NH 和 IH)		本底[fb]		
	$\sigma(pp \rightarrow D^0 Sl^-)$		$\sigma(l^- \bar{\nu})$	$\sigma(l^- \bar{\nu} \nu \bar{\nu})$	$\sigma(W^+ W^-)$
14 TeV	11.1	14.2	8.67×10^6	345.3	1856
$p_T^l > 120\text{ GeV}$	9.66	12.3	1080	6.78	26

时, 它在 LHC 上的产生截面大约为 10 fb。虽然它不能衰变到标准模型粒子使得直接探测变得十分困难, 但是作为重的带电的稳定粒子, 它将会在探测器上留一些径迹, LHC 上已经在寻找这种信号 [77, 78]。如果 Δ^{--} 的质量足够大, 当 $\Delta^{--} \rightarrow D^- D^- \rightarrow l^- Sl^- S$ 的过程是运动学上允许的, $l^- l^- + E_T +$ 喷注, 将是新粒子的信号, 这种信号有较低的标准模型本底可以在 LHC 进行寻找。当 $\lambda_{H\Delta}^2 > 0$ 时, Δ^0 是 Δ 三重态中最轻的粒子。这种中性的标量粒子可以在 LHC 充分地产生, 因为它的质量只有几百个 GeV。它的信号与暗物质的信号类似, 可以通过单光子和逸失能量或单喷注和逸失能量来寻找这种新粒子的信号 [74, 75]。目前, CMS 和 ATLAS 实验已经对此信号进行了一些分析, 但是实验数据没有很强的限制来排除我们的参数空间。

4.5 本章小结

本章针对超标准模型的中微子质量产生和暗物质粒子以及它们之间的相互联系问题进行了研究分析。简要介绍了各种多种暗物质粒子模型以及各种中微子产生机制, 提出通过辐射的两圈 Inverse seesaw 机制来产生中微子质量, 其中可以自然地包含暗物质粒子。并对其中的 $U(1)_D$ 模型的各种现象学暗示进行了讨论, 模型可以把新物理的能标压低到几百个 GeV 的量级, 可以给实验提供更好的观测可能。模型中的新粒子和标准模型粒子可以有很大的 Yukawa 耦合, 这将会带来很大的轻子味破坏效应, 这将有待于今后实验的进一步检验。新的带电的标量粒子对 Higgs 衰变到双光子的过程有新的贡献, 可以解释实验和标准模型之间的偏差。同时也分析模型中预言的新粒子在 LHC 上的信号。

参考文献

- [1] Hu B.Z., “New Results from the Daya Bay Reactor Neutrino Experiment”, 2014, arXiv:1402.6439 [hep-ex].

- [2] An F. *et al.*, “Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 171803, [arXiv:1203.1669[hep-ex]].
- [3] Minkowski P., “ $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?”, *Phys. Lett.*, 1977, **B67**, 421.
- [4] Yanagida T., “HORIZONTAL SYMMETRY AND MASSES OF NEUTRINOS”, *Conf. Proc.*, 1979, **C7902131**, 95–99.
- [5] Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R., “Complex Spinors and Unified Theories”, *Conf. Proc.*, 1979, **C790927**, 315–321, [arXiv:1306.4669[hep-th]].
- [6] Glashow S., “The Future of Elementary Particle Physics”, *NATO Adv. Study Inst. Ser. B Phys.*, 1980, **59**, 687.
- [7] Mohapatra R.N. Senjanovic G., “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Violation”, *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, 912.
- [8] Konetschny W. Kummer W., “Nonconservation of Total Lepton Number with Scalar Bosons”, *Phys. Lett.*, 1977, **B70**, 433.
- [9] Cheng T. Li L.F., “Neutrino Masses, Mixings and Oscillations in SU(2) x U(1) Models of Electroweak Interactions”, *Phys. Rev.*, 1980, **D22**, 2860.
- [10] Mohapatra R.N. Senjanovic G., “Neutrino Masses and Mixings in Gauge Models with Spontaneous Parity Violation”, *Phys. Rev.*, 1981, **D23**, 165.
- [11] Foot R., Lew H., He X., *et al.*, “Seesaw Neutrino Masses Induced by a Triplet of Leptons”, *Z. Phys.*, 1989, **C44**, 441.
- [12] Mohapatra R., “Mechanism for Understanding Small Neutrino Mass in Superstring Theories”, *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**, 561–563.
- [13] Mohapatra R. Valle J., “Neutrino Mass and Baryon Number Nonconservation in Superstring Models”, *Phys. Rev.*, 1986, **D34**, 1642.
- [14] Gonzalez Felipe R., Joaquim F., Nobre B., “Radiatively induced leptogenesis in a minimal seesaw model”, *Phys. Rev.*, 2004, **D70**, 085009, [arXiv:hep-ph/0311029].

- [15] Berezhiani Z. Rattazzi R., “Universal seesaw and radiative quark mass hierarchy”, *Phys. Lett.*, 1992, **B279**, 124–130.
- [16] Ma E., “Verifiable radiative seesaw mechanism of neutrino mass and dark matter”, *Phys. Rev.*, 2006, **D73**, 077301, [arXiv:hep-ph/0601225].
- [17] Gibbons G. Hawking S., “Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation”, *Phys. Rev.*, 1977, **D15**, 2738–2751.
- [18] Weinberg S., “The Cosmological Constant Problem”, *Rev. Mod. Phys.*, 1989, **61**, 1–23.
- [19] Bertone G., Hooper D., Silk J., “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints”, *Phys. Rept.*, 2005, **405**, 279–390, [arXiv:hep-ph/0404175].
- [20] Drees M., “Particle dark matter physics: An Update”, *Pramana*, 1998, **51**, 87–106, [arXiv:hep-ph/9804231].
- [21] Abazajian K., Fuller G.M., Patel M., “Sterile neutrino hot, warm, and cold dark matter”, *Phys. Rev.*, 2001, **D64**, 023501, [arXiv:astro-ph/0101524].
- [22] Shi X.D. Fuller G.M., “A New dark matter candidate: Nonthermal sterile neutrinos”, *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**, 2832–2835, [arXiv:astro-ph/9810076].
- [23] Turner M.S., “Windows on the Axion”, *Phys. Rept.*, 1990, **197**, 67–97.
- [24] Jungman G., Kamionkowski M., Griest K., “Supersymmetric dark matter”, *Phys. Rept.*, 1996, **267**, 195–373, [arXiv:hep-ph/9506380].
- [25] Agashe K. Servant G., “Warped unification, proton stability and dark matter”, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**, 231805, [arXiv:hep-ph/0403143].
- [26] Birkedal-Hansen A. Wacker J.G., “Scalar dark matter from theory space”, *Phys. Rev.*, 2004, **D69**, 065022, [arXiv:hep-ph/0306161].
- [27] Chung D.J., Kolb E.W., Riotto A., “Superheavy dark matter”, *Phys. Rev.*, 1999, **D59**, 023501, [arXiv:hep-ph/9802238].

- [28] Kusenko A., Kuzmin V., Shaposhnikov M.E., *et al.*, “Experimental signatures of supersymmetric dark matter Q balls”, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**, 3185–3188, [arXiv:hep-ph/9712212].
- [29] Foot R., “Implications of the DAMA and CRESST experiments for mirror matter type dark matter”, *Phys. Rev.*, 2004, **D69**, 036001, [arXiv:hep-ph/0308254].
- [30] Spergel D.N. Steinhardt P.J., “Observational evidence for selfinteracting cold dark matter”, *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**, 3760–3763, [arXiv:astro-ph/9909386].
- [31] Feng J.L., Rajaraman A., Takayama F., “Superweakly interacting massive particles”, *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**, 011302, [arXiv:hep-ph/0302215].
- [32] Silveira V. Zee A., “SCALAR PHANTOMS”, *Phys. Lett.*, 1985, **B161**, 136.
- [33] Burgess C., Pospelov M., ter Veldhuis T., “The Minimal model of nonbaryonic dark matter: A Singlet scalar”, *Nucl. Phys.*, 2001, **B619**, 709–728, [arXiv:hep-ph/0011335].
- [34] He X.G., Li T., Li X.Q., *et al.*, “Constraints on Scalar Dark Matter from Direct Experimental Searches”, *Phys. Rev.*, 2009, **D79**, 023521, [arXiv:0811.0658[hep-ph]].
- [35] He X.G., Li T., Li X.Q., *et al.*, “Scalar dark matter effects in Higgs and top quark decays”, *Mod. Phys. Lett.*, 2007, **A22**, 2121–2129, [arXiv:hep-ph/0701156].
- [36] Kolb E. Turner M., *The Early Universe*, Westview Press, Boulder, 1990.
- [37] Weinberg S., “Larger Higgs Exchange Terms in the Neutron Electric Dipole Moment”, *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **63**, 2333.
- [38] Guo G., He X.G., Li G.N., “Radiative Two Loop Inverse Seesaw and Dark Matter”, *JHEP*, 2012, **1210**, 044, [arXiv:1207.6308[hep-ph]].

