

申请上海交通大学硕士学位论文

中微子质量和无中微子双贝塔衰变相关性

论文作者 刘 震

学 号 1140729004

导 师 顾佩洪特别研究员

专 业 物理学

答辩日期 2017年2月16日

Submitted in total fulfillment of the requirements for the degree of Master
in Physics

Correlation Between Neutrino Mass and Neutrinoless Double Beta Decay

ZHEN LIU

Advisor

Prof. PEING-HONG GU

DEPARTMENT OF PHYSICS AND ASTRONOMY

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

SHANGHAI, P.R.CHINA

Feb. 16, 2017

中微子质量和无中微子双贝塔衰变相关性

摘要

对中微子质量起源问题的探索需要超越标准模型的新物理，一种合理的猜测是中微子是马约拉纳粒子，中微子的马约拉纳质量可以通过跷跷板机制或者在圈图水平产生，而双贝塔衰变实验可以检验中微子是否是马约拉纳粒子。本文讨论中微子质量和无中微子双贝塔衰变的关联。

本文首先介绍无中微子双贝塔衰变的“标准表述”，在这种模型中，对无中微子双贝塔衰变的主要贡献来自于轻的中微子的有效质量。所以只有当有效质量足够大时实验才可以发现无中微子双贝塔衰变现象。

在很多情况下，新物理过程对无中微子双贝塔衰变的贡献不能被忽略。本文介绍了通过跷跷板机制产生中微子质量的左右对称模型，分析了这种模型中所有无中微子双贝塔衰变过程的相对大小。然后以第二类跷跷板模型主导的左右对称模型为例，介绍在这种模型中对无中微子双贝塔衰变的贡献主要来自轻中微子有效质量和重中微子的有效质量。

在一些模型中，产生无中微子双贝塔衰变的机制可以只产生非常小的中微子质量。本文介绍一些扩展的两 Higgs 模型，两 Higgs 模型的扩展是通过引入一个带单电荷和一个带两电荷的标量粒子实现的。这两个标量粒子可以通过传递一个两圈图来产生微小的中微子 Majorana 质量矩阵，中微子质量矩阵的数值由两电荷标量粒子与右手轻子的 Yukawa 耦合完全确定。而无中微子双贝塔衰变由树图和单圈图产生，其中单圈图决定了无中微子双贝塔衰变的衰变率。即使在电子中微子质量非常小的情况下无中微子双贝塔衰变仍然可以被实验观测到。最后本文还介绍了与稀有衰变过程和希格斯粒子有关的实验对这个模型的限制。

关键词： 中微子质量 无中微子双贝塔衰变 圈图

Correlation Between Neutrino Mass and Neutrinoless Double Beta Decay

ABSTRACT

The origin of the neutrino masses calls for new physics beyond the standard model. It is natural to connect new physics with the Majorana nature of the neutrinos. The Majorana neutrino masses can be generated in seesaw mechanisms and radiative neutrino mass generation mechanisms. And the Majorana nature of the neutrinos can be probed by neutrinoless double beta decay ($0\nu\beta\beta$). In this paper we discuss the correlation between neutrino mass and $0\nu\beta\beta$.

We give a brief introduction about the standard interpretation of $0\nu\beta\beta$. In this model, $0\nu\beta\beta$ process is determined by the effective Majorana mass of electron neutrino, so it can be seen in the running and planning experiments only if the effective mass parameter is big enough.

In many cases, new physics contributions to $0\nu\beta\beta$ cannot be neglected. We review $0\nu\beta\beta$ in left-right symmetric model with Type I+II seesaw and analyze every contribution to $0\nu\beta\beta$ in this model. Then we show that in left-right symmetric model with Type-II seesaw dominance, the dominant contribution to $0\nu\beta\beta$ could come from left-handed current with light neutrino exchange or right-handed current with heavy neutrino exchange.

An enhanced $0\nu\beta\beta$ process can also originate from a tiny effective neutrino mass. In this paper we introduce some extended two Higgs doublet models. We realize these models by introducing two scalar singlets among which one carries a singly electric charge while the other one carries a doubly electric charge. We can obtain a dominant Majorana neutrino mass matrix at two-loop level. And the structure of the neutrino mass matrix can be fully determined by the symmetric Yukawa couplings of the doubly charged scalar to the right-handed leptons. Meanwhile, The one-loop $0\nu\beta\beta$ process can arrive at an observable level even if the electron neutrino mass is extremely small. We also study other experimental constraints and implications including some rare processes and Higgs phenomenology.

KEY WORDS: neutrino mass, neutrinoless double beta decay, loop

目 录

插图索引	vii
表格索引	ix
第一章 背景介绍	1
1.1 中微子	1
1.2 标准模型	1
1.3 中微子振荡	3
1.4 本章小结	4
第二章 无中微子双贝塔衰变的标准表述	7
2.1 中微子质量	7
2.1.1 狄拉克质量	7
2.1.2 马约拉纳质量	8
2.2 无中微子双贝塔衰变	9
2.2.1 双贝塔衰变介绍	9
2.2.2 标准表述	10
2.3 无中微子双贝塔衰变实验	13
第三章 左右对称模型中的中微子质量与无中微子双贝塔衰变	17
3.1 跷跷板机制	17
3.1.1 第一类跷跷板机制	18
3.1.2 第二类跷跷板机制	19
3.1.3 第三类跷跷板机制	20
3.2 左右对称模型	21
3.2.1 左右对称模型中的中微子质量	21
3.2.2 左右对称模型中的无中微子双贝塔衰变	22
3.3 中微子质量和无中微子双贝塔衰变	26

第四章 扩展的两希格斯模型中的中微子质量与无中微子双贝塔衰变	29
4.1 扩展的两希格斯双重态模型	29
4.1.1 模型	29
4.1.2 标量粒子的质量	31
4.2 中微子质量	35
4.3 无中微子双贝塔衰变	39
4.4 其他相关过程	44
4.4.1 轻子相关的过程	44
4.4.2 希格斯场相关的过程	47
全文总结	51
参考文献	53
致 谢	59
攻读学位期间发表的学术论文	61

插图索引

2-1	中微子双贝塔衰变的费曼图	10
2-2	Schechter-Valle 定理	11
2-3	有效质量	14
3-1	产生中微子质量的五维算符	17
3-2	第一类跷跷板机制	18
3-3	第二类跷跷板机制	19
3-4	希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变	20
3-5	纯左手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变	24
3-6	纯右手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变	24
3-7	一个左手流一个右手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变	25
3-8	左手和右手希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变过程	25
3-9	一种左手和右手 W 混合的无中微子双贝塔衰变过程	26
3-10	第二类跷跷板机制主导的左右对称模型的有效质量	27
4-1	两圈图的中微子马约拉纳质量	35
4-2	三圈图的中微子马约拉纳质量	36
4-3	两圈图积分结果	38
4-4	树图和单圈图的无中微子双贝塔衰变	40
4-5	单圈积分结果	43
4-6	正负电子到正负电子和正负电子到正负缪子的过程	45
4-7	缪子衰变到三个电子的过程	45
4-8	缪子衰变到电子和光子的味转变过程	46
4-9	产生标准模型中的希格斯双重态 6 维算符的单圈图	47

表格索引

1-1 中微子振荡参数	5
2-1 无中微子双贝塔衰变实验结果	14

第一章 背景介绍

1.1 中微子

中微子的概念是由泡利（Wolfgang Pauli）在 1930 年提出来的。在实验上，通过对原子核 β 衰变的能谱进行测量可以发现电子的强度随能量的变化是连续分布的；而在理论上，当时人们认为原子核 β^- 衰变的过程中只伴随着电子的释放，由于原子核的能级是分立的，所以原子核由初态衰变为末态释放出的电子的能量也应当是分立的。所以当时人们认为 β 衰变结果与能动量守恒相矛盾。为了解决这个矛盾，泡利设想 β 衰变的过程还有一个质量为 0 动量为 $1/2$ 的不带电的费米子的参与，这样一来衰变末态有三个粒子，在满足能量、动量、角动量守恒的情况下，这个矛盾得到了解决。后来这个被泡利引入的粒子被命名为中微子。1956 年莱因斯（Frederick Reines）和科温（Clyde Cowan）等人在实验中发现了反电子中微子，从而第一次确认了中微子的存在。

1.2 标准模型

作为一个基本粒子，中微子被引入到二十世纪六七十年代由格拉肖（Sheldon Glashow）、温伯格（Steven Weinberg）、萨拉姆（Abdus Salam）建立的标准模型^[1-3]。标准模型是一套描述强、弱、电磁相互作用和所有已知基本粒子的理论，因为可以对大量的实验结果做出精确的预测，标准模型取得了辉煌的成就。标准模型建立在 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范群上，包含 12 个规范玻色子，定义如下：

$$\begin{aligned} G_\mu(8, 1, 0) &= G_\mu^A T^A, \quad A = 1, 2 \dots 8; \\ W_\mu(1, 3, 0) &= W_\mu^a, \quad a = 1, 2, 3; \\ B_\mu(1, 1, 0). \end{aligned} \quad (1-1)$$

上式中， G_μ 是 $SU(3)$ 规范场，表示胶子； W_μ 和 B_μ 规范场在自发对称性破缺之后会组合成电弱规范玻色子 W^\pm 、 Z^0 和光子；括号中的数分别是 $SU(3)$ 、 $SU(2)$ 、 $U(1)$ 群的量子数，其中前两个分别表示在对应群下的变换性质，最后一个表示超荷 $Y = Q - T_3$ 。标准模型中还有三代轻子、三代夸克和一个希格斯场：

$$l_L(1, 2, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \nu_L \\ e_L \end{bmatrix}, \quad e_R(1, 1, -1),$$

$$\begin{aligned}
q_L(3, 2, +\frac{1}{6}) &= \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad u_R(3, 1, +\frac{2}{3}), \quad d_R(3, 1, -\frac{1}{3}), \\
\phi(1, 2, +\frac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1-2}$$

标准模型的拉格朗日量 \mathcal{L} 包括规范玻色子的动能项 \mathcal{L}_{gauge} , 费米子的动能项 $\mathcal{L}_{kinetic}$, Yukawa 耦合项 \mathcal{L}_{yukawa} , 以及希格斯场的拉格朗日量 \mathcal{L}_ϕ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{kinetic} + \mathcal{L}_{yukawa} + \mathcal{L}_\phi \tag{1-3}$$

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2}TrG_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}TrW_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{1-4}$$

$$\mathcal{L}_{kinetic} = \bar{Q}_L i \not{D} Q_L + \bar{u}_R i \not{D} u_R + \bar{d}_R i \not{D} d_R + \bar{l}_L i \not{D} l_L + \bar{e}_R i \not{D} e_R \tag{1-5}$$

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -\bar{Q}_L y_u \tilde{\phi} u_R - \bar{Q}_L y_d \phi d_R - \bar{l}_L y_e \phi e_R + h.c. \tag{1-6}$$

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{1-7}$$

其中协变导数具体形式为

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig'YB_\mu \tag{1-8}$$

在公式 (1-7) 中后两项是希格斯场的势能项, 当 $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$ 时, 真空期待值不为 0, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群会破缺为 $U(1)_{EM}$ 群。希格斯场可以取为

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \frac{v+h+iI}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

其中 v 是真空期待值, h 是希格斯粒子, ϕ^+ 和 I 是 Goldstone 粒子。

把上式代入公式 (1-7) 的希格斯场势能项可以得到希格斯粒子的质量; 代入公式 (1-4) 的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范项可以得到 W_μ^\pm , Z_μ^0 和 A_μ , 并且 Goldstone 粒子被 W^\pm 和 Z^0 “吃掉”; 最后再利用公式 (1-6) 的 Yukawa 耦合项 \mathcal{L}_{yukawa} 可以得到夸克和电子 (e)、缪子 (μ)、陶子 (τ) 的质量。例如, 对于轻子部分的 Yukawa 耦合项, 经过希格斯场自发对称性破缺, 轻子部分得到质量的过程为:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{y-lepton} &= -\bar{l}_L y_e \phi e_R - \bar{e}_R y_e^\dagger \phi^\dagger l_L \\
&= -\bar{l}_L \frac{1}{\sqrt{2}} y_e (v+h) e_R - \bar{e}_R \frac{1}{\sqrt{2}} y_e^\dagger (v+h) l_L \\
&= -m_e \bar{e} e - \frac{m_e}{v} \bar{e} e h
\end{aligned} \tag{1-10}$$