- [39] Li G.N., Guo G., Ren B., *et al.*, “Lepton number violation and $h \rightarrow \gamma\gamma$ in a radiative inverse seesaw dark matter model”, JHEP, 2013, **1304**, 026, [arXiv:1212.5528[hep-ph]].
- [40] Chen J.H., He X.G., Tandean J., *et al.*, “Effect on Higgs Boson Decays from Large Light-Heavy Neutrino Mixing in Seesaw Models”, Phys. Rev., 2010, **D81**, 113004, 1001.5215.
- [41] Pilaftsis A., “Resonant tau-leptogenesis with observable lepton number violation”, Phys. Rev. Lett., 2005, **95**, 081602, [arXiv:hep-ph/0408103].
- [42] Ma E., “Radiative inverse seesaw mechanism for nonzero neutrino mass”, Phys. Rev., 2009, **D80**, 013013, [arXiv:0904.4450[hep-ph]].
- [43] Zee A., “Quantum Numbers of Majorana Neutrino Masses”, Nucl. Phys., 1986, **B264**, 99.
- [44] Babu K., “Model of ‘Calculable’ Majorana Neutrino Masses”, Phys. Lett., 1988, **B203**, 132.
- [45] Law S.S. McDonald K.L., “Inverse seesaw and dark matter in models with exotic lepton triplets”, Phys. Lett., 2012, **B713**, 490–494, [arXiv:1204.2529[hep-ph]].
- [46] Fogli G., Lisi E., Marrone A., *et al.*, “Global analysis of neutrino masses, mixings and phases: entering the era of leptonic CP violation searches”, Phys. Rev., 2012, **D86**, 013012, [arXiv:1205.5254[hep-ph]].
- [47] Tucker-Smith D. Weiner N., “Inelastic dark matter”, Phys. Rev., 2001, **D64**, 043502, [arXiv:hep-ph/0101138].
- [48] McDonald J., “Gauge singlet scalars as cold dark matter”, Phys. Rev., 1994, **D50**, 3637–3649, [arXiv:hep-ph/0702143].
- [49] Aad G. *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”, Phys. Lett., 2012, **B716**, 1–29, [arXiv:1207.7214[hep-ex]].

- [50] Chatrchyan S. *et al.*, “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”, *Phys. Lett.*, 2012, **B716**, 30–61, [arXiv:1207.7235[hep-ex]].
- [51] Angle J. *et al.*, “A search for light dark matter in XENON10 data”, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **107**, 051301, [arXiv:1104.3088[astro-ph.CO]].
- [52] Aprile E. *et al.*, “Dark Matter Results from 225 Live Days of XENON100 Data”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **109**, 181301, [arXiv:1207.5988[astro-ph.CO]].
- [53] Ahmed Z. *et al.*, “Dark Matter Search Results from the CDMS II Experiment”, *Science*, 2010, **327**, 1619–1621, [arXiv:0912.3592[astro-ph.CO]].
- [54] Agnese R. *et al.*, “Silicon detector results from the first five-tower run of CDMS II”, *Phys. Rev.*, 2013, **D88**, 031104, [arXiv:1304.3706[astro-ph.CO]].
- [55] Felizardo M., Girard T., Morlat T., *et al.*, “Final Analysis and Results of the Phase II SIMPLE Dark Matter Search”, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, **108**, 201302, [arXiv:1106.3014[astro-ph.CO]].
- [56] Armengaud E. *et al.*, “A search for low-mass WIMPs with EDELWEISS-II heat-and-ionization detectors”, *Phys. Rev.*, 2012, **D86**, 051701, [arXiv:1207.1815[astro-ph.CO]].
- [57] Li H. *et al.*, “Limits on spin-independent couplings of WIMP dark matter with a p-type point-contact germanium detector”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**(26), 261301, [arXiv:1303.0925[hep-ex]].
- [58] Savage C., Gelmini G., Gondolo P., *et al.*, “Compatibility of DAMA/LIBRA dark matter detection with other searches”, *JCAP*, 2009, **0904**, 010, [arXiv:0808.3607[astro-ph]].
- [59] Angloher G., Bauer M., Bavykina I., *et al.*, “Results from 730 kg days of the CRESST-II Dark Matter Search”, *Eur. Phys. J.*, 2012, **C72**, 1971, [arXiv:1109.0702[astro-ph.CO]].

- [60] Aalseth C. *et al.*, “CoGeNT: A Search for Low-Mass Dark Matter using p-type Point Contact Germanium Detectors”, *Phys. Rev.*, 2013, **D88**(1), 012002, [[arXiv:1208.5737\[astro-ph.CO\]](#)].
- [61] Agnese R. *et al.*, “Silicon Detector Dark Matter Results from the Final Exposure of CDMS II”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **111**, 251301, [[arXiv:1304.4279\[hep-ex\]](#)].
- [62] Akerib D. *et al.*, “First results from the LUX dark matter experiment at the Sanford Underground Research Facility”, 2013, [[arXiv:1310.8214\[astro-ph.CO\]](#)].
- [63] Kitano R., Koike M., Okada Y., “Detailed calculation of lepton flavor violating muon electron conversion rate for various nuclei”, *Phys. Rev.*, 2002, **D66**, 096002, [[arXiv:hep-ph/0203110](#)].
- [64] Deshpande N., Enkhbat T., Fukuyama T., *et al.*, “ $\mu - e$ Conversion With Four Generations”, *Phys. Lett.*, 2011, **B703**, 562–566, [[arXiv:1106.5085\[hep-ph\]](#)].
- [65] Adam J. *et al.*, “New limit on the lepton-flavour violating decay $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, **107**, 171801, 1107.5547.
- [66] Baldini, A and Mori, T and others, “The MEG experiment: search for the $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ decay at PSI”, Research proposal to INFN, 2002.
- [67] Beringer J. *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP)”, *Phys. Rev.*, 2012, **D86**, 010001.
- [68] Bertl W.H. *et al.*, “A Search for muon to electron conversion in muonic gold”, *Eur. Phys. J.*, 2006, **C47**, 337–346.
- [69] Carey R. *et al.*, “Proposal to search for $\mu^- N \rightarrow e^- N$ with a single event sensitivity below 10^{-16} ”, FERMILAB-PROPOSAL-0973, 2008.
- [70] Cui Y. *et al.*, “Conceptual design report for experimental search for lepton flavor violating $\mu^- - e^-$ conversion at sensitivity of 10^{-16} with a slow-extracted bunched proton beam (COMET)”, KEK-2009-10, 2009.