上式中的 e 、 μ 、 τ 的质量矩阵 m_e 为

$$m_e = \frac{v}{\sqrt{2}} y_e \quad (1-11)$$

值得注意的是在标准模型中中微子没有右手态，公式 (1-6) 的 Yukawa 耦合项 \mathcal{L}_{yukawa} 中没有希格斯场与右手中微子的耦合项，从而没有中微子的狄拉克质量项，所以在标准模型中中微子是没有质量的。然而在 1998 年，日本的超级神冈中微子实验 (Super-K) 宣布发现了中微子振荡现象^[4]。这意味着中微子具有质量，中微有质量是第一个超出标准模型的直接证据。

1.3 中微子振荡

中微子有三种味，在传播的过程中中微子的味会发生周期性改变，这种现象叫做中微子振荡。1968 年 Homestake 实验发现实验测到的太阳中微子比理论预测的少，当时这被称为太阳中微子问题。这种现象实际是由于太阳产生的电子中微子 ν_e 传播到地球是部分转变为了缪子中微子 ν_μ 和陶子中微子 ν_τ 。1985 年 IMB 实验又发现了大气中微子 ν_μ 和 ν_e 数量比值与理论预测不符合的现象，到了 1998 年中微子振荡现象才首次被 Super-K 实验证实。

中微子振荡表明中微子具有质量，味本征态是质量本征态的叠加，即

$$|\nu_a\rangle = \sum_k U_{ak}^* |\nu_k\rangle \quad a = e, \mu, \tau \quad k = 1, 2, 3 \quad (1-12)$$

可以写成如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\nu 1} & U_{\nu 2} & U_{\nu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}, \quad (1-13)$$

其中第一个矢量表示中微子味本征态，后面的矢量表示中微子质量本征态，中间的中微子混合矩阵被称为 PMNS 矩阵，PMNS 矩阵的参数化形式可以选择如下形式^[4]：

$$U_{PMNS} = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} P, \quad (1-14)$$

其中 s 表示 $\sin \theta$ ， c 表示 $\cos \theta$ ，下角标数字表示对应的混合角 θ 。 δ 表示 CP 破坏相位角，存在 CP 破坏时 δ 为非 0 的数， P 是一个对角矩阵，包含 α_{21} 、 α_{31} 两个相位角， P 的定义为

$$P = \text{diag}(1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2}), \quad (1-15)$$

α_{21} 、 α_{31} 被称为 Majorana 相位角，如果中微子是 Majorana 粒子，则这两个相位角具有物理意义。

如前所述，中微子味本征态是质量本征态的叠加，则中微子味的态随时间演化的形式为：

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iEt} |\nu_k\rangle = \sum_\beta \left(\sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iEt} U_{\beta k} \right) |\nu_\beta\rangle. \quad (1-16)$$

这样可以得到真空中的中微子振荡公式，即味状态是 ν_α 的中微子在 t 时味状态变为 ν_β 的概率：

$$P_{\alpha\beta} = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \left| \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-iEt} U_{\beta k} \right|^2 = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t}. \quad (1-17)$$

根据实验数据确定的中微子混合矩阵中各个的量的大小关系，中微子真空振荡公式可以用两味中微子振荡近似，最终可以得到中微子的生存几率^[4]，例如对于电子中微子：

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - \sin^2(2\theta_{12}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right). \quad (1-18)$$

上式中的 Δm_{21}^2 表示 $m_2^2 - m_1^2$ ， E 和 L 为已知量，分别表示中微子能量和中微子传播距离，同理可以得到中微子转化为其他味中微子的概率为 $1 - P$ 。从振荡公式 (1-17)、(1-18) 以及 PMNS 矩阵的形式 (1-14) 可以看到中微子振荡几率可以给出 PMNS 矩阵中除了 Majorana 相位以外所有参量的信息以及中微子质量平方的差值的信息。由于目前的实验测到 Δm_{13}^2 和 Δm_{23}^2 的大小接近，并不能区分二者的相对大小，所以对于三个中微子质量本征态的质量有两种可能的排列情况，

1. 正排列 (Normal Hierarchy), $m_1 < m_2 < m_3$, 定义 $\Delta m^2 = m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)/2$, $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$;
2. 反排列 (Inverted Hierarchy), $m_3 < m_1 < m_2$, 定义 $\Delta m^2 = (m_1^2 + m_2^2)/2 - m_3^2$, $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ 。

通过对中微子振荡实验数据分析可以拟合得到 Δm^2 、 δm^2 、 θ_{12} 、 θ_{13} 、 θ_{23} 、 δ 六个振荡参数的数值，文献 [4] 中目前振荡参数最新数据如表 (1-1) 所示。

1.4 本章小结

中微子振荡现象证明中微子有质量，这是第一个超出标准模型的直接证据。中微子振荡实验可以测定中微子混合矩阵中的参数以及中微子的质量差，但是不能给出中微子质量的绝对大小，也不能揭示中微子是马约拉纳粒子还是狄拉克粒子。对于这些问题的探索依赖于对无中微子双贝塔衰变现象的研究。

表 1-1 振荡参数

Table 1-1 Oscillation parameters

Parameter	Hierarchy	Best fit	3σ range
$\delta m^2/10^{-5} eV^2$	NH or IH	7.37	6.93-7.97
$\Delta m^2/10^{-3} eV^2$	NH	2.50	2.37-2.63
$\Delta m^2/10^{-3} eV^2$	IH	2.46	2.33-2.60
$\sin^2 \theta_{12}/10^{-1}$	NH or IH	2.97	2.50-3.54
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$	NH	2.14	1.85-2.46
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}$	IH	2.18	1.86-2.48
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$	NH	4.37	3.79-6.16
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}$	IH	5.69	3.83-6.37
δ/π	NH	1.35	0-2
δ/π	IH	1.32	0-2

无中微子双贝塔衰变与中微子质量、质量顺序有直接联系，并且无中微子双贝塔衰变现象是否存在可以确定中微子是否是马约拉纳粒子，而确定中微子是马约拉纳粒子还是狄拉克粒子又对中微子质量起源问题的探索有重要作用。对中微子质量产生机制的研究可以揭示超越标准模型的新物理。

第二章 无中微子双贝塔衰变的标准表述

在标准表述中，无中微子双贝塔衰变过程由左手的轻质量的马约拉纳中微子传递，半衰期由轻质量中微子的有效质量决定。在这一章，本文首先介绍马约拉纳中微子，然后介绍标准表述中无中微子双贝塔衰变的机制，最后介绍无中微子双贝塔衰变实验的进展以及未来实验的目标。

2.1 中微子质量

2.1.1 狄拉克质量

如前所述，中微子是有微小质量的费米子，所以中微子可能是狄拉克粒子。这样它们获取质量的方式可以与其他基本费米子相同，除了左手中微子 ν_L ，还需要有三个对应的右手中微子 N_R ，中微子的 Yukawa 耦合项与式 (1-6) 类似，即

$$\mathcal{L}_{yukawa} \subset -\bar{L}_L y_\nu \tilde{H} N_R + h.c. \quad (2-1)$$

经过 Higgs 场自发对称性破缺，可以得到中微子的狄拉克质量项，

$$\mathcal{L}^D = -\bar{\nu}_L M^D N_R + h.c. \quad (2-2)$$

其中，上式中的 M^D 是一个 3×3 的复数矩阵，左手和右手中微子场都是包含 3 个分量，例如

$$\nu_L = \begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

将 (2-2) 中的 M^D 对角化即可得到质量本征态的狄拉克质量项，

$$\mathcal{L}^D = -\bar{\nu}^D m \nu^D \quad (2-4)$$

其中

$$\nu^D = \nu_L^D + N_R^D = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

通过对宇宙微波背景和大尺度结构等宇宙学现象的观测可以得到对中微子质量的限制，Planck 实验组利用 PlanckTTTEEE+SimLow+lensing 的数据给出在 95% 置信水平上三个中微子质量之和的最新上限^[5] 是：

$$\sum m_\nu < 0.14 \text{ eV}. \quad (2-6)$$

由此可以看到中微子的质量相对于其他费米子非常小，例如在第一代费米子中， $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ ， $m_u = 2.2 \text{ MeV}$ ， $m_d = 4.7 \text{ MeV}$ 。所以在同一代费米子中，中微子的质量要小至少 7 个数量级。这意味着中微子的质量产生机制可能与其他费米子不同。

2.1.2 马约拉纳质量

与其他基本费米子不同，中微子不带电荷，所以中微子可能是马约拉纳粒子，中微子的马约拉纳性质可以提供与其他费米子不同的质量产生机制。

马约拉纳粒子的反粒子是它本身，即 $\nu^C = \nu$ ，其中 C 是一个么正矩阵表示电荷共轭算符。如果中微子有左手场和右手场，则中微子场可以写为 $\nu = \nu_L + N_R$ ，可以得到 $N_R = (\nu_L)^C$ 。这样可以只用 ν_L 构造马约拉纳质量项：

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L M^M \nu_L^C + h.c. \quad (2-7)$$

与得到公式 (2-4) 的方法一样，质量本征态的马约拉纳质量项为：

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M \quad (2-8)$$

由式 (2-7) 可以看到只有 ν_L 进入了拉格朗日量中。如果右手中微子存在，那么一个最普遍的中微子质量项可以包括左手中微子的马约拉纳质量项、右手中微子的马约拉纳质量项、左右手中微子耦合的狄拉克质量项。这样马约拉纳中微子的质量项可以写为：

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\bar{\nu}_L M^D N_R - \frac{1}{2}\bar{\nu}_L M^M \nu_L^C - \frac{1}{2}\bar{N}_R M^M N_R^C + h.c. \quad (2-9)$$

上式可以重新写为：

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} n_L^C + h.c. \quad (2-10)$$

其中，

$$n_L = \begin{bmatrix} \nu_L \\ N_R^C \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$M^{D+M} = \begin{bmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

式(2-10)中的中微子质量矩阵 M^{D+M} 是一个非对角的 6×6 对称矩阵, 将其对角化可以得到中微子质量本征态的质量项:

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M \quad (2-13)$$

其中

$$\nu^M = \begin{bmatrix} \nu_L^M \\ (N_R^M)^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\nu_L^M)^C \\ N_R^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

公式(2-9)、(2-10)、(2-13)给出了马约拉纳中微子质量项的一般形式。可以看到马约拉纳质量项是破坏轻子数守恒的, 即 $\Delta L = \pm 2$ 。

2.2 无中微子双贝塔衰变

2.2.1 双贝塔衰变介绍

双贝塔衰变有两种情形, 一种是放出中微子的双贝塔衰变, 另一种是无中微子双贝塔衰变 ($0\nu\beta\beta$)。放出中微子的双贝塔衰变^[6]是标准模型允许的过程, 它是指原子核自发放射出两个电子和两个中微子的过程, 即

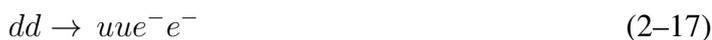


这种衰变过程发生的概率非常小, 例如文献[7]给出 ${}^{76}\text{Ge}$ 的半衰期为 0.938×10^{21} 年。

无中微子双贝塔衰变发生的概率更加小, 它是原子核自发放射出两个电子的过程, 即



在夸克水平上, 这个过程表示为



这个过程 $\Delta L = 2$, 所以会破坏轻子数守恒。它最早由 Furry 在 1939 年提出^[8]。提出无中微子双贝塔过程的动机是中微子可能是马约拉纳粒子, 这样中微子可以作为媒介粒子传递无中微子双贝塔衰变过程。实际上如图2-1所示, 任何 $\Delta L = 2$ 的过程都有可能产生无中微子双贝塔衰变。

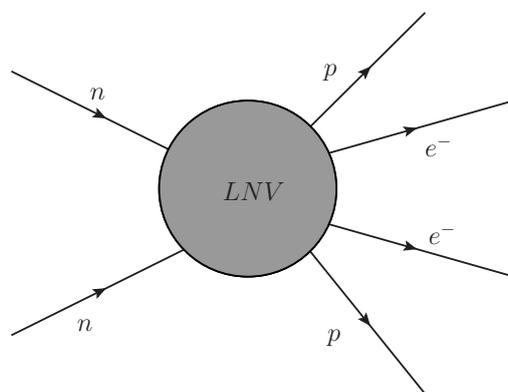


图 2-1 无中微子双贝塔衰变的费曼图，黑箱表示任何可以传递无中微子双贝塔衰变的过程

Fig 2-1 Feynman diagram of neutrinoless double beta decay, the black box contains any mechanism whatsoever for generating neutrinoless double beta decay