- [71] Aad G. *et al.*, “Measurements of Higgs boson production and couplings in diboson final states with the ATLAS detector at the LHC”, *Phys. Lett.*, 2013, **B726**, 88–119, [arXiv:1307.1427[hep-ex]].
- [72] CMS collaboration, “Updated measurements of the Higgs boson at 125 GeV in the two photon decay channel”, CMS-PAS-HIG-13-001, 2013.
- [73] Arhrib A., Benbrik R., Chabab M., *et al.*, “The Higgs Potential in the Type II Seesaw Model”, *Phys. Rev.*, 2011, **D84**, 095005, [arXiv:1105.1925[hep-ph]].
- [74] Chatrchyan S. *et al.*, “Search for dark matter and large extra dimensions in monojet events in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV”, *JHEP*, 2012, **1209**, 094, [arXiv:1206.5663[hep-ex]].
- [75] Aad G. *et al.*, “Search for dark matter candidates and large extra dimensions in events with a photon and missing transverse momentum in pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector”, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, **110**, 011802, [arXiv:1209.4625[hep-ex]].
- [76] Goodman J., Ibe M., Rajaraman A., *et al.*, “Constraints on Dark Matter from Colliders”, *Phys. Rev.*, 2010, **D82**, 116010, [arXiv:1008.1783[hep-ph]].
- [77] Aad G. *et al.*, “Search for Heavy Long-Lived Charged Particles with the ATLAS detector in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV”, *Phys. Lett.*, 2011, **B703**, 428–446, [arXiv:1106.4495[hep-ex]].
- [78] Chatrchyan S. *et al.*, “Search for heavy long-lived charged particles in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV”, *Phys. Lett.*, 2012, **B713**, 408–433, [arXiv:1205.0272[hep-ex]].

第五章 总结

本文主要对夸克轻子味物理及暗物质领域相关问题进行了分析和探讨。味物理方面,研究夸克轻子味混合的参数化问题,提出了参数化 CKM 矩阵的新方法,对带电 B 介子的三体非轻衰变过程进行了味对称性分析,成功地解释了相关实验数据。轻子味物理中的中微子质量产生以及轻子味破坏过程和新物理现象密切相关,暗物质粒子也是新物理研究的热点,本文通过建立辐射的翻转跷跷板机制下的暗物质模型把中微子和暗物质这两种超标准模型现象有机的结合在一起,并最大限度的压低了新物理的能标,对模型中的一系列超标准模型现象进行了探索。主要得到了以下结论与启示:

(1) 在夸克味混合通常的参数化方式中,味空间的转动角和 CP 破坏的相角都是参数化依赖的,而且不是直接的实验可观测量。本文提出了一种解决这个问题的办法,采用幺正三角形中实验可观测的 α, β, γ 角作为 CP 破坏的相角,构造出参数化 CKM 矩阵的新形式,对于每种 α, β, γ 参数化都有四种参数化方式,可以证明所有不同的参数化形式都是等价的。我们也研究了通常的味空间转动角参数化方式和 α, β, γ 参数化之间的联系,发现不能使用三个转动角和把 α, β, γ 中的一个相角直接作为 CP 破坏相角来参数化 CKM 矩阵,然而转动角参数化方式中的 CP 破坏相角和 α, β, γ 角是非常接近的。 α, β, γ 参数化是 CKM 矩阵的参数化独立的表示。我们也得到了新的类 Wolfenstein 参数化展开。基于目前实验上对 β 角的更为精确的测量, β 参数化是所有参数化方式的最佳选择。同时,本文提出了重新参数化不变的夸克轻子互补性关系,采用夸克轻子混合矩阵的矩阵元来表示夸克轻子互补性关系,解决了夸克轻子互补性关系参数化依赖的问题。随着实验的进一步精确测量,将会得到更加准确的参数化形式。夸克轻子味混合的一直都是理论研究的热点,在参数化研究基础上也可以尝试通过相关味对称分析,从更深层次上解释夸克轻子味混合参数化形式背后的物理根源。

(2) 在带电 B 介子到轻子介子的三体非轻衰变过程中,强相互作用和弱相互作用相互干扰,衰变过程相对复杂,使得理论上对于强子矩阵元的计算具有很大的不确定性,夸克味对称性是个很好的分析手段。本文中我们采用 $SU(3)$ 对称性和 U 旋对称性对 B^+ 到 $\pi^+K^+K^-, \pi^+\pi^+\pi^-, K^+K^+K^-$ 和 $K^+\pi^+\pi^-$ 的衰变分支比和 CP 非对称性进行了分析。通过系统的方法建立了衰变振幅的非

共振态贡献,得到了对称性守恒,对称性破坏和动量依赖项的振幅形式。分析发现 $SU(3)$ 和 U 旋对称性背景下的衰变振幅具有相同的形式, U 旋对称性的表示更为简洁,但是 $SU(3)$ 对称性分析可以应用到一些中性介子的类似衰变过程中。由于 $SU(3)$ 和 U 旋对称性预言和实验数据严重不符,因此通过数值分析,考虑了对称性破坏以及动量依赖项的贡献后,可以很好的解释实验数据,但是需要很大的对称性破坏效应。在现象学水平上,这个问题还没有很好的物理解释,各种理论模型的计算也发现很大的修正。我们希望将来通过格点规范理论的进一步计算分析可以对这个问题有更加全面的理解。随着目前 LHCb 实验以及各种 B 介子工厂实验数据的进一步积累将会对这些衰变过程给出更多的信息,这将有助于我们更为全面的分析这些衰变的物理过程及动力学机制。

(3) 中微子质量起源和暗物质粒子一直都是超标准模型新物理领域理论关注的焦点。在本文中,我们建立了辐射的翻转跷跷板机制下的暗物质模型,通过两圈的 Inverse seesaw 机制使中微子产生质量,自然地包含暗物质粒子,把新物理的能标压低至百个 GeV 的量级,为实验上寻找新物理的信号提供了更大的可能性。其中,得到了有效的 Inverse seesaw 形式下得中微子质量矩阵形式,解释了关于中微子质量和中微子混合的实验数据。分析了模型中新粒子作为暗物质粒子的可能,并分析了其作为 Higgs 通道的暗物质粒子的基本性质,预测了暗物质直接探测实验中暗物质粒子与核子的相互作用截面,模型有一定的实验存在空间。模型中的新粒子通过 Yukawa 耦合与标准模型的轻子发生相互作用,可以诱导轻子味破坏过程的发生,利用目前的 $\mu \rightarrow e\gamma$ 和 $\mu - e$ 转化实验数据对 Yukawa 耦合常数进行了限制,允许较大的 Yukawa 耦合常数存在。模型中新引入的标量场三重态可以在很大程度上修正 $h \rightarrow \gamma\gamma$ 过程的衰变分支比,从而很好地解释了目前实验数据与标准模型预言的偏离。讨论了模型中的新粒子在 LHC 的可能的信号,目前 CMS 和 ATLAS 实验小组对新粒子信号的实验分析对模型中的参数空间没有很强的限制。随着 LHC 亮度的进一步提高、将来轻子味破坏实验灵敏度的进一步提高、中微子震荡实验数据的不断积累、以及暗物质直接探测实验的不断进行将会对模型的参数进行进一步的限制并对模型进行进一步的检验。

随着理论和实验的不断发展,我们可以对粒子物理的标准模型进行更加精确的检验,而且对标准模型中存在的问题会有更加全面的理解,相信会有更多的超标准模型现象可以被理论成功解释,我们对于粒子物理规律的认识会更加全面和深刻。

附录 A α, β, γ 参数化表示

α, β, γ 参数化的 12 种参数化形式:

$$V_{CKM}^{\alpha_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & -\frac{(|V_{us}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{ud}| + |V_{ub}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha}}{|V_{us}||V_{cd}|} & \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & \frac{|V_{ub}||V_{tb}|e^{-i\alpha} - |V_{ud}||V_{td}|}{|V_{us}|} & -|V_{tb}|e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$V_{CKM}^{\alpha_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha} - |V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{cb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{cb}|^2)|V_{ub}| - |V_{ud}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{us}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{i\alpha} & \frac{|V_{ud}||V_{td}|e^{i\alpha} - |V_{ub}||V_{tb}|}{|V_{us}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$V_{CKM}^{\alpha_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{td}| - |V_{tb}||V_{ub}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}|} & -|V_{ub}|e^{i\alpha} \\ |V_{cd}| & \frac{(|V_{tb}|^2 - |V_{cd}|^2)|V_{td}| - |V_{ub}||V_{ud}||V_{tb}|e^{i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cd}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\alpha} - |V_{td}||V_{tb}|}{|V_{cd}|} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$V_{CKM}^{\alpha_4} = \begin{pmatrix} -|V_{ud}|e^{-i\alpha} & -\frac{|V_{ub}||V_{tb}| - |V_{td}||V_{ud}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}|} & |V_{ub}| \\ -\frac{|V_{td}||V_{tb}| - |V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{cb}|} & -\frac{(|V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2)|V_{tb}| + |V_{ud}||V_{td}||V_{ub}|e^{-i\alpha}}{|V_{ts}||V_{cb}|} & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$V_{CKM}^{\beta_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2 - |V_{cb}|^2)|V_{cd}| + |V_{cb}||V_{td}||V_{tb}|e^{i\beta}}{|V_{cs}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{cb}||V_{cd}| - |V_{td}||V_{tb}|e^{i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{i\beta} - |V_{cd}||V_{td}|}{|V_{cs}|} & -|V_{tb}|e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$V_{CKM}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{|V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta}-|V_{cb}||V_{cd}|}{|V_{ub}|} & \frac{(|V_{cd}|^2-|V_{ub}|^2)|V_{cb}|-|V_{cd}||V_{td}||V_{tb}|e^{-i\beta}}{|V_{cs}||V_{ub}|} & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ -|V_{td}|e^{-i\beta} & \frac{|V_{cd}||V_{td}|e^{-i\beta}-|V_{cb}||V_{tb}|}{|V_{cs}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$V_{CKM}^{\beta_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{(|V_{ud}|^2-|V_{tb}|^2)|V_{td}|+|V_{tb}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\beta}}{|V_{ts}||V_{ud}|} & -\frac{|V_{td}||V_{tb}|-|V_{cb}||V_{cd}|e^{-i\beta}}{|V_{ud}|} \\ |V_{cd}| & \frac{|V_{cb}||V_{tb}|e^{-i\beta}-|V_{cd}||V_{td}|}{|V_{ts}|} & -|V_{cb}|e^{-i\beta} \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$V_{CKM}^{\beta_4} = \begin{pmatrix} -\frac{|V_{td}||V_{tb}|-|V_{cb}||V_{cd}|e^{i\beta}}{|V_{ub}|} & -\frac{(|V_{ub}|^2-|V_{td}|^2)|V_{tb}|+|V_{td}||V_{cb}||V_{cd}|e^{i\beta}}{|V_{ts}||V_{ub}|} & |V_{ub}| \\ -|V_{cd}|e^{i\beta} & -\frac{|V_{cb}||V_{tb}|-|V_{cd}||V_{td}|e^{i\beta}}{|V_{ts}|} & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$V_{CKM}^{\gamma_1} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & -\frac{|V_{ud}||V_{cd}|-|V_{ub}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{us}|} & -|V_{cb}|e^{i\gamma} \\ |V_{td}| & \frac{(|V_{ub}|^2-|V_{td}|^2)|V_{ud}|-|V_{ub}||V_{cd}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{us}||V_{td}|} & -\frac{|V_{ud}||V_{ub}|-|V_{cd}||V_{cb}|e^{i\gamma}}{|V_{td}|} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

$$V_{CKM}^{\gamma_2} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ -|V_{cd}|e^{-i\gamma} & \frac{|V_{ud}||V_{cd}|e^{-i\gamma}-|V_{ub}||V_{cb}|}{|V_{us}|} & |V_{cb}| \\ \frac{|V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\gamma}-|V_{ud}||V_{ub}|}{|V_{tb}|} & \frac{(|V_{ud}|^2-|V_{tb}|^2)|V_{ub}|-|V_{ud}||V_{cd}||V_{cb}|e^{-i\gamma}}{|V_{us}||V_{tb}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$V_{CKM}^{\gamma_3} = \begin{pmatrix} |V_{ud}| & -\frac{|V_{ud}||V_{cd}|-|V_{ub}||V_{cb}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}|} & -|V_{ub}|e^{-i\gamma} \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & \frac{(|V_{cb}|^2-|V_{td}|^2)|V_{cd}|-|V_{cb}||V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma}}{|V_{cs}||V_{td}|} & \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{-i\gamma}-|V_{cd}||V_{cb}|}{|V_{td}|} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$V_{CKM}^{\gamma_4} = \begin{pmatrix} -|V_{ud}|e^{i\gamma} & \frac{|V_{ud}||V_{cd}|e^{i\gamma}-|V_{ub}||V_{cb}|}{|V_{cs}|} & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ \frac{|V_{ud}||V_{ub}|e^{i\gamma}-|V_{cd}||V_{cb}|}{|V_{tb}|} & \frac{(-|V_{tb}|^2+|V_{cd}|^2)|V_{cb}|-|V_{cd}||V_{ud}||V_{ub}|e^{i\gamma}}{|V_{cs}||V_{tb}|} & |V_{tb}| \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

附录 B $SU(3)$ 破坏项振幅

$SU(3)$ 破坏项的树图振幅 $T(q)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned}
\Delta T(q) &= a_1^T(\bar{3})B_iH^a(\bar{3})W_a^iM_k^jM_l^kM_j^l + a_2^T(\bar{3})B_iH^i(\bar{3})M_k^jM_l^kM_j^aW_a^l \\
&+ b_1^T(\bar{3})H^i(\bar{3})W_i^aM_a^jB_jM_l^kM_k^l + b_2^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^jB_aW_j^aM_l^kM_k^l \\
&+ b_3^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^jB_jM_l^kM_k^aW_a^l \\
&+ c_1^T(\bar{3})H^a(\bar{3})W_a^iM_i^lM_j^jM_j^kM_k^lB_k + c_2^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^lM_l^aW_a^jM_j^kM_k^lB_k \\
&+ c_3^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^lM_l^jM_j^aW_a^kM_k^lB_k + c_4^T(\bar{3})H^i(\bar{3})M_i^lW_l^aM_a^jM_j^kM_k^lB_k \\
&+ a_1^T(6)B_aW_i^aH_k^{ij}(6)M_j^kM_n^lM_l^n + a_2^T(6)B_iH_k^{ia}(6)W_a^jM_j^kM_n^lM_l^n \\
&+ a_3^T(6)B_iH_k^{ij}(6)W_a^kM_j^aM_n^lM_l^n + a_4^T(6)B_iH_k^{ij}(6)M_j^kM_n^lM_l^aW_a^n \\
&+ b_1^T(6)B_aW_i^aH_k^{ij}(6)M_l^kM_n^lM_j^n + b_2^T(6)B_iH_k^{ia}(6)W_a^jM_l^kM_n^lM_j^n \\
&+ b_3^T(6)B_iH_k^{ij}(6)W_a^kM_l^aM_n^lM_j^n + b_4^T(6)B_iH_k^{ij}(6)W_l^aM_a^kM_n^lM_j^n \\
&+ b_5^T(6)B_iH_k^{ij}(6)W_n^aM_l^kM_a^lM_j^n \\
&+ c_1^T(6)B_iH_l^{jk}(6)W_a^iM_j^aM_k^nM_n^l + c_2^T(6)B_iH_l^{jk}(6)W_j^aM_a^iM_k^nM_n^l \\
&+ c_3^T(6)B_iH_l^{jk}(6)M_j^iW_k^aM_a^nM_n^l + c_4^T(6)B_iH_l^{jk}(6)M_j^iM_k^nW_a^lM_a^n \\
&+ c_5^T(6)B_iH_l^{jk}(6)M_j^iM_k^nM_a^lW_n^a \\
&+ d_1^T(6)B_aW_i^aH_l^{jk}(6)M_n^iM_j^lM_k^n + d_2^T(6)B_iH_l^{ak}(6)W_a^jM_n^iM_j^lM_k^n \\
&+ d_3^T(6)B_iH_l^{ja}(6)W_a^kM_n^iM_j^lM_k^n + d_4^T(6)B_iH_a^{jk}W_l^a(6)M_n^iM_j^lM_k^n \\
&+ d_5^T(6)B_iH_l^{jk}(6)W_n^aM_a^iM_j^lM_k^n \\
&+ a_1^T(\bar{15})B_aW_i^aH_k^{ij}(\bar{15})M_j^kM_n^lM_l^n + a_2^T(\bar{15})B_iH_k^{ia}(\bar{15})W_a^jM_j^kM_n^lM_l^n \\
&+ a_3^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})W_a^kM_j^aM_n^lM_l^n + a_4^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})M_j^kM_n^lM_l^aW_a^n \\
&+ b_1^T(\bar{15})B_aW_i^aH_k^{ij}(\bar{15})M_l^kM_n^lM_j^n + b_2^T(\bar{15})B_iH_k^{ia}(\bar{15})W_a^jM_l^kM_n^lM_j^n \\
&+ b_3^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})W_a^kM_l^aM_n^lM_j^n + b_4^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})W_l^aM_a^kM_n^lM_j^n \\
&+ b_5^T(\bar{15})B_iH_k^{ij}(\bar{15})W_n^aM_l^kM_a^lM_j^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_1^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_a^iM_j^aM_k^nM_n^l + c_2^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_j^aM_a^iM_k^nM_n^l \\
& +c_3^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iW_k^aM_a^nM_n^l + c_4^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iM_k^nW_a^lM_n^a \\
& +c_5^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})M_j^iM_k^nM_a^lW_n^a \\
& +d_1^T(\overline{15})B_aW_i^aH_l^{jk}(\overline{15})M_n^iM_j^lM_k^n + d_2^T(\overline{15})B_iH_l^{ak}(\overline{15})W_a^jM_n^iM_j^lM_k^n \\
& +d_3^T(\overline{15})B_iH_l^{ja}(\overline{15})W_a^kM_n^iM_j^lM_k^n + d_4^T(\overline{15})B_iH_a^{jk}W_l^a(\overline{15})M_n^iM_j^lM_k^n \\
& +d_5^T(\overline{15})B_iH_l^{jk}(\overline{15})W_n^aM_a^iM_j^lM_k^n
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$SU(3)$ 破坏项的企鹅图振幅 $P(q)$ 可以通过用 P 来替换 T 得到。