虽然无中微子双贝塔衰变可以通过很多轻子数不守恒的机制产生，但是 Schechter-Valle 定理^[9]表明，只要无中微子双贝塔衰变存在，那么中微子就有马约拉纳质量。因为利用交叉对称性（Crossing symmetry），公式（2-17）可以变换为

$$0 \rightarrow \bar{u}\bar{d}u\bar{e}^-e^- \quad (2-18)$$

然后如图2-2所示，只需要引入 $SU(2)_L$ 规范对称性，W 玻色子可以与 u 夸克、d 夸克以及电子、中微子耦合，这样就会得到中微子的马约拉纳质量项。

在费曼图2-2中微子的质量从一个四圈图得到，值得注意的是，这个费曼图虽然可以证明无中微子双贝塔衰变会导出中微子具有马约拉纳质量，但是不能决定中微子质量的大小，这是因为如图2-1所示，中微子不是唯一可以传递无中微子双贝塔衰变的媒介粒子。

2.2.2 标准表述

无中微子双贝塔衰变的标准表述是指衰变过程由轻质量的马约拉纳中微子传递，其他过程对这个衰变过程的贡献小到忽略不计。即图2-1中黑箱内是马约拉纳中微子时的情形。

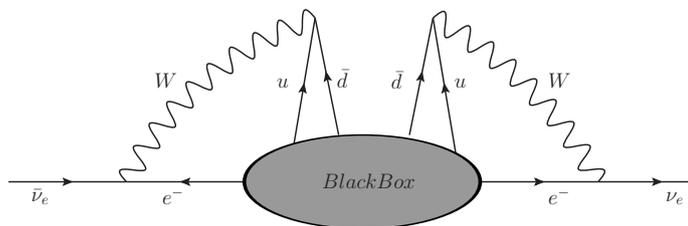


图 2-2 Schechter-Valle 定理，无中微子双贝塔衰变会导出中微子的马约拉纳质量项

Fig 2-2 Feynman diagram shows neutrinoless double beta decay processes induce a Majorana mass term

这个过程的有效哈密顿量可以表示为：

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} 2 \sum_i \bar{e}_L(x) \gamma_\alpha U_{ei} \nu_{iL} j^\alpha(x) + h.c. \quad (2-19)$$

其中 j^α 是强子的带电流，

$$j^\alpha = \bar{u}_L \gamma^\alpha d_L \quad (2-20)$$

并且中微子是马约拉纳粒子，满足

$$\nu^C = C \bar{\nu}^T = \nu \quad (2-21)$$

下面介绍标准表述中无中微子双贝塔衰变的半衰期形式。这个过程 S 矩阵元可以表示为：

$$\langle f | iT | i \rangle = \langle p_1 p_2 N_{f_1} N_{f_2} | T \left[\frac{(-i)^2}{2!} H_I H_I \right] | N_{i_1} N_{i_2} \rangle \quad (2-22)$$

$$= \langle p_1 p_2 N_f | T \left[\frac{(-i)^2}{2!} H_I H_I^T \right] | N_i \rangle \quad (2-23)$$

$$= \langle p_1 p_2 N_f | T \left[\int d^4x \bar{e}_L(x_1) \gamma_\alpha \nu_{eL} [j^\alpha(x_1) j^\beta(x_2)] \nu_{eL}^T \gamma_\beta^T \bar{e}_L^T(x_2) \right] | N_i \rangle \quad (2-24)$$

$$= \text{Constant} \int \bar{u}_L(p_1) e^{ip_1 x_1} \gamma_\alpha \sum_i U_{ei} \langle 0 | T [\nu_{iL}(x_1) \nu_{iL}^T(x_2)] | 0 \rangle U_{ei} \gamma_\beta^T \times \bar{u}_L^T(p_2) e^{ip_2 x_2} \langle N_f | [j^\alpha(x_1) j^\beta(x_2)] | N_i \rangle d^4x_1 d^4x_2 - (p_1 \leftrightarrow p_2) \quad (2-25)$$

其中, p_1 、 p_2 表示电子的四动量, N_i 、 N_f 表示初态和末态核子的状态, U_{ei} 表示 PMNS 矩阵的第一行第 i 列的矩阵元。另外为了简化公式把所有常数都放入 $Constant$ 中。值得注意的是式 (2-25) 中与中微子传播子有关的部分, 利用马约拉纳粒子的性质即公式 (2-21) 以及电荷共轭算符 C 的性质, 这部分可以变换为:

$$\begin{aligned} \sum_i U_{ei} \langle 0 | T[\nu_{iL}(x_1) \nu_{iL}^T(x_2)] | 0 \rangle U_{ei} &= \sum_i U_{ei}^2 \langle 0 | P_L T[\nu_i(x_1) \bar{\nu}_i(x_2)] C^T P_L | 0 \rangle \quad (2-26) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum_i U_{ei}^2 \int \frac{P_L(\not{q} + m_i) P_L}{q^2 - m_i^2} e^{-iq(x_1 - x_2)} d^4q \\ &\quad \times C \quad (2-27) \end{aligned}$$

所以上式可以化简为:

$$\sum_i U_{ei} \langle 0 | T[\nu_{iL}(x_1) \nu_{iL}^T(x_2)] | 0 \rangle U_{ei} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum_i U_{ei}^2 m_i \int \frac{1}{q^2 - m_i^2} e^{-iq(x_1 - x_2)} d^4q P_L C \quad (2-28)$$

由上式可以看到, 左手流的马约拉纳电子中微子的传播子中包含 $\sum_i U_{ei}^2 m_i$ 即 $U_e m U_e^T$, 定义这一项为电子有效质量 m_{ee} 。类似的, 可以定义马约拉纳中微子的有效质量^[10] 为:

$$m_W = \sum_i U_{li} U_{\nu i} m_i \quad (2-29)$$

然后可以把式 (2-28) 代入 (2-25), 交换电子的四动量 p_1 、 p_2 可以发现式 (2-25) 两部分大小相等符号相反。然后把式 (2-25) 中的时间部分和空间部分分开, 先对时间部分积分可以得到:

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= Constant \times \bar{u}_L(p_1) P_R C \bar{u}_L^T m_{ee} \int d^3 \vec{x}_1 d^3 \vec{x}_2 e^{-ip_1 \vec{x}_1 - ip_2 \vec{x}_2} \int d^3 \vec{q} \frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{q_i^0} \\ &\quad \times \gamma_\alpha \gamma_\beta \left[\sum_n \frac{\langle N_f | \vec{J}^\alpha(\vec{x}_1) | N_n \rangle \langle N_n | \vec{J}^\beta(\vec{x}_2) | N_i \rangle}{E_n + p_2^0 + q_i^0 - E_i - i\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \frac{\langle N_f | \vec{J}^\beta(\vec{x}_2) | N_n \rangle \langle N_n | \vec{J}^\alpha(\vec{x}_1) | N_i \rangle}{E_n + p_1^0 + q_i^0 - E_i - i\varepsilon} \right] \\ &\quad \times 2\pi \delta(E_f + p_1^0 + p_2^0 - E_i) \quad (2-30) \end{aligned}$$

这就是标准表述中中微子双贝塔衰变矩阵元的精确形式。由这个公式可以看到 S 矩阵元有三个部分: 1. m_{ee} 前面的部分, 包括常数、算符和电子场, 当对 S 矩阵元平方并且求衰变率之后, 这部分被归纳入相位因子, 相位因子反映出射电子的能量及角分布信息; 2. 马约拉纳电子中微子的有效质量 m_{ee} , 因为中微子的质量未知, 所以这是一个未知量; 3. m_{ee} 后面的部分, 由原子核的信息确定。

进一步的计算需要引入原子核状态的信息，并且需要做进一步的假设^[11-16]。例如对于奇-奇核 $0^+ \rightarrow 0^+$ 的衰变过程，可以得到无中微子双贝塔衰变半衰期的倒数有如下形式：

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} |m_{ee}|^2 |M^{0\nu}|^2 \quad (2-31)$$

上式中， $G^{0\nu}$ 是相位因子，反映出射电子的信息； $M^{0\nu}$ 被称为核矩阵元，由原子核的信息确定。相位因子和核矩阵元是确定的数，其中相位因子可以精确计算^[17,18]。而核矩阵元的计算相对复杂，目前对核矩阵元的计算方法主要有 QRPA (Quasiparticle Random Phase Approximation)^[19]、IBM (Interacting Boson Model)^[20]、ISM (interacting shell model)^[21] 等等，不同的方法对同一核素的核矩阵元的计算相差大概在两倍以内。

由上式 (2-31) 可以看到，在无中微子双贝塔衰变标准表述中，无中微子双贝塔衰变的半衰期由马约拉纳中微子的有效质量完全确定。只有当 m_{ee} 足够大，实验才可能观察到无中微子双贝塔衰变现象。利用第 1 章第 1.3 节中的表 1-1 的数据可以计算有效质量的大小 $|m_{ee}|$ ：

$$\begin{aligned} |m_{ee}| &= \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| \\ &= |c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 m_2 e^{i\alpha_{21}} + s_{13}^2 m_3 e^{i(-2\delta + \alpha_{31})}| \end{aligned} \quad (2-32)$$

因为两个马约拉纳 CP 相位角未知，可取 0 到 2π ，所以上式可改写为：

$$|m_{ee}| = |c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 m_2 e^{i\alpha} + s_{13}^2 m_3 e^{i\beta}| \quad (2-33)$$

上式的参数取表 1-1 中的最佳拟合的数值， α 、 β 取 0 到 2π 。这样可以得到 m_{ee} 的取值，利用 2-31 可以将理论计算的 $|m_{ee}|$ 与实验得到的半衰期 $T_{1/2}^{0\nu}$ 比较。图 2-3 展示了 $|m_{ee}|$ 随最轻质量的中微子的变化曲线。

由图 2-3 可以看到，在无中微子双贝塔衰变的贡献来自于轻的中微子的情况下，当中微子质量顺序是反质量顺序的时候，目前的无中微子双贝塔衰变实验即将接近理论预测的上限；当质量顺序是正质量顺序的时候，实验目前还难以探测到无中微子双贝塔衰变现象。

2.3 无中微子双贝塔衰变实验

最近的实验对 ^{136}Xe ^[22]、 ^{76}Ge ^[23]、 ^{100}Mo ^[24]、 ^{130}Te ^[25] 的无中微子双贝塔衰变的半衰期测量结果如表 2-1 所示。表 2-1 中， m_{ee} 由标准表述中的衰变公式即式 (2-31) 得到， m_{ee} 取值有一个范围，这个误差来自于对核矩阵元的计算。由表 2-1 可以看到，目前对有

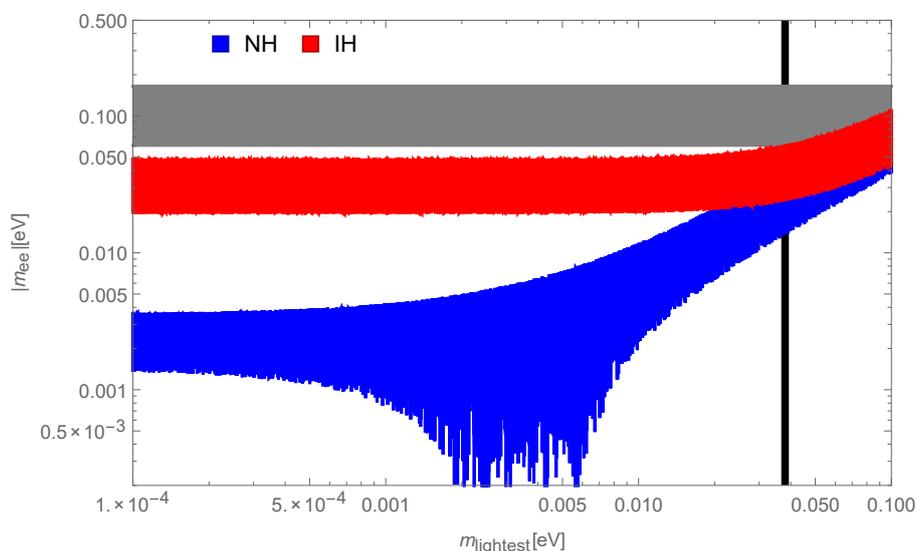


图 2-3 有效质量随最轻的中微子变化曲线（彩图）。中微子振荡参数选择最佳拟合的数值，马约拉纳 CP 相位任意变化。右侧黑色竖线表示普朗克实验 2016 年结果给出的中微子质量的上限，上方灰色横条是由 KamLAND-Zen 无中微子双贝塔衰变实验给出的目前对有效质量的最强限制。

Fig 2-3 (color online). Updated effective Majorana mass in the standard interpretation as function of the lightest neutrino mass. Neutrino oscillation parameters are determined by the best fit values, Majorana CP phases are chosen as free parameters. The vertical line is upper limit of the lightest neutrino mass by Planck 2016 intermediate result, The horizontal band is excluded regions of the effective mass by the latest neutrinoless double beta decay measurement result from KamLAND-Zen.