附录 C 衰变振幅的动量依赖项修正

$SU(3)$ 不变振幅 T^p 的动量依赖项修正:

$$\begin{aligned}
 T^p(q) = & a'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)M_l^k M_j^l + a'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})M_k^j(\partial^\mu M_l^k)M_j^l \\
 & + a'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_i)H^i(\bar{3})M_k^j M_l^k(\partial^\mu M_j^l) + a''(\bar{3})_1 B_i H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)(\partial_\mu M_l^k)M_j^l \\
 & + a''(\bar{3})_2 B_i H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_k^j)M_l^k(\partial_\mu M_j^l) + a''(\bar{3})_3 B_i H^i(\bar{3})M_k^j(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_j^l) \\
 & + b'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)M_l^k M_k^l + b'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})M_i^j(\partial^\mu M_l^k)M_k^l \\
 & + b'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_j)H^i(\bar{3})M_i^j M_l^k(\partial^\mu M_k^l) + b''(\bar{3})_1 B_j H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)(\partial_\mu M_l^k)M_k^l \\
 & + b''(\bar{3})_2 B_j H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^j)M_l^k(\partial_\mu M_k^l) + b''(\bar{3})_3 B_j H^i(\bar{3})M_i^j(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_k^l) \\
 & + c'(\bar{3})_1(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)M_j^k M_j^l + c'(\bar{3})_2(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})M_i^l(\partial^\mu M_j^k)M_j^l \\
 & + c'(\bar{3})_3(\partial_\mu B_k)H^i(\bar{3})M_i^l M_j^k(\partial^\mu M_j^l) + c''(\bar{3})_1 B_k H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)(\partial_\mu M_j^k)M_j^l \\
 & + c''(\bar{3})_2 B_k H^i(\bar{3})(\partial^\mu M_i^l)M_j^k(\partial_\mu M_j^l) + c''(\bar{3})_3 B_k H^i(\bar{3})M_i^l(\partial^\mu M_j^k)(\partial_\mu M_j^l) \\
 & + a'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)M_n^l M_l^n + a'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_j^k(\partial^\mu M_n^l)M_l^n \\
 & + a'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_j^k M_n^l(\partial^\mu M_l^n) + a''(6)_1 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)(\partial_\mu M_n^l)M_l^n \\
 & + a''(6)_2 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_j^k)M_n^l(\partial_\mu M_l^n) + a''(6)_3 B_i H_k^{ij}(6)M_j^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_l^n) \\
 & + b'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)M_n^l M_j^n + b'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_l^k(\partial^\mu M_n^l)M_j^n \\
 & + b'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(6)M_l^k M_n^l(\partial^\mu M_j^n) + b''(6)_1 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_n^l)M_j^n \\
 & + b''(6)_2 B_i H_k^{ij}(6)(\partial^\mu M_l^k)M_n^l(\partial_\mu M_j^n) + b''(6)_3 B_i H_k^{ij}(6)M_l^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_j^n) \\
 & + c'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_j^i)M_k^n M_n^l + c'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(6)M_j^i(\partial^\mu M_k^n)M_n^l \\
 & + c'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(6)M_j^i M_k^n(\partial^\mu M_n^l) + c''(6)_1 B_i H_l^{jk}(6)(\partial^\mu M_j^i)(\partial_\mu M_k^n)M_n^l \\
 & + c''(6)_2 B_i H_l^{jk}(6)(\partial^\mu M_j^i)M_k^n(\partial_\mu M_n^l) + c''(6)_3 B_i H_l^{jk}(6)M_j^i(\partial^\mu M_k^n)(\partial_\mu M_n^l) \\
 & + d'(6)_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(6)(\partial^\mu M_n^i)M_j^l M_k^n + d'(6)_2(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(6)M_n^i(\partial^\mu M_j^l)M_k^n \\
 & + d'(6)_3(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(6)M_n^i M_j^l(\partial^\mu M_k^n) + d''(6)_1 B_i H_l^{jk}(6)(\partial^\mu M_n^i)(\partial_\mu M_j^l)M_k^n \\
 & + d''(6)_2 B_i H_l^{jk}(6)(\partial^\mu M_n^i)M_j^l(\partial_\mu M_k^n) + d''(6)_3 B_i H_l^{jk}(6)M_n^i(\partial^\mu M_j^l)(\partial_\mu M_k^n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)M_n^l M_l^n + a'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k(\partial^\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k M_n^l(\partial^\mu M_l^n) + a''(\overline{15})_1 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)(\partial_\mu M_n^l)M_l^n \\
& + a''(\overline{15})_2 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^k)M_n^l(\partial_\mu M_l^n) + a''(\overline{15})_3 B_i H_k^{ij}(\overline{15})M_j^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_l^n) \\
& + b'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)M_n^l M_j^n + b'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k(\partial^\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k M_n^l(\partial^\mu M_j^n) + b''(\overline{15})_1 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)(\partial_\mu M_n^l)M_j^n \\
& + b''(\overline{15})_2 B_i H_k^{ij}(\overline{15})(\partial^\mu M_l^k)M_n^l(\partial_\mu M_j^n) + b''(\overline{15})_3 B_i H_k^{ij}(\overline{15})M_l^k(\partial^\mu M_n^l)(\partial_\mu M_j^n) \\
& + c'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)M_k^n M_n^l + c'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(\overline{15})M_j^i(\partial^\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(\overline{15})M_j^i M_k^n(\partial^\mu M_n^l) + c''(\overline{15})_1 B_i H_l^{jk}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)(\partial_\mu M_k^n)M_n^l \\
& + c''(\overline{15})_2 B_i H_l^{jk}(\overline{15})(\partial^\mu M_j^i)M_k^n(\partial_\mu M_n^l) + c''(\overline{15})_3 B_i H_l^{jk}(\overline{15})M_j^i(\partial^\mu M_k^n)(\partial_\mu M_n^l) \\
& + d'(\overline{15})_1(\partial_\mu B_i)H_l^{ik}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)M_j^l M_k^n + d'(\overline{15})_2(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(\overline{15})M_n^i(\partial^\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d'(\overline{15})_3(\partial_\mu B_i)H_l^{jk}(\overline{15})M_n^i M_j^l(\partial^\mu M_k^n) + d''(\overline{15})_1 B_i H_l^{jk}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)(\partial_\mu M_j^l)M_k^n \\
& + d''(\overline{15})_2 B_i H_l^{jk}(\overline{15})(\partial^\mu M_n^i)M_j^l(\partial_\mu M_k^n) + d''(\overline{15})_3 B_i H_l^{jk}(\overline{15})M_n^i(\partial^\mu M_j^l)(\partial_\mu M_k^n).
\end{aligned} \tag{C.1}$$