表 2-1 无中微子双贝塔衰变实验对半衰期的限制

Table 2-1 Experiment limit on neutrinoless double beta decay

Isotope	$T_{1/2}^{0\nu}$ (10^{24} year) at 90%CL	m_{ee} (meV)	Experiment
^{136}Xe	107	60-161	KamLAND-Zen
^{76}Ge	52	6000	GERDA
^{100}Mo	1.1	300-900	NEMO-3
^{130}Te	4.1	270-760	CUORE-0

效质量的最强限制是 KamLAND-Zen 实验给出的 $m_{ee} < 60 - 161\text{meV}$ ，对应的半衰期为 $T_{1/2}^{0\nu} > 1.07 \times 10^{26}$ 年。

计划中的无中微子双贝塔衰变实验将继续提高半衰期的下限，对有效质量的测量可以覆盖反质量顺序情况下的所有区域。例如，建立在 EXO-200 实验基础上的 nEXO 实验计划对 ^{136}Xe 无中微子双贝塔衰变半衰期测量的灵敏度达到 6×10^{27} 年^[26]，对应的中微子有效质量为 $m_{ee} = 15 - 25\text{meV}$ ；未来的 MAJORANA DEMONSTRATOR 实验对 ^{76}Ge 的测量同样可以达到大于 10^{27} 年，对应中微子有效质量约为 $m_{ee} = 20\text{meV}$ ^[27]。

在无中微子双贝塔衰变标准表述中，衰变过程完全由轻质量的中微子决定，由图2-3可以看到，对于正质量顺序的情况，目前以及下一代的实验还很难对这种图像做出检验。

第三章 左右对称模型中的中微子质量与无中微子双贝塔衰变

塔衰变

本章首先介绍三种跷跷板机制（Seesaw mechanism）产生中微子质量的过程以及对无中微子双贝塔衰变的贡献；然后介绍一种左右对称模型（Left-right symmetric model），在这种模型中中微子质量由第一类和第二类跷跷板机制产生，无中微子双贝塔衰变可以通过轻中微子、重中微子和三重态粒子产生，对衰变过程的主要贡献来自左手流传递轻中微子的过程和右手流传递重中微子的过程；最后以第二类跷跷板机制主导的左右对称模型为例，介绍轻中微子和重中微子中微子质量与无中微子双贝塔衰变的关联。

3.1 跷跷板机制

如图3-1所示，中微子质量可以通过一个5维的有效算符产生^[28]，即

$$\mathcal{O} = \kappa_5 l_L l_L \phi \phi \quad (3-1)$$

上式中， κ_5 是耦合常数，可以表示为 $\kappa_5 = a_5/\Lambda$ ， Λ 表示能标，标准模型作为一个低能有效理论在这个能标以下适用。

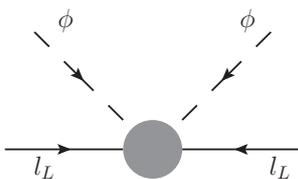


图 3-1 产生中微子质量的五维算符

Fig 3-1 Dimension 5 operator for neutrino mass generation

希格斯场自发对称性破缺后，如第一章公式（1-9）所示，希格斯场真空期望值取为 ν ，则由式（3-1）可以得到中微子的质量为

$$m_\nu = \frac{1}{2} \kappa_5 \nu^2 = \frac{1}{2} \frac{a_5}{\Lambda} \nu^2 \quad (3-2)$$

真空期望值 $\nu = 246\text{GeV}$ ，如果中微子质量取 $m_\nu = 0.05\text{eV}$ ， a_5 取 1，则可以得到能标为 $\Lambda \sim 10^{15}\text{GeV}$ 。三种跷跷板机制可以在高能标产生这个有效算符。

3.1.1 第一类跷跷板机制

由式 (3-1) 可以看到组成这个算符的场都是两重态。图 3-2 所示，一种产生这个算符的方式是每对 $l_L - \phi$ 组合成一个单态，这样可以通过交换一个右手费米子单态在树图水平产生中微子质量。

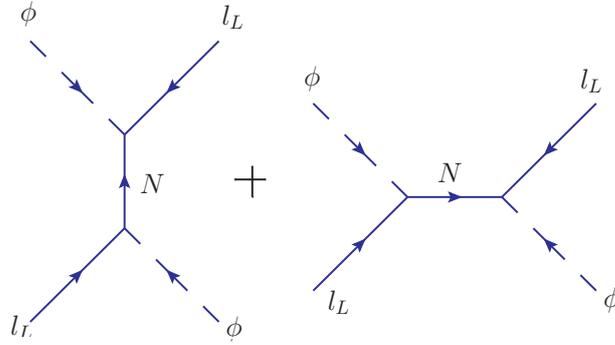


图 3-2 第一类跷跷板机制

Fig 3-2 Type-I seesaw

引入右手中微子 N_R 来扩充标准模型，定义 $N = N_R + N_R^C$ ，则标准模型拉氏量会增加 N_R 的动能项、质量项、Yukawa 耦合项，后两项与质量相关，即

$$\mathcal{L} \subset -\frac{1}{2}\bar{N}M_N N - (\bar{N}Y_N\tilde{\phi}^\dagger l_L + h.c.) \quad (3-3)$$

与第二章第 2.1.2 节的内容类似，中微子质量可以写为：

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{n}_L M_\nu n_L^C + h.c. \quad (3-4)$$

其中，

$$n_L = \begin{bmatrix} \nu_L \\ N_R^C \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$M_\nu = \begin{bmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_N \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

同样的，将其对角化可以得到中微子质量本征态的质量项：

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\bar{\nu}^M m \nu^M \quad (3-7)$$

当 $M_N \gg m_D$ 时，质量本征态的质量可以近似为：

$$m_1 \approx -m_D M_N^{-1} m_D^T \quad (3-8)$$

$$m_2 \approx M_N \quad (3-9)$$

上式（3-8）即轻中微子的质量，由这个公式可以看到重的右手中微子质量可以产生轻的中微子质量，这种机制称为跷跷板机制，通过引入右手费米子单态实现这种机制的模型是第一类跷跷板机制^[29-33]。

因为引入了重的中微子，显然这种中微子也可以传播无中微子双贝塔衰变，所以在第一类跷跷板机制里无中微子双贝塔衰变由轻中微子和重中微子传递。

3.1.2 第二类跷跷板机制

如图3-3所示，第二种产生公式（3-1）所示的算符的方式是 $l_L - l_L$ 和 $\phi - \phi$ 分别组合成一个三重态，这样可以通过交换一个希格斯三重态在树图水平产生中微子质量。

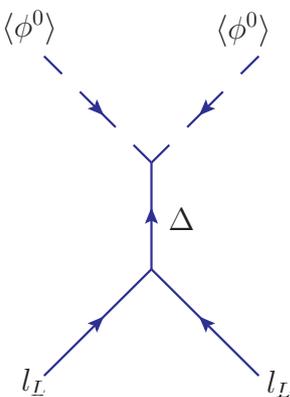


图 3-3 第二类跷跷板机制

Fig 3-3 Type-II seesaw

在标准模型中引入希格斯三重态 Δ ，在 $SU(2)$ 的联合表象下，三重态的形式为：

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta^+/\sqrt{2} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\Delta^+/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

这样标准模型拉氏量会增加 Δ 的动能项、 Δ 与 ϕ 的混合项以及轻子场与 Δ 的 Yukawa 耦合项，另外协变导数 D_μ 也要增加 Δ 有关的项。其中增加的 Yukawa 耦合项为：

$$\mathcal{L} \subset -\frac{1}{\sqrt{2}} l_L^T C Y_\Delta i \sigma_2 \Delta l_L + h.c. \quad (3-11)$$

由希格斯势场可以证明希格斯三重态 Δ 自发对称性破缺后的真空期望值为

$$\langle D_0 \rangle \sim \frac{\sqrt{2} \nu^2}{2} M_\Delta^2 \quad (3-12)$$

这样可以得到中微子的质量为

$$m_\nu \sim -\frac{\nu^2}{2} \frac{Y_\Delta}{M_\Delta^2} \quad (3-13)$$

由上式可以看到通过引入重的希格斯三重态 Δ 可以产生轻的中微子质量，这种机制是第二类跷跷板机制^[34,35]。

$\Delta^{\pm\pm}$ 可以与两个电子或者两个 W 玻色子耦合，所以在第二类跷跷板机制里，无中微子双贝塔衰变由轻中微子和两电荷标量粒子传递。两电荷标量粒子传递的无中微子双贝塔衰变如下图3-4所示。

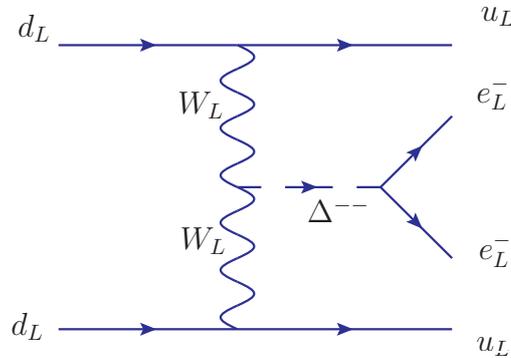


图 3-4 希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变

Fig 3-4 Neutrinoless double beta decay mediated by higgs triplet

3.1.3 第三类跷跷板机制

产生公式 (3-1) 所示的算符的第三种方式是每对 $l_L - \phi$ 组合成一个三重态，这样可以通过交换一个右手费米子三重态在树图水平产生中微子质量。

在第三类跷跷板机制^[36,37]中,通过引入三重态费米子 Σ ,标准模型中的拉氏量需要增加三重态的动能项、质量项、Yukawa 耦合项,三重态中的中性组分起到与第一类跷跷板机制中的右手单态类似的作用,同样的,对味本征态的中微子质量矩阵对角化之后可以得到轻中微子的质量:

$$m_\nu = -\frac{\nu^2}{2} Y_\Sigma^T M_\Sigma^{-1} Y_\Sigma \quad (3-14)$$

与右手中微子相同,中性组分 Σ 也可以传递无中微子双贝塔衰变。所以在第三类跷跷板机制中,无中微子双贝塔衰变由轻中微子和三重态费米子的中性组分传递。

3.2 左右对称模型

在左右对称模型中,中微子可以通过跷跷板机制获得质量。在一类左右对称模型中,中微子质量由第一类和第二类跷跷板机制产生,无中微子双贝塔衰变由中微子和希格斯三重态传递。还存在其他类型的左右对称模型,比如在文献 [38] 中,中微子可以通过线性跷跷板机制获得质量,无中微子双贝塔衰变由中微子和其他新物理过程传递。本文介绍由第一类和第二类跷跷板机制产生中微子质量的左右对称模型。

3.2.1 左右对称模型中的中微子质量

由第一类和第二类跷跷板机制产生中微子质量的左右对称模型^[39]是建立在 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ 规范群上,夸克和轻子表示为:

$$l_L(1, 2, 1, -1) = \begin{bmatrix} \nu_L \\ e_L \end{bmatrix}, \quad l_R(1, 1, 2, -1) = \begin{bmatrix} N_R \\ e_R \end{bmatrix}, \quad (3-15)$$

$$Q_L(3, 2, 1, +\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad Q_R(3, 1, 2, +\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} u_R \\ d_R \end{bmatrix}.$$

其中电荷由 $I_L^3 + I_R^3 + (B - L)/2$ 给出。标量粒子部分,引入希格斯 Bidoublet 和三重态,

$$\phi(1, 2, 2, 0) = \begin{bmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^+ \\ \phi_1^- & \phi_2^0 \end{bmatrix}, \quad (3-16)$$

$$\Delta_L(1, 3, 1, 2) = \begin{bmatrix} \Delta_L^+/\sqrt{2} & \Delta_L^{++} \\ \Delta_L^0 & -\Delta_L^+/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Delta_R(1, 1, 3, 2) = \begin{bmatrix} \Delta_R^+/\sqrt{2} & \Delta_R^{++} \\ \Delta_R^0 & -\Delta_R^+/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

规范群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ 通过 Δ_R 破缺到标准模型的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群,再通过 ϕ 破缺到 $U(1)_{EM}$ 群。上式 (3-16) 中, Bidoublet 通过与费米子的 Yukawa