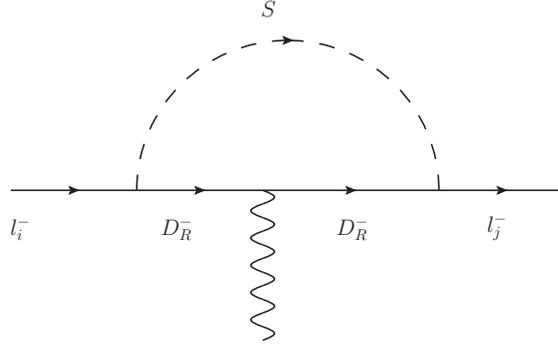
展开上式我们得到 α_i 的表示：

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{m_B^2} &= -c'(6)_2 + c'(\overline{15})_1 \\
\frac{\alpha_2}{m_B^2} &= b'(\overline{3})_2 + b'(\overline{3})_3 + c'(\overline{3})_2 + a'(6)_2 + a'(6)_3 + b'(6)_2 - c'(6)_2 - d'(6)_3 \\
&\quad + 3a'(\overline{15})_2 + 3a'(\overline{15})_3 + 3b'(\overline{15})_2 + 3c'(\overline{15})_2 + 3d'(\overline{15})_3 - 2c'(\overline{15})_3 \\
\frac{\alpha_3}{m_B^2} &= \frac{1}{2} \{ [2b'(\overline{3})_1 + c'(\overline{3})_1 + 2a'(6)_1 + b'(6)_3 - d'(6)_2 \\
&\quad + 6a'(\overline{15})_1 + 3b'(\overline{15})_3 + c'(\overline{15})_1 - c'(\overline{15})_2 + 3d'(\overline{15})_2] \\
&\quad + [b'(\overline{3})_2 + b'(\overline{3})_3 + c'(\overline{3})_3 + a'(6)_2 + a'(6)_3 + b'(6)_1 \\
&\quad - c'(6)_1 - c'(6)_3 - d'(6)_1 + 3a'(\overline{15})_2 + 3a'(\overline{15})_3 \\
&\quad + 3b'(\overline{15})_1 - c'(\overline{15})_2 + 3c'(\overline{15})_3 + 3d'(\overline{15})_1] \} \\
\frac{\alpha_4}{m_B^2} &= c''(6)_2 - c''(\overline{15})_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_5}{m_B^2} &= b''(\bar{3})_1 + b''(\bar{3})_2 + c''(\bar{3})_2 + a''(6)_1 + a''(6)_2 + b''(6)_2 - c''(6)_2 \\
&\quad - d''(6)_1 + 3a''(\bar{15})_1 + 3a''(\bar{15})_2 + 3b''(\bar{15})_2 - 2c''(\bar{15})_1 \\
&\quad + 3c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_1 \\
\frac{\alpha_6}{m_B^2} &= \frac{1}{2} \{ [2b''(\bar{3})_3 + c''(\bar{3})_3 + 2a''(6)_3 + b''(6)_1 - d''(6)_2 \\
&\quad + 6a''(\bar{15})_3 + 3b''(\bar{15})_1 + c''(\bar{15})_3 - c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_2] \\
&\quad + [b''(\bar{3})_1 + b''(\bar{3})_2 + c''(\bar{3})_1 + a''(6)_1 + a''(6)_2 + b''(6)_3 \\
&\quad - c''(6)_1 - c''(6)_3 - d''(6)_3 + 3a''(\bar{15})_1 + 3a''(\bar{15})_2 \\
&\quad + 3b''(\bar{15})_3 + 3c''(\bar{15})_1 - c''(\bar{15})_2 + 3d''(\bar{15})_3] \} \tag{C.2}
\end{aligned}$$

附录 D 轻子味破坏过程的计算

$\mu \rightarrow e\gamma$ 过程:



$\mu \rightarrow e\gamma$ 过程的衰变振幅:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \varepsilon^\mu \bar{u}(p_2) (-iY_D)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + M)}{(p_2 - k)^2 - M^2} (ie\gamma_\mu) \\
 &\times \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + M)}{(p_2 - k)^2 - M^2} \frac{1}{k^2 - m_S^2} P_L u(p_1)
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

费曼参数化后, $l = k - xp_1 - yp_2$, $\Delta^2 = m_S^2(1 - x - y) + (x + y)M^2 + m_1^2x^2 - m_1^2x + m_2^2y^2 - m_2^2y + 2p_1 \cdot p_2xy \simeq m_S^2(1 - x - y) + (x + y)M^2$.

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}' &= 2Y_D^2 \varepsilon^\mu e \int dx dy \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \\
 &\times \frac{[(-\not{l} + \not{p}_2(1 - y) - \not{p}_1x)\gamma_\mu(-\not{l} + \not{p}_1(1 - x) - \not{p}_2y)]}{(l^2 - \Delta^2)^3} P_L u(p_1) \\
 &= 2Y_D^2 \varepsilon^\mu e \int dx dy \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \left\{ \frac{m_1m_2[(1 - x)(1 - y) - xy]\gamma_\mu P_R}{(l^2 - \Delta^2)^3} \right. \\
 &\quad + \frac{[\not{l}\gamma_\mu\not{l} + M^2\gamma_\mu + m_1^2x(1 - x)\gamma_\mu + m_2^2y(1 - y)\gamma_\mu - 2xy p_1 \cdot p_2\gamma_\mu] P_L}{(l^2 - \Delta^2)^3} \\
 &\quad \left. - \frac{m_2y(1 - x - y)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) P_L + m_1x(1 - x - y)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) P_R}{(l^2 - \Delta^2)^3} \right\} u(p_1)
 \end{aligned}$$

这里 $(p_1 - p_2) \cdot \varepsilon = 0$, 其中运用了 Dirac 方程, 正比于 $\gamma \cdot \varepsilon$ 的项将由外腿的贡献抵消掉。积分和重整化后抽取出正比于 $(p_1 - p_2) \cdot \varepsilon$ 的项, 因为只有它对 $\mu \rightarrow e\gamma$

有贡献。

$$i\mathcal{M}'_{\mu \rightarrow e\gamma} = Y_D^2 e \varepsilon^\mu \int dx dy \frac{i}{(4\pi)^2} \bar{u}(p_2) \times \frac{(m_2 y P_L + m_1 x P_R)(1-x-y)(p_{1\mu} + p_{2\mu})}{(l^2 - \Delta^2)^3} u(p_1) \quad (\text{D.2})$$

经计算等式右面可化为：

$$Y_D^2 \frac{e}{32\pi^2} \bar{u}(p_2) [m_2 P_L \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \frac{1}{m_S^2} F(\frac{M^2}{m_S^2}) + m_1 P_R \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \frac{1}{m_S^2} F(\frac{M^2}{m_S^2})] u(p_1)$$

所以有：

$$i\mathcal{M}'_{\mu \rightarrow e\gamma} = \bar{u}(p_2) (A_L P_L + A_R P_R) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} u(p_1) \quad (\text{D.3})$$

这里

$$\begin{aligned} A_L &= Y_D^2 \frac{e}{32\pi^2} [\frac{1}{m_S^2} F(\frac{M^2}{m_S^2})] m_\mu \\ A_R &= \frac{m_e}{m_\mu} A_L \\ F(z) &= \frac{z^2 - 5z + 2}{12(z-1)^3} + \frac{z \ln z}{2(z-1)^4} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$\mu \leftrightarrow e$ 翻转：

为了得到 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转的贡献，首先计算 γ 交换的过程，抽取出正比于 q^2 的项，只有它对 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转有贡献。 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转的 γ 交换的振幅为：

$$i\mathcal{M}'_{\mu \leftrightarrow e} = 2Y_D^2 \varepsilon^\mu e \int dx dy \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \times \left\{ \frac{[l \gamma_\mu l + M^2 \gamma_\mu - 2xy p_1 \cdot p_2 \gamma_\mu] P_L}{(l^2 - \Delta^2)^3} \right\} u(p_1) \quad (\text{D.5})$$

重整化后得到

$$i\mathcal{M}'_{\mu \leftrightarrow e} = Y_D^2 \varepsilon^\mu e \left(\frac{-i}{16\pi^2} \right) \bar{u}(p_2) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) - \frac{1}{2} - \int dx dy \ln \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} + \int dx dy \frac{(M^2 - 2xy p_1 \cdot p_2)}{\Delta^2} \right] \gamma_\mu P_L u(p_1) \quad (\text{D.6})$$

其中

$$\begin{aligned} - \int dx dy \ln \frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2} &= -\frac{1}{2} \ln \frac{m_S^2}{4\pi\mu^2} - \int dx dy \ln [1 + (x-y)(\alpha-1)] \\ &+ \int dx dy \frac{xy \frac{q^2}{m_S^2}}{1 + (x-y)(\alpha-1)} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned}
\int dxdy \frac{M^2 - 2xy p_1 \cdot p_2}{\Delta^2} &= \int dxdy \frac{\alpha + xy \frac{q^2}{m_S^2}}{1 + (x+y)(\alpha-1) - xy \frac{q^2}{m_S^2}} \\
&= \int dxdy \left[\frac{\alpha + xy \frac{q^2}{m_S^2}}{1 + (x+y)(\alpha-1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha + xy \frac{q^2}{m_S^2}) xy \frac{q^2}{m_S^2}}{[1 + (x+y)(\alpha-1)]^2} \right] \tag{D.8}
\end{aligned}$$

这里 $\alpha = \frac{M^2}{m_S^2}$, 因此得到 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转的振幅:

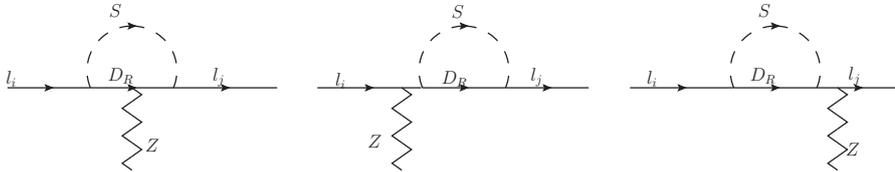
$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'_{\mu \leftrightarrow e} &= Y_D^2 \varepsilon^\mu \left(\frac{e}{16\pi^2} \right) \bar{u}(p_2) \frac{q^2}{m_S^2} \int dxdy \left[\frac{2xy}{1 + (x+y)(\alpha-1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha xy}{[1 + (x+y)(\alpha-1)]^2} \right] \gamma_\mu P_L u(p_1) \\
&= \varepsilon^\mu \bar{u}(p_2) [q^2 B_L] \gamma_\mu P_L u(p_1) \tag{D.9}
\end{aligned}$$

$$B_L = Y_D^2 \left(\frac{e}{16\pi^2} \right) \frac{1}{m_S^2} G\left(\frac{M^2}{m_S^2}\right) \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
G(z) &= \int dxdy \frac{2xy}{1 + (x+y)(z-1)} + \frac{zxy}{[1 + (x+y)(z-1)]^2} \\
&= \frac{7z^3 - 36z^2 + 45z - 16 + 6(3z-2)\ln z}{36(1-z)^4} \tag{D.11}
\end{aligned}$$

对于 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转过程的 γ 交换过程正比于 $\gamma \cdot \varepsilon$ 的项将由外腿的贡献抵消掉。

下面讨论 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转过程的 Z 交换过程。



通过 Z 玻色子诱导的 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转过程如图所示。 Z 诱导的企鹅图振幅 \mathcal{M}_1 为:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_1 &= \bar{u}(p_2) (-iY_D)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_2 + \not{k} + M)}{(p_2 + k)^2 - M^2} [-ie\gamma_\mu (Q_{ZR}^D P_R + Q_{ZL}^D P_L)] \times \\
&\quad \frac{i(\not{p}_1 + \not{k} + M)}{(p_1 + k)^2 - M^2} \frac{i}{k^2 - m_S^2} P_L u(p_1) \\
&= eY_D^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p_2) [Q_{ZR}^D (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{k}) + Q_{ZL}^D M^2] P_L u(p_1)}{[(p_2 + k)^2 - M^2][(p_1 + k)^2 - M^2](k^2 - m_S^2)} \tag{D.12}
\end{aligned}$$

费曼参数化后, $l = k - xp_1 - yp_2$, $\Delta_1^2 = m_S^2(1 - x - y) + (x + y)M^2 + m_1^2x^2 - m_1^2x + m_2^2y^2 - m_2^2y + 2p_1 \cdot p_2xy \simeq m_S^2(1 - x - y) + (x + y)M^2$ 。忽略正比于 q^2 的项。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & -\frac{e}{16\pi^2} Y_D^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\mu P_L u(p_1) \{ Q_{ZR}^D [\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma) - \frac{1}{2} - \int dx dy \ln \frac{\Delta_1^2}{4\pi\mu^2}] \\ & + Q_{ZL}^D M^2 \int dx dy \frac{1}{\Delta_1^2} \} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

外腿的贡献定义为: $\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4$, 经计算得:

$$\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 = \frac{e}{16\pi^2} Y_D^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\mu P_L u(p_1) Q_{ZL}^l [\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma) - \int dx(1-x) \ln \frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}] \quad (\text{D.14})$$

这里, $\Delta_2^2 = m_S^2(1 - x) + xM^2$, 总的贡献为:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{total} = & \frac{e}{16\pi^2} Y_D^2 \bar{u}(p_2) \gamma_\mu P_L u(p_1) \\ & \times \{ Q_{ZR}^D [\frac{1}{2} + f_1(\alpha_D)] - Q_{ZL}^D f_2(\alpha_D) - Q_{ZL}^l f_3(\alpha_D) \} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

这里, $\alpha_D = M^2/m_S^2$, 其中

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_D) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln[1 + (x+y)(\alpha_D - 1)] \\ &= -\frac{3 - 4\alpha_D + \alpha_D^2 + 2\alpha_D(2 - \alpha_D) \ln \alpha_D}{4(1 - \alpha_D)^2} \\ f_2(\alpha_D) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\alpha_D}{1 + (x+y)(\alpha_D - 1)} \\ &= \frac{-\alpha_D + \alpha_D^2 - \alpha_D \ln \alpha_D}{(1 - \alpha_D)^2} \\ f_3(\alpha_D) &= \int_0^1 dx(1-x) \ln[1 - x(1 - \alpha_D)] \\ &= \frac{-1 + 4\alpha_D - 3\alpha_D^2 + 2\alpha_D^2 \ln \alpha_D^2}{4(1 - \alpha_D)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned} [\frac{1}{2} + f_1(\alpha_D)] - f_2(\alpha_D) - f_3(\alpha_D) &= 0, \\ Q_{ZR}^D = Q_{ZL}^D = Q_{ZL}^l &= \frac{1}{S_w C_w} (-\frac{1}{2} + S_w^2), \mathcal{M}_{total} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

因此, 对于 Z 交换的 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转过程正比于 $(1/m_Z^2)$ 不依赖于 q^2 的项将由于企鹅图和外腿的抵消而等于零。正比于 q^2 的项相对于 γ 交换过程会被 (m_μ^2/m_Z^2) 压低, 因此可以忽略不计。因此在 $U(1)_D$ 模型中 $\mu \leftrightarrow e$ 翻转过程没有 Z 交换的贡献。