耦合产生费米子的狄拉克质量；式(3-16)中的三重态与3.1.2节中的希格斯三重态类似，与轻子场耦合分别产生左手和右手中微子的马约拉纳质量项。与前面章节的方法类似，中微子的质量可以由 6×6 矩阵表示：

$$\mathcal{L}_{mass}^{\nu} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\nu}_L & \overline{N_R^C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_L^C \\ N_R \end{bmatrix}. \quad (3-18)$$

假设 $M_L \ll M_D \ll M_R$ ，则可以得到轻的中微子质量由第一类和第二类跷跷板机制产生，即：

$$m_{\nu} = M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T = m_{\nu}^{Type-II} + m_{\nu}^{Type-I} \quad (3-19)$$

式(3-18)的中微子质量矩阵可以用矩阵 \mathcal{V} 对角化， \mathcal{V} 的定义为

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} U & S \\ T & V \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} R R^\dagger & R \\ -R^\dagger & 1 - \frac{1}{2} R^\dagger R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\nu} & 0 \\ 0 & V_R \end{bmatrix}, \quad (3-20)$$

则对角化得到：

$$\mathcal{V}^T M_{\nu} \mathcal{V} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3). \quad (3-21)$$

其中，

$$S = M_D M_R^{-1} V_R, \quad T = -(M_D M_R^{-1})^\dagger U_{\nu}. \quad (3-22)$$

另外，在规范玻色子部分，左右手 W 粒子存在混合，即

$$\begin{bmatrix} W_L^+ \\ W_R^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi e^{i\alpha} \\ -\sin\xi e^{i\alpha} & \cos\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \end{bmatrix}. \quad (3-23)$$

ξ 是 $W_L - W_R$ 混合参数，文献 [39] 给出的对 ξ 限制为 $\xi \lesssim 7.7 \times 10^{-4}$ ，所以 $\sin\xi \approx \tan\xi \sim 10^{-4}$ ， $\cos\xi \sim 1$ 。

3.2.2 左右对称模型中的无中微子双贝塔衰变

在左右对称模型中，电子部分的带电流可以写为：

$$\mathcal{L} \subset \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma_{\mu} \nu_{eL} W_L^{\mu} + \bar{l}_R \gamma_{\mu} N_{eR} W_R^{\mu} + h.c. \quad (3-24)$$

写在质量本征态为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \subset & \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \left[\bar{l}_L \gamma_{\mu} (U_{ei} \nu_{iL} + T_{ei} N_{iR}^C) (W_1^{\mu} + \xi e^{i\alpha} W_2^{\mu}) \right. \\ & \left. + \bar{l}_R \gamma_{\mu} (S_{ei}^* \nu_{iR}^C + V_{ei}^* N_{iR}) (-\xi e^{i\alpha} W_1^{\mu} + W_2^{\mu}) \right] + h.c. \end{aligned} \quad (3-25)$$

由上面的内容可以看到，左右对称模型中的无中微子双贝塔衰变有：

1. 两个左手流即 W_L 的组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程;
2. 两个右手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程;
3. 一个左手流一个右手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程;
4. 分别由左手和右手希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变过程;
5. $W_L - W_R$ 混合的无中微子双贝塔衰变过程。

与第2.2节公式(2-31)类似,对由任意质量的中微子传递的无中微子双贝塔衰变过程,半衰期的倒数表示为^[40-43]:

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} g_A^4 \left| \sum U_{ei}^2 m_i m_p M'^{0\nu}(m_i, g_A^{eff}) \right|^2 \quad (3-26)$$

上式中 g_A 是核子轴矢量耦合常数, m_p 是质子质量。上式有两种极限形式,第一种是当中微子质量远小于衰变过程中虚中微子的动能 p , 因为核子之间的距离在费米量级, 所以 $p \sim 200\text{MeV}$; 第二种是中微子质量远大于动能 p :

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} g_A^4 \begin{cases} \left| \sum U_{ei}^2 m_i \frac{1}{m_e} M'^{0\nu}(g_A^{eff}) \right|^2 & m_i \ll p; \\ \left| \sum \frac{U_{ei}^2}{m_i} m_p M'^{0\nu}(g_A^{eff}) \right|^2 & m_i \gg p. \end{cases} \quad (3-27)$$

定义一个参数 $\langle p^2 \rangle$ 来表示式(3-27)中两个矩阵元的关系:

$$\langle p^2 \rangle = m_p m_e \left| \frac{M'^{0\nu}_N}{M'^{0\nu}_\nu} \right|. \quad (3-28)$$

由文献[44]的计算可知, $\sqrt{\langle p^2 \rangle}$ 的数值在 $150 - 200\text{MeV}$ 之间, 值得一提的是文献[44]利用式(3-27)得到了一个插值近似公式, 这个公式适用于任何质量的中微子, 特别的, 对于三个质量本征态有的重的有的轻的情况也适用。

这样, 公式(3-27)可以重写为:

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} g_A^4 \left| M'^{0\nu}_\nu \right|^2 \frac{1}{m_e^2} \times |\eta|^2 \quad (3-29)$$

$$\eta = \begin{cases} \sum U_{ei}^2 m_i & m_i \ll p \\ \langle p^2 \rangle \sum \frac{U_{ei}^2}{m_i} & m_i \gg p \end{cases} \quad (3-30)$$

从上面的公式出发, 下面分析左右对称模型中所有无中微子双贝塔衰变过程的相对大小。为了便于比较各个过程的大小, 取 $m_i \sim 0.1\text{eV}$, $M_i \sim 10^{12}\text{eV}$, $M_D \sim 10^5\text{eV}$, $M_R \sim 10^{12}\text{eV}$, $m_\Delta > 10^{13}\text{eV}$, $\sqrt{\langle p^2 \rangle} \sim 10^8\text{eV}$, $m_e \sim 10^5\text{eV}$, $U = V$, $S_{ei} \sim T_{ei} \sim M_D/M_R \sim 10^{-7}$ 。其中 m_Δ 取值的原因是由文献[45]给出 $M_i^{heaviest}/m_\Delta < 0.1$ 。

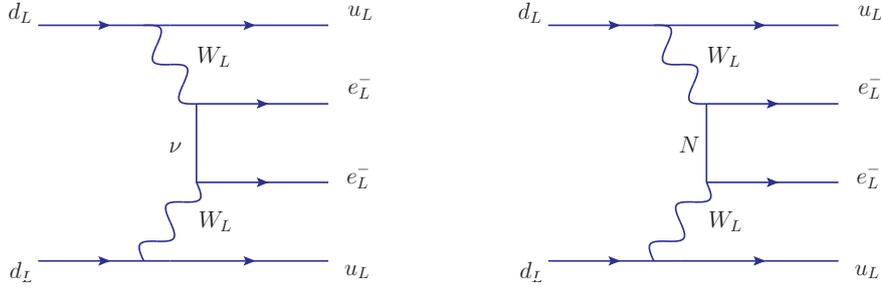


图 3-5 纯左手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变

Fig 3-5 Neutrinoless double beta decay from purely left-handed current contributions

(1) 两个左手流即 W_L 的组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程，如图3-5所示。由公式 (3-25)、(3-29)、(3-30) 可知，图3-5两个过程的贡献分别为：

$$\eta_\nu^{LL} = \sum U_{ei}^2 m_i \quad (3-31)$$

$$\eta_N^{LL} = \langle p^2 \rangle \sum \frac{T_{ei}^2}{M_i} \sim 10^{-10} \quad (3-32)$$

(2) 两个右手流即 W_R 的组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程，如图3-6所示。因为左右手 W 玻色子质量不同，图3-6两个过程的贡献需要多出一个玻色子质量相

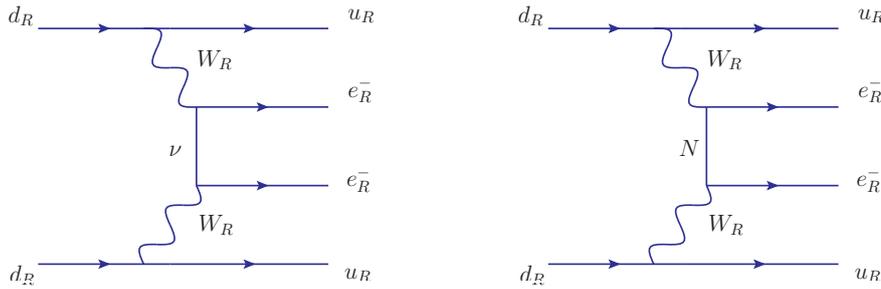


图 3-6 纯右手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变

Fig 3-6 Neutrinoless double beta decay from purely right-handed current contributions

关的因子。

$$\eta_\nu^{RR} \approx \frac{m_{W_L}^4}{m_{W_R}^4} \sum S_{ei}^{*2} m_i \sim 10^{-10} m_i \quad (3-33)$$

$$\eta_N^{RR} \approx \frac{m_{W_L}^4}{m_{W_R}^4} \langle p^2 \rangle \sum \frac{V_{ei}^{*2}}{M_i} \sim V_{ei}^{*2} \quad (3-34)$$

(3) 一个左手流一个右手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程，如图3-7所示。图3-7两个过程对无中微子双贝塔衰变的贡献分别为：

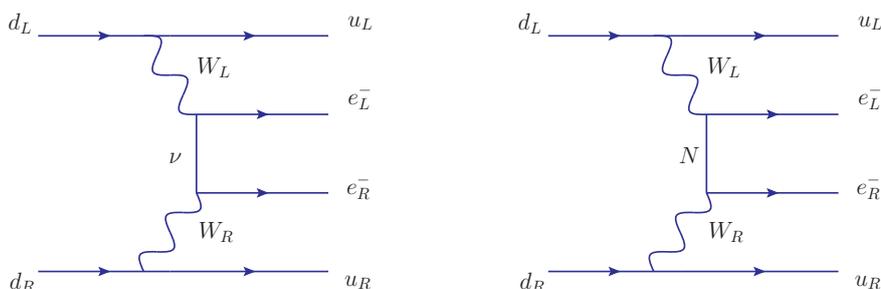


图 3-7 一个左手流一个右手流组成的由轻中微子和重中微子传递的无中微子双贝塔衰变

Fig 3-7 Neutrinoless double beta decay from a left-handed and a right-handed current contributions

$$\eta_{\nu}^{LR} \approx \frac{m_{W_L}^2}{m_{W_R}^2} \sum U_{ei} S_{ei}^{*2} m_i \sim 10^{-9} U_{ei} m_i \quad (3-35)$$

$$\eta_N^{LR} \approx \frac{m_{W_L}^2}{m_{W_R}^2} \langle p^2 \rangle \sum \frac{T_{ei} V_{ei}^{*2}}{M_i} \sim 10^{-5} V_{ei}^* \quad (3-36)$$

(4) 分别由左手和右手希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变过程。如图3-8所示。图3-8 中的过程由质量为 $m_{\Delta^{--}} > 10^{13} \text{eV}$ 的三重态传递，把重中微子换成三重态，

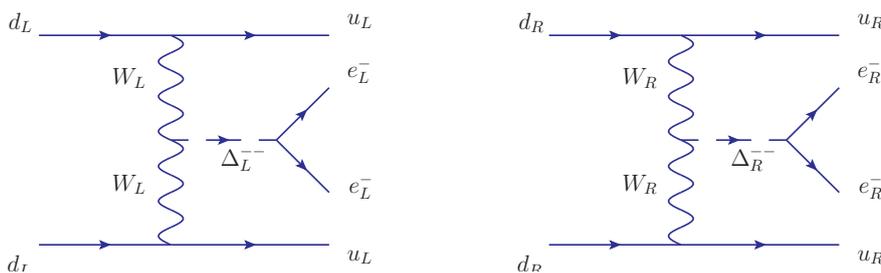


图 3-8 左手和右手希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变过程

Fig 3-8 Neutrinoless double beta decay from a left-handed and a right-handed triplet contributions

得到左手、右手三重态对无中微子双贝塔衰变的贡献分别为

$$\eta_{\Delta}^L \approx \sum \frac{U_{ei}^2 m_i m_e^2}{(m_{\Delta_L^{--}})^2} \lesssim 10^{-16} U_{ei}^2 m_i \quad (3-37)$$

$$\eta_{\Delta}^R \approx \frac{m_{W_L}^4}{m_{W_R}^4} \langle p^2 \rangle \sum \frac{V_{ei}^2 M_i}{(m_{\Delta_R^{--}})^2} \lesssim 10^{-2} V_{ei}^2 \quad (3-38)$$

(5) $W_L - W_R$ 混合的无中微子双贝塔衰变过程。如公式(3-23)所示, 这个过程由于 $W_L - W_R$ 混合, 对无中微子双贝塔衰变的贡献 η 项中会多出 $\tan\xi$, 所以会压低 10^{-4} 或者 $(10^{-4})^2$ 。例如图3-9所示

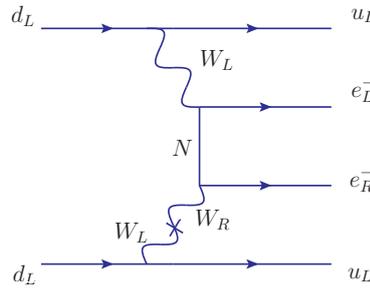


图 3-9 一种左手和右手 W 混合的无中微子双贝塔衰变过程

Fig 3-9 Neutrinoless double beta decay with left- and right-handed W mixing

例如对于图3-9 所示的 $W_L - W_R$ 混合过程,

$$\eta_N^{mixing} \approx \tan\xi \langle p^2 \rangle \sum \frac{T_{ei} V_{ei}^{*2}}{M_i} \sim 10^{-5} V_{ei}^* \quad (3-39)$$

综上, 比较左右对称模型中的各个无中微子双贝塔衰变过程, 可以看到对衰变的主要贡献来自于纯左手流传递轻中微子的过程和纯右手流传递重中微子的过程, 第一个过程即为上一章所述的标准表述。

3.3 中微子质量和无中微子双贝塔衰变

由第3.2.1节公式(3-19)可知, 当狄拉克质量项 m_D 非常小的时候,

$$m_\nu = M_L \propto M_R \quad (3-40)$$

这时中微子质量的产生由第二类跷跷板机制主导。在第二类跷跷板机制主导的左右对称模型, 混合矩阵 $U = V$, 且轻的中微子质量与重的中微子质量成正比, 可以表示为^[46]

$$M_i = \frac{M_{max}}{m_{max}} m_i \quad (3-41)$$

同时, 由上一节可知, 左右对称模型中对无中微子双贝塔衰变的主要贡献来自于纯左手流传递轻中微子的过程和纯右手流传递重中微子的过程。由于末态电子手征性不同, 所

以在第二类跷跷板机制主导的左右对称模型中，无中微子双贝塔衰变半衰期的倒数可以写为：

$$\begin{aligned}
[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} &= G^{0\nu} g_A^4 |M_{\nu}^{0\nu}|^2 \frac{1}{m_e^2} [|\sum U_{ei}^2 m_i|^2 + |\langle p^2 \rangle \frac{m_{WL}^4}{m_{WR}^4} \sum \frac{U_{ei}^2}{M_i}|^2] \\
&= G^{0\nu} g_A^4 |M_{\nu}^{0\nu}|^2 \frac{1}{m_e^2} [|m_{ee}^{\nu}|^2 + |m_{ee}^N|^2] \\
&= G^{0\nu} g_A^4 |M_{\nu}^{0\nu}|^2 \frac{1}{m_e^2} |m_{ee}^{\nu+N}|^2
\end{aligned} \tag{3-42}$$

与第二章公式 (2-33) 类似，上式 (3-42) 中的有效质量 $|m_{ee}^{\nu}|$ ，正质量顺序、反质量顺序的 $|m_{ee}^N|$ ，总有效质量 $|m_{ee}^{\nu+N}|$ 的大小是：

$$|m_{ee}^{\nu}| = |c_{12}^2 c_{13}^2 m_1 + s_{12}^2 c_{13}^2 m_2 e^{i\alpha} + s_{13}^2 m_3 e^{i\beta}| \tag{3-43}$$

$$|m_{ee}^N|_{NH} = \langle p^2 \rangle \frac{m_{WL}^4}{m_{WR}^4} \frac{1}{M_3} |c_{12}^2 c_{13}^2 \frac{m_3}{m_1} + s_{12}^2 c_{13}^2 \frac{m_3}{m_2} e^{i\alpha} + s_{13}^2 e^{i\beta}| \tag{3-44}$$

$$|m_{ee}^N|_{IH} = \langle p^2 \rangle \frac{m_{WL}^4}{m_{WR}^4} \frac{1}{M_2} |c_{12}^2 c_{13}^2 \frac{m_2}{m_1} + s_{12}^2 c_{13}^2 e^{i\alpha} + s_{13}^2 \frac{m_2}{m_3} e^{i\beta}| \tag{3-45}$$

$$|m_{ee}^{\nu+N}| = \sqrt{(|m_{ee}^{\nu}|^2 + |m_{ee}^N|^2)} \tag{3-46}$$

与公式 (2-33) 的取值类似，中微子振荡参数取表1-1中的最佳拟合的数值， α 、 β 取 0 到 2π 。对 $|m_{ee}^N|$ 的计算需要设定 $\langle p^2 \rangle$ 、 m_{WR} 和 M_{max} 的大小，取 $\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 200\text{MeV}$ ，并且利用文献 [45] 给出的限制，取 $m_{WR} = 3\text{TeV}$ ，正质量顺序的 M_3 和反质量顺序的 M_2 取 1TeV 。这样可以得到有效质量 m_{ee}^{ν} 、 m_{ee}^N 、 $m_{ee}^{\nu+N}$ 随最小中微子的变化。分别将正质量顺序和反质量顺序的三个有效质量画在一起，得到图3-10：

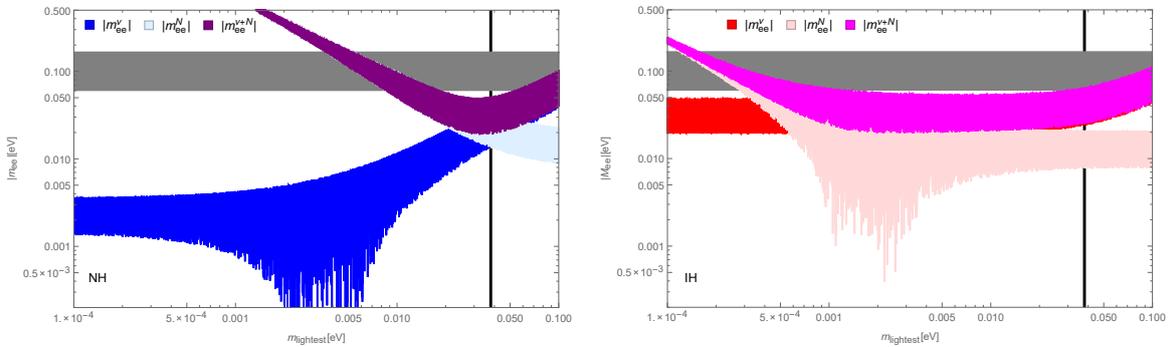


图 3-10 第二类跷跷板机制主导的左右对称模型的有效质量随最轻的中微子变化曲线 (彩图)。

Fig 3-10 (color online). Effective mass in left-right symmetric model with Type-II dominant seesaw.

与第2.2.2的图2-3类似，上图3-10中的灰色横条表示目前的中微子实验对有效质量的限制，右侧黑色竖线表示宇宙学观测对中微子质量的限制。图上的 m_{ee}^ν 曲线即为标准表述中的有效质量。

由上图3-10可以看到，在第二类跷跷板机制主导的左右对称模型中，对无中微子双贝塔衰变的贡献来自于轻中微子和重中微子的有效质量，对于左图的正质量顺序情况，无中微子双贝塔衰变由重中微子主导，引入 m_{ee}^N 会增强衰变率，导致这种情况在绝大部分中微子质量区间被实验排除；对于右图的反质量顺序情况，无中微子双贝塔衰变由轻中微子和重中微共同决定， m_{ee}^N 对衰变率的增加并不明显。

第四章 扩展的两希格斯模型中的中微子质量与无中微子双贝塔衰变

本章介绍一类扩展的两希格斯双重态模型，这种模型中无中微子双贝塔衰变不依赖于中微子质量，可以实现在中微子质量非常小的情况下，无中微子双贝塔衰变有明显的增强。本文首先介绍对两希格斯双重态模型的扩充是通过引入一个带单电荷和一个带两电荷的单态标量场来实现的，利用标量粒子与费米子场的 Yukawa 耦合项，可以得到标量粒子与费米子相互作用的情况，并且利用标量粒子势能项的信息，经过希格斯场的自发对称性破缺可以得到标量粒子的质量和对模型参数的限制；然后介绍在这类模型中，中微子的马约拉纳质量可以通过两圈图产生，中微子质量矩阵由两电荷标量粒子与右手轻子的 Yukawa 耦合完全确定，并且中微子会具有非常小的质量；在这种模型中，对无中微子双贝塔衰变的主要贡献来自于单圈图过程，并且这个过程可以令衰变率大到足够被下一代无中微子双贝塔衰变实验观测到；最后介绍其他实验对这个这个模型的限制，包括轻子相关的稀有衰变过程和希格斯粒子相关的过程。

4.1 扩展的两希格斯双重态模型

4.1.1 模型

两希格斯双重态模型^[47]是通过在标准模型中引入另外一个希格斯双重态实现的，本章通过引入两个标量粒子对两希格斯双重态模型扩充。在这类模型中费米子部分与第1.2节的标准模型相同：

$$\begin{aligned}
 q_L(3, 2, +\frac{1}{6}) &= \begin{bmatrix} u_L \\ d_L \end{bmatrix}, \quad u_R(3, 1, +\frac{2}{3}), \quad d_R(3, 1, -\frac{1}{3}), \\
 l_L(1, 2, -\frac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} \nu_L \\ e_L \end{bmatrix}, \quad e_R(1, 1, -1).
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

标量粒子部分包括一个带单电荷和一个带两电荷的单态和两个希格斯双重态，两个带电的标量粒子是

$$\delta^\pm(1, 1, \pm 1), \quad \xi^{\pm\pm}(1, 1, \pm 2), \tag{4-2}$$

两个希格斯双重态表示为

$$\phi_1(1, 2, +\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(1, 2, +\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 \end{bmatrix}. \quad (4-3)$$

在 Yukawa 耦合项中, 令每种费米子只与两个希格斯双重态中的一个耦合。这可以通过引入一些软破缺的分离对称性 S 实现, 例如这种对称性可以是 $S = Z_2$, 令两个希格斯双重态在 Z_2 对称变换下一个为偶一个为奇 (例如 $\phi_1 \rightarrow \phi_1, \phi_2 \rightarrow -\phi_2$), 通过调整右手费米子单态的奇偶性可以得到 Yukawa 耦合项有四种可能。 S 对称性也可以是一种全局对称性, 例如选择 $S = U(1)_X$, 可以取其中一个希格斯双重态为非平凡的。另外假设轻子数也是软破缺的, 在这种情况下两电荷的标量粒子带两个轻子数, 其他标量粒子不带轻子数。

四种可能的 Yukawa 耦合项情况如下:

第 1 种 右手的 up-type 夸克, down-type 夸克和轻子耦合到同一种希格斯两重态上,

$$\mathcal{L}_Y = -y'_u \bar{q}_L \tilde{\phi}_1 u_R - y'_d \bar{q}_L \phi_1 d_R - y'_e \bar{l}_L \phi_1 e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}; \quad (4-4)$$

第 2 种 右手的 up-type 夸克和 down-type 夸克耦合到同一种希格斯两重态上,

$$\mathcal{L}_Y = -y'_u \bar{q}_L \tilde{\phi}_1 u_R - y'_d \bar{q}_L \phi_1 d_R - y'_e \bar{l}_L \phi_2 e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}; \quad (4-5)$$

第 3 种 右手的 up-type 夸克和轻子耦合到同一种希格斯两重态上,

$$\mathcal{L}_Y = -y'_u \bar{q}_L \tilde{\phi}_1 u_R - y'_d \bar{q}_L \phi_2 d_R - y'_e \bar{l}_L \phi_1 e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}; \quad (4-6)$$

第 4 种 右手的 down-type 夸克和轻子耦合到同一种希格斯两重态上,

$$\mathcal{L}_Y = -y'_u \bar{q}_L \tilde{\phi}_1 u_R - y'_d \bar{q}_L \phi_2 d_R - y'_e \bar{l}_L \phi_2 e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}. \quad (4-7)$$