附录 E 新粒子信号 $pp \rightarrow D^0 Sl^-$ 截面的计算

对于散射过程 $q(p_1)\bar{q}'(p_2) \rightarrow W^-(k) \rightarrow D^-(q)D^0 \rightarrow S(p_3)l^-(p_4) + D^0(p_5)$, 我们对中间共振态粒子采用窄宽度近似, 末态相空间的积分采用相空间分层的方法。这样通过质子质子碰撞, 信号总的产生截面为:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \int f_a(x_1, Q^2) f_b(x_2, Q^2) \hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow D^0 Sl^-}(x_1 x_2 s) dx_1 dx_2, \\
 &= |V_{ud}| \int [f_d(x_1) f_{\bar{u}}(x_2) \hat{\sigma}_1 + f_{\bar{u}}(x_1) f_d(x_2) \hat{\sigma}_2] dx_1 dx_2 \\
 &+ |V_{us}| \int [f_s(x_1) f_{\bar{u}}(x_2) \hat{\sigma}_1 + f_{\bar{u}}(x_1) f_s(x_2) \hat{\sigma}_2] dx_1 dx_2 \\
 &+ |V_{cd}| \int [f_d(x_1) f_{\bar{c}}(x_2) \hat{\sigma}_1 + f_{\bar{c}}(x_1) f_d(x_2) \hat{\sigma}_2] dx_1 dx_2 \\
 &+ |V_{cs}| \int [f_s(x_1) f_{\bar{c}}(x_2) \hat{\sigma}_1 + f_{\bar{c}}(x_1) f_s(x_2) \hat{\sigma}_2] dx_1 dx_2. \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

其中

$$\hat{\sigma}_1 = \int \frac{1}{2\hat{s}} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_3 d^3 p_4 d^3 p_5}{(2\pi)^9 2E_3 2E_4 2E_5} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5). \tag{E.2}$$

这里 $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_1(p_1 \leftrightarrow p_2)$, $f_a(x_1)(f_b(x_2))$ 为初态质子内夸克的部分子分布函数 (PDF)。计算中使用 CTEQ6 的 PDF. \sqrt{s} 部分子的质心系能量, $\hat{\sigma}$ 是碰撞过程中部分子水平 $q\bar{q}' \rightarrow D^0 Sl^-$ 的产生截面。

过程 $q(p_1)\bar{q}'(p_2) \rightarrow W^-(k) \rightarrow D^-(q)D^0 \rightarrow S(p_3)l^-(p_4) + D^0(p_5)$ 的湮灭振幅为:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \left[\bar{u}(p_4) Y_D P_R \frac{\not{q} + m_D}{q^2 - m_D^2 + i\epsilon} \frac{ig}{\sqrt{2}} \gamma^\mu v(p_5) \right] \frac{i(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2})}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} \\
 &\times \left[\frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu P_L u(p_1) \right] \\
 &= \frac{-ig^2}{2} [\bar{u}(p_4) Y_D P_R (\not{q} + m_D) \gamma^\mu v(p_5)] [\bar{v}(p_2) \gamma^\nu P_L u(p_1)] \\
 &\times \frac{1}{q^2 - m_D^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} \\
 -i\mathcal{M}^\dagger &= \frac{ig^2}{2} [\bar{u}(p_1) P_R \gamma^{\nu'} v(p_2)] \left[\bar{v}(p_5) \gamma^{\mu'} (\not{q} + m_D) P_L Y_D^* u(p_4) \right] \\
 &\times \frac{1}{q^2 - m_D^2 - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_W^2 - i\epsilon}
 \end{aligned}$$

所以有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \frac{g^4}{4} Y_D Y_D^* \text{Tr} \left[\not{p}_4 P_R (\not{q} + m_D) \gamma^\nu \not{p}_5 \gamma^{\nu'} \right] \text{Tr} \left[\not{p}_2 \gamma^\mu P_L \not{p}_1 P_R \gamma^{\mu'} \right] \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \\ &= 4g^4 Y_D Y_D^* \{ m_D^2 (p_1 \cdot p_5) (p_2 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_5) [(2p_1 \cdot q) p_4 \cdot q - (p_1 \cdot p_4) q^2] \} \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

这里

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{(q^2 - m_D^2)^2 + (m_D \Gamma_D)^2}, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{1}{(k^2 - m_W^2)^2 + (m_W \Gamma_W)^2}$$

分别表示 D^- 和 W^- 的传播子。其中，

$$P_R = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1 + \gamma_5}{2}$$

衰变过程 $D^-(p_1) \rightarrow S(p_2) l^-(p_3)$ 的振幅为：

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{v}(p_3) Y_D P_R u(p_1), \quad -i\mathcal{M}^\dagger = \bar{u}(p_1) P_L Y_D^* v(p_3), \\ \frac{1}{2} \sum_{spin} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} Y_D Y_D^* \text{Tr}(\not{p}_3 P_R \not{p}_1 P_L) = Y_D Y_D^* (p_1 \cdot p_3). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

可以得到 D^- 的衰变宽度：

$$\Gamma_{D^- \rightarrow Sl^-} = \frac{1}{2m_D} \int \frac{d\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{2} \sum_{spin} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (\text{E.5})$$

致 谢

在上海交通大学物理与天文系的三年博士生活快乐而充实，上海交通大学粒子物理宇宙学研究所开放的学术环境和活跃的学术氛围使我受益良多，至此论文完成之际，谨在此向在我求学道路上多年以来一直关心我的老师，同学，朋友，家人表示最真诚的感谢。

首先，我要对的博士阶段的导师何小刚教授致以最衷心的感谢，何老师在我整个博士阶段期间对我的学习，科研，以及生活各个方面都是关怀有加，无微不至，是何老师把我带入了粒子物理研究的最前沿，何老师对真理和科学的热情和执着以及严谨的科研态度、一丝不苟的科研精神是我毕生的学习榜样，通过何老师的三年的指导，鼓励、耳提面命、谆谆教诲，使我受益匪浅。同时要感谢物理与天文系陈列文老师对我悉心指导和热心帮助。感谢李铜忠教授的引荐，使我有机会来到上海交大学习。感谢哈尔滨工业大学王国利教授一直以来对我的鼓励。感谢师兄任博和师弟徐栋对我的真诚帮助。感谢同学郭刚、熊小努、蔡宝军同学在学习和科研方面给予的帮助。另外感谢粒子物理宇宙学研究所张振、初鹏程、王旭明、高飞、郑浩、孙开佳、况小梅等同学的经常讨论。感谢我的室友董杰同学三年以来对我的慷慨帮助。还要非常感谢东北大学贾璐萌同学对本论文的文字校对和悉心帮助。

最后特别感谢我的父母及家人多年以来对我的照顾，感谢父亲多年以来在我求学道路上给予我精神上的鼓励，这是我一直前进的动力。感谢三哥多年以来对我生活上的关心和学业上的指导。还要感谢从小一直陪伴我的好友陈若怯、秦宇、魏家睿、王汀，使我的业余生活丰富多彩。

李冠楠

2014年3月

于上海交通大学物理与天文系

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] **Guan-Nan Li**, Hsiu-Hsien Lin, Xiao-Gang He. Comment on Reparametrization Invariance of Quark-Lepton Complementarity. Phys. Lett. B **711** (2012) 57-61 [arXiv:1112.2371[hep-ph]].
- [2] Gang Guo, Xiao-Gang He, **Guan-Nan Li**. Radiative Two Loop Inverse Seesaw and Dark Matter. JHEP **1210** (2012) 044 [arXiv:1207.6308[hep-ph]].
- [3] **Guan-Nan Li**, Hsiu-Hsien Lin, Dong Xu, Xiao-Gang He. The β angle as the CP violating phase in the CKM matrix. Phys. Lett. B **718** (2013) 1454-1456 [arXiv:1301.1078[hep-ph]].
- [4] **Guan-Nan Li**, Hsiu-Hsien Lin, Dong Xu, Xiao-Gang He. The α , β and γ parameterizations of CP violating CKM phase. Int. J. Mod. Phys. A **28** (2013) 1350014 [arXiv:1204.1230[hep-ph]].
- [5] **Guan-Nan Li**, Gang Guo, Bo Ren, Ya-Juan Zheng, Xiao-Gang He. Lepton number violation and $h \rightarrow \gamma\gamma$ in a radiative inverse seesaw dark matter model. JHEP **1304** (2013) 026 [arXiv:1212.5528[hep-ph]].
- [6] Dong Xu, **Guan-Nan Li**, Xiao-Gang He. U-spin analysis of CP violation in B^- decays into three charged light pseudoscalar mesons. Phys. Lett. B **728** (2014) 579-584 [arXiv:1311.3714[hep-ph]].
- [7] Dong Xu, **Guan-Nan Li**, Xiao-Gang He. Large SU(3) breaking effects and CP violation in B^+ decays into three charged SU(3) octed pseudoscalar mesons. Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450011 [arXiv:1307.7186[hep-ph]].