其中两电荷标量粒子 ξ 与电子的 Yukawa 耦合 f 满足 $f = f^T$ 。标量粒子的势能项写为:

$$\begin{aligned} V = & \mu_1^2 |\phi_1|^2 + \mu_2^2 |\phi_2|^2 + \mu_{12}^2 (\phi_1^\dagger \phi_2 + \text{H.c.}) + \lambda_1 |\phi_1|^4 + \lambda_2 |\phi_2|^4 + \lambda_{12} |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 \\ & + \lambda'_{12} \phi_1^\dagger \phi_2 \phi_2^\dagger \phi_1 + [\lambda''_{12} (\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + \text{H.c.}] + (\mu_\delta^2 + \lambda_{1\delta} |\phi_1|^2 + \lambda_{2\delta} |\phi_2|^2) |\delta|^2 + \lambda_\delta |\delta|^4 \\ & + (\mu_\xi^2 + \lambda_{1\xi} |\phi_1|^2 + \lambda_{2\xi} |\phi_2|^2) |\xi|^2 + \lambda_\xi |\xi|^4 + \lambda_{\delta\xi} |\delta|^2 |\xi|^2 + \frac{1}{2} \omega (\xi^{++} \delta^- \delta^- + \text{H.c.}) \\ & + \sigma_{12} (\delta^- \phi_1^T i \tau_2 \phi_2 + \text{H.c.}). \end{aligned} \quad (4-8)$$

4.1.2 标量粒子的质量

$\phi_{1,2}$ 可以经过旋转重新定义为 χ 和 φ ,

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi^+ \\ \chi^0 \end{bmatrix} = \phi_1 \cos \beta - \phi_2 \sin \beta, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{bmatrix} = \phi_1 \sin \beta + \phi_2 \cos \beta. \quad (4-9)$$

因为原来的希格斯标量场 $\phi_{1,2}$ 自发对称性破缺后的真空期望值可以取如下形式,

$$\langle \phi_{1(2)} \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v_{1(2)} \end{bmatrix}, \quad (4-10)$$

所以当旋转角 β 取为

$$\tan \beta = \frac{\langle \phi_1 \rangle}{\langle \phi_2 \rangle} = \frac{v_1}{v_2} \quad (4-11)$$

这时两个新定义的希格斯标量场 χ 和 φ 中只有一个可取非零的真空期望值。选择 φ 负责电弱对称性破缺, 则真空期望值可以选择如下形式:

$$\langle \chi \rangle = 0, \quad \langle \varphi \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{bmatrix} \quad \text{并且} \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \simeq 246 \text{ GeV}. \quad (4-12)$$

用 χ 和 φ 重写公式 (4-8) 标量粒子部分的势场为

$$\begin{aligned} V = & \mu_\varphi^2 |\varphi|^2 + M_\chi^2 |\chi|^2 + \kappa_1 |\varphi|^4 + \kappa_2 |\chi|^4 + \kappa_3 |\varphi|^2 |\chi|^2 + \kappa_4 \varphi^\dagger \chi \chi^\dagger \varphi + \kappa_5 [(\varphi^\dagger \chi)^2 + \text{H.c.}] \\ & + (M_\delta^2 + \kappa_{\varphi\delta} |\varphi|^2 + \kappa_{\chi\delta} |\chi|^2 + \kappa_{\varphi\chi\delta} \varphi^\dagger \chi + \text{H.c.}) |\delta|^2 + \kappa_\delta |\delta|^4 + (M_\xi^2 + \kappa_{\varphi\xi} |\varphi|^2 \\ & + \kappa_{\chi\xi} |\chi|^2 + \kappa_{\varphi\chi\xi} \varphi^\dagger \chi + \text{H.c.}) |\xi|^2 + \kappa_\xi |\xi|^4 + \kappa_{\delta\xi} |\delta|^2 |\xi|^2 + \frac{1}{2} \omega (\xi^{++} \delta^- \delta^- + \text{H.c.}) \\ & + \sigma (\delta^- \varphi^T i \tau_2 \chi + \text{H.c.}). \end{aligned} \quad (4-13)$$

这样四种情形的 Yukawa 耦合项可以分别展开为如下形式:

第 1 种

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -y_u \bar{q}_L \tilde{\varphi} u_R - y_d \bar{q}_L \varphi d_R - y_e \bar{l}_L \varphi e_R - (y_u \cot \beta) \bar{q}_L \tilde{\chi} u_R \\ & - (y_d \cot \beta) \bar{q}_L \chi d_R - (y_e \cot \beta) \bar{l}_L \chi e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}; \end{aligned} \quad (4-14)$$

第 2 种

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -y_u \bar{q}_L \tilde{\varphi} u_R - y_d \bar{q}_L \varphi d_R - y_e \bar{l}_L \varphi e_R - (y_u \cot \beta) \bar{q}_L \tilde{\chi} u_R \\ & - (y_d \cot \beta) \bar{q}_L \chi d_R + (y_e \tan \beta) \bar{l}_L \chi e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}; \end{aligned} \quad (4-15)$$

第 3 种

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y = & -y_u \bar{q}_L \tilde{\varphi} u_R - y_d \bar{q}_L \varphi d_R - y_e \bar{l}_L \varphi e_R - (y_u \cot \beta) \bar{q}_L \tilde{\chi} u_R \\ & + (y_d \tan \beta) \bar{q}_L \chi d_R - (y_e \cot \beta) \bar{l}_L \chi e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.};\end{aligned}\quad (4-16)$$

第 4 种

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y = & -y_u \bar{q}_L \tilde{\varphi} u_R - y_d \bar{q}_L \varphi d_R - y_e \bar{l}_L \varphi e_R - (y_u \cot \beta) \bar{q}_L \tilde{\chi} u_R \\ & + (y_d \tan \beta) \bar{q}_L \chi d_R + (y_e \tan \beta) \bar{l}_L \chi e_R - \frac{1}{2} f \xi^{--} \bar{e}_R e_R^c + \text{H.c.}.\end{aligned}\quad (4-17)$$

其中, 式 (4-14)–(4-17) 的 Yukawa 耦合 y_u 、 y_d 、 y_e 为标准模型中的 Yukawa 耦合, 是利用 Yukawa 耦合与质量的关系得到的, 各项的耦合系数可以利用式 (4-9) 得到。以第一种情形的右手 up-type 夸克相关的耦合为例, 首先得到:

$$y_u \frac{\nu}{\sqrt{2}} = M_u = y'_u \frac{\nu_1}{\sqrt{2}}.\quad (4-18)$$

即

$$y'_u = y_u \frac{\nu}{\nu_1} = y_u \frac{1}{\sin \beta}\quad (4-19)$$

最后可以得到:

$$\begin{aligned}-y'_u \bar{q}_L \tilde{\phi}_1 u_R &= -y_u \frac{1}{\sin \beta} \bar{q}_L (\cos \beta \tilde{\varphi} + \sin \beta \tilde{\chi}) u_R \\ &= -y_u \bar{q}_L \tilde{\varphi} u_R - (y_u \cot \beta) \bar{q}_L \tilde{\chi} u_R.\end{aligned}\quad (4-20)$$

在希格斯双重态 φ 获得真空期望值后, χ 和 φ 取为如下形式

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} \chi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_R^0 + i\chi_I^0) \end{bmatrix}.\quad (4-21)$$

公式 (4-13) 的标量粒子势能项会给出标量粒子的质量项:

$$\begin{aligned}V \supset & \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} m_{\chi_R^0}^2 (\chi_R^0)^2 + \frac{1}{2} m_{\chi_I^0}^2 (\chi_I^0)^2 + m_{\chi^\pm}^2 \chi^+ \chi^- + m_{\delta^\pm}^2 \delta^+ \delta^- \\ & + m_{\chi^\pm \delta^\pm}^2 (\chi^+ \delta^- + \text{H.c.}) + m_{\xi^\pm \pm}^2 \xi^{++} \xi^{--},\end{aligned}\quad (4-22)$$

其中,

$$\begin{aligned}
m_h^2 &= 2\kappa_1 v^2 = 125 \text{ GeV}, \\
m_{\chi_R^0}^2 &= M_\chi^2 + \left(\frac{1}{2}\kappa_3 + \frac{1}{2}\kappa_4 + \kappa_5 \right) v^2 > 0, \\
m_{\chi_I^0}^2 &= M_\chi^2 + \left(\frac{1}{2}\kappa_3 + \frac{1}{2}\kappa_4 - \kappa_5 \right) v^2 > 0, \\
m_{\chi^\pm}^2 &= M_\chi^2 + \frac{1}{2}\kappa_3 v^2, \\
m_{\delta^\pm}^2 &= M_\delta^2 + \frac{1}{2}\kappa_{\varphi\delta} v^2, \\
m_{\chi^\pm\delta^\pm}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}v\sigma, \\
m_{\xi^{\pm\pm}}^2 &= M_\xi^2 + \frac{1}{2}\kappa_{\varphi\xi} v^2 > 0.
\end{aligned} \tag{4-23}$$

从上式可以看到两个单电荷的标量粒子 χ^\pm 和 δ^\pm 存在混合, 则 χ^\pm 和 δ^\pm 的质量本征态为

$$\hat{\chi}^\pm = \chi^\pm \cos \theta - \delta^\pm \sin \theta, \quad \hat{\delta}^\pm = \chi^\pm \sin \theta + \delta^\pm \cos \theta. \tag{4-24}$$

质量本征态 $\hat{\chi}^\pm$ 和 $\hat{\delta}^\pm$ 的质量为

$$\begin{aligned}
m_{\hat{\chi}^\pm}^2 &= \frac{m_{\chi^\pm}^2 + m_{\delta^\pm}^2 + \sqrt{(m_{\chi^\pm}^2 - m_{\delta^\pm}^2)^2 + 2v^2\sigma^2}}{2} > 0, \\
m_{\hat{\delta}^\pm}^2 &= \frac{m_{\chi^\pm}^2 + m_{\delta^\pm}^2 - \sqrt{(m_{\chi^\pm}^2 - m_{\delta^\pm}^2)^2 + 2v^2\sigma^2}}{2} > 0.
\end{aligned} \tag{4-25}$$

混合角 θ 为:

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{2}v\sigma}{m_{\chi^\pm}^2 - m_{\delta^\pm}^2}. \tag{4-26}$$

利用上式还可以得到

$$\sin^2 2\theta = \frac{2v^2\sigma^2}{(m_{\hat{\chi}^\pm}^2 - m_{\hat{\delta}^\pm}^2)^2} = \frac{2 \left(\frac{v^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right) \left(\frac{\sigma^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right)}{\left(\frac{m_{\chi^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} - \frac{m_{\delta^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right)^2} \leq 1. \tag{4-27}$$

除了中微子以外的费米子可以通过与希格斯场 φ 的 Yukawa 耦合获得狄拉克质量, 质量大小如下所示

$$\begin{aligned}\hat{m}_u &= \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{y}_u = \text{diag}\{m_u, m_c, m_t\} \simeq \text{diag}\{1-3 \text{ MeV}, 4.2 \text{ GeV}, 172 \text{ GeV}\} \\ \hat{m}_d &= \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{y}_d = \text{diag}\{m_d, m_s, m_b\} \simeq \text{diag}\{2-6 \text{ MeV}, 100 \text{ MeV}, 4.2 \text{ GeV}\} \\ \hat{m}_e &= \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{y}_e = \text{diag}\{m_e, m_\mu, m_\tau\} \simeq \text{diag}\{0.511 \text{ MeV}, 107 \text{ MeV}, 1.78 \text{ GeV}\}\end{aligned}\quad (4-28)$$

微扰条件要求 $|\hat{y}'_t| < \sqrt{4\pi}$, $|\hat{y}'_b| < \sqrt{4\pi}$ 和 $|\hat{y}'_\tau| < \sqrt{4\pi}$, 这会对旋转角 β 做出限制。例如对于第一种情形, 由式 (4-18) 可得

$$\hat{y}'_\alpha = \frac{\sqrt{2}m_\alpha}{v_1} = \frac{\sqrt{2}m_\alpha}{v\sin\beta} < \sqrt{4\pi}, \quad (4-29)$$

当 α 表示 t 夸克时可以得到对这种情况下的 β 的限制。同理可以得到四种情形下对 $\tan\beta$ 或 $\cot\beta$ 的限制为:

第 1 种

$$\cot\beta \lesssim 3.3 \quad \text{对于} \quad \cot\beta < \sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_t^2} - 1}; \quad (4-30)$$

第 2 种

$$0.3 \lesssim \tan\beta \lesssim 346 \quad \text{对于} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_t^2} - 1}} < \tan\beta < \sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_\tau^2} - 1}; \quad (4-31)$$

第 3 种

$$6.8 \times 10^{-3} \lesssim \cot\beta \lesssim 3.3 \quad \text{对于} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_b^2} - 1}} < \cot\beta < \sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_t^2} - 1}; \quad (4-32)$$

第 4 种

$$0.3 \lesssim \tan\beta \lesssim 147 \quad \text{对于} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_t^2} - 1}} < \tan\beta < \sqrt{\frac{2\pi v^2}{m_b^2} - 1}. \quad (4-33)$$

另外, 公式 (4-13) 标量场势能中的 ω 和 σ 项也应该符合微扰的要求, 粗略的限制为

$$\omega \lesssim \max\{M_\xi, M_\delta\}, \quad \sigma \lesssim \max\{M_\delta, M_\chi\}. \quad (4-34)$$

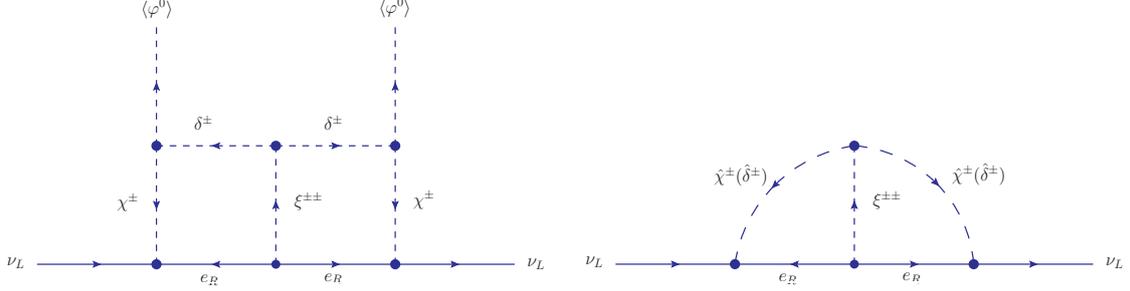


图 4-1 两圈图的中微子质量，左图为弱本征态右图为质量本征态

Fig 4-1 Two-loop diagrams for neutrino masses, the left one is in the weak eigenbasis, the right one is in the mass eigenbasis.

4.2 中微子质量

如图4-1所示，中微子的马约拉纳质量项可以从两圈图得到，

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}m_\nu \bar{\nu}_L \nu_L^c + \text{H.c.} \quad (4-35)$$

得到的中微子质量矩阵有如下形式：

$$m_\nu^{2\text{-loop}} \propto \hat{y}_e f \hat{y}_e \propto \hat{m}_e f \hat{m}_e. \quad (4-36)$$

如图4-2，三圈图对中微子质量也有贡献，

$$m_\nu^{3\text{-loop}} \propto \hat{m}_e f \hat{m}_e. \quad (4-37)$$

但是三圈图的贡献要比式（4-36）的两圈图贡献小得多，即

$$m_\nu \simeq m_\nu^{2\text{-loop}} \gg m_\nu^{3\text{-loop}}. \quad (4-38)$$

由图4-1的右图可以看到，产生中微子质量的两圈图有四个。轻子、矢量玻色子和标量粒子 $\xi^{\pm\pm}$ 与质量本征态的标量粒子 $\hat{\chi}^\pm$ 和 $\hat{\delta}^\pm$ 组成的顶点的费曼规则由它们与弱本征态的 χ^\pm 和 δ^\pm 的耦合项得到。例如， $\xi^{\pm\pm}$ 与 $\hat{\chi}^\pm$ 和 $\hat{\delta}^\pm$ 耦合以及 W 、 χ_R^0 、 χ_L^0 与 $\hat{\chi}^\pm$ 和 $\hat{\delta}^\pm$ 的耦合分别由 $\frac{1}{2}\omega\xi^{++}\delta^-\delta^- + h.c.$ 项和 χ 的动能项 $(D_\mu\chi)^\dagger(D^\mu\chi)$ 得到：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\omega\xi^{++}\delta^-\delta^- &= -\frac{1}{2}\omega\xi^{++}(-\sin\theta\hat{\chi}^- + \cos\theta\hat{\delta}^-)(-\sin\theta\hat{\chi}^- + \cos\theta\hat{\delta}^-) \\ &= -\frac{1}{2}\omega\xi^{++}(\sin^2\theta\hat{\chi}^-\hat{\chi}^- + \cos^2\theta\hat{\delta}^-\hat{\delta}^- - \sin 2\theta\hat{\chi}^-\hat{\delta}^-); \end{aligned} \quad (4-39)$$

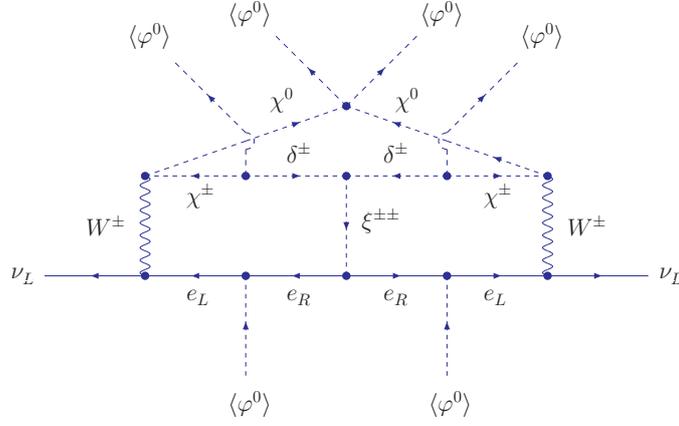


图 4-2 三圈图的中微子马约拉纳质量

Fig 4-2 Three-loop diagrams for neutrino masses

$$\begin{aligned}
(D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) &\subset -\frac{ig}{2} [(\partial_\mu \chi^-) W^+ (\chi_R^0 + i\chi_I^0) - \chi^- W^+ \partial_\mu (\chi_R^0 + i\chi_I^0)] + h.c. \\
&\subset -\frac{ig}{2} \{[\partial_\mu (\cos\theta \hat{\chi}^- + \sin\theta \hat{\delta}^-)] W^+ (\chi_R^0 + i\chi_I^0) - (\cos\theta \hat{\chi}^- \\
&\quad + \sin\theta \hat{\delta}^-) W^+ \partial_\mu (\chi_R^0 + i\chi_I^0) + h.c. \\
&\subset -\frac{ig}{2} \{ \cos\theta [(\partial_\mu \hat{\chi}^-) W^+ (\chi_R^0 + i\chi_I^0) - \hat{\chi}^- W^+ \partial_\mu (\chi_R^0 + i\chi_I^0)] \\
&\quad - \sin\theta [(\partial_\mu \hat{\delta}^-) W^+ (\chi_R^0 + i\chi_I^0) - \hat{\delta}^- W^+ \partial_\mu (\chi_R^0 + i\chi_I^0)] \} \\
&\quad + h.c. .
\end{aligned} \tag{4-40}$$

计算费曼图4-1可以得到中微子质量

$$m_\nu = \frac{c I_2 \sin^2 2\theta}{2(16\pi^2)^2} \hat{y}_e f \hat{y}_e \omega = \frac{c I_2 \sin^2 2\theta}{2^8 \pi^4} \frac{\hat{m}_e f \hat{m}_e \omega}{v^2} \tag{4-41}$$

其中,

$$c = \begin{cases} \cot^2 \beta & \text{对于第 1,3 种,} \\ \tan^2 \beta & \text{对于第 2,4 种.} \end{cases} \tag{4-42}$$

式 (4-41) 中的 I_2 包含四个两圈的积分,

$$\begin{aligned}
I_2 \left(\frac{m_{\delta^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2}, \frac{m_{\chi^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right) &= F_2 \left(\frac{m_{\delta^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2}, \frac{m_{\delta^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right) + F_2 \left(\frac{m_{\chi^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2}, \frac{m_{\chi^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right) \\
&\quad - 2F_2 \left(\frac{m_{\chi^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2}, \frac{m_{\delta^\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \right),
\end{aligned} \tag{4-43}$$

其中, $F_2(x_1^2, x_2^2)$ 是两圈积分, 具体形式为

$$F_2(x_1^2, x_2^2) = (16\pi^2)^2 \int \frac{d^4 \tilde{q}_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \tilde{q}_2}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{\tilde{q}_1^2 (\tilde{q}_1^2 - x_1^2) \tilde{q}_2^2 (\tilde{q}_2^2 - x_2^2) [(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1]}, \quad (4-44)$$

上式中的 \tilde{q}_1 、 $\tilde{q}_{1,2}$ 定义为 $\tilde{q}_{1,2} = q_{1,2}/m_{\xi^{\pm\pm}}$ 。

上式的计算较为复杂, 基本思路是将其分解为几个容易计算的部分。首先利用如下关系

$$\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 + \tilde{q}_2 \tilde{q}_1 = 2\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \quad (4-45)$$

$$\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 = \frac{1}{2} \{ [(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1] - \tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2 + 1 \} \quad (4-46)$$

式 (4-44) 可以变换为

$$\begin{aligned} F_2(x_1^2, x_2^2) = & \frac{1}{2} \int d^4 \tilde{q}_1 d^4 \tilde{q}_2 \left\{ \frac{1}{\tilde{q}_1^2 (\tilde{q}_1^2 - x_1^2) \tilde{q}_2^2 (\tilde{q}_2^2 - x_2^2)} - \frac{1}{(\tilde{q}_1^2 - x_1^2) \tilde{q}_2^2 (\tilde{q}_2^2 - x_2^2)} \right. \\ & \times \frac{1}{[(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1]} - \frac{1}{\tilde{q}_1^2 (\tilde{q}_1^2 - x_1^2) (\tilde{q}_2^2 - x_2^2) [(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1]} \\ & \left. + \frac{1}{\tilde{q}_1^2 (\tilde{q}_1^2 - x_1^2) \tilde{q}_2^2 (\tilde{q}_2^2 - x_2^2) [(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1]} \right\} \quad (4-47) \end{aligned}$$

其中, 上式中的第一项容易计算, 第四项在文献 [48] 有具体结果, 第二项和第三项结构相同。下面对第二项和第三项进行处理。采用文献 [48] 的记号, 例如第二项用如下记号表示:

$$-\frac{1}{2} \int d^4 \tilde{q}_1 d^4 \tilde{q}_2 \frac{1}{(\tilde{q}_1^2 - x_1^2) \tilde{q}_2^2 (\tilde{q}_2^2 - x_2^2) [(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)^2 - 1]} = -\frac{1}{2} \langle x_1 | 0, x_2 | 1 \rangle \quad (4-48)$$

分式相乘写成分式相减, 则第二项可以变换为:

$$-\frac{1}{2} \langle x_1 | 0, x_2 | 1 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{x_2^2} \{ \langle x_1 | x_2 | 1 \rangle - \langle x_1 | 0 | 1 \rangle \} \quad (4-49)$$

另外, 对于任意 $\langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle$ 形式的积分公式, 可以作如下变换:

$$\begin{aligned} \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle &= \frac{1}{8} \left(\frac{\partial q_{1i}}{\partial q_{1i}} + \frac{\partial q_{1i}}{\partial q_{1i}} \right) \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle \\ &= -\frac{1}{8} \left(p_1 \frac{\partial}{p_1} \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle + p_2 \frac{\partial}{p_2} \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle + m_1^2 \langle m_1, m_1 | m_2 | m_3 \rangle \right. \\ & \quad \left. + m_2^2 \langle m_1 | m_2, m_2 | m_3 \rangle + m_3^2 \langle m_1 | m_2 | m_3, m_3 \rangle \right) \quad (4-50) \end{aligned}$$

这样可以得到如下变换公式：

$$\begin{aligned} \langle m_1 | m_2 | m_3 \rangle &= m_1^2 \langle m_1, m_1 | m_2 | m_3 \rangle + m_2^2 \langle m_1 | m_2, m_2 | m_3 \rangle \\ &\quad + m_3^2 \langle m_1 | m_2 | m_3, m_3 \rangle \end{aligned} \quad (4-51)$$

利用上式 (4-51) 和式 (4-49)，可以把公式 (4-47) 的第二项变换为如下形式：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \langle x_1 | 0, x_2 | 1 \rangle &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x_2^2} \{ x_1^2 \langle x_1, x_1 | x_2 | 1 \rangle + x_2^2 \langle x_1 | x_2, x_2 | 1 \rangle \\ &\quad + \langle x_1 | x_2 | 1, 1 \rangle - x_1^2 \langle x_1, x_1 | 0 | 1 \rangle \\ &\quad - \langle x_1 | 0 | 1, 1 \rangle \}. \end{aligned} \quad (4-52)$$

同理可得对公式 (4-47) 的第三项 $-1/2 \langle 0 | x_1 | x_2 | 1 \rangle$ 的变换。这样第二项和第三项化都可以分解为 $\langle x_1, x_1 | x_2 | x_3 \rangle$ 的形式，这种形式会方便直接计算，具体结果可以采用文献 [48–51] 的相关结果。

另外，对两圈图积分的计算可以借助相关的软件包。例如，对于多圈图的数值计算，可以使用 SecDec^[52]、FIESTA 等软件包；对于解析计算过程中对积分的化简和分解，可以借助 9.0 版本以上的 FeynCalc^[53]。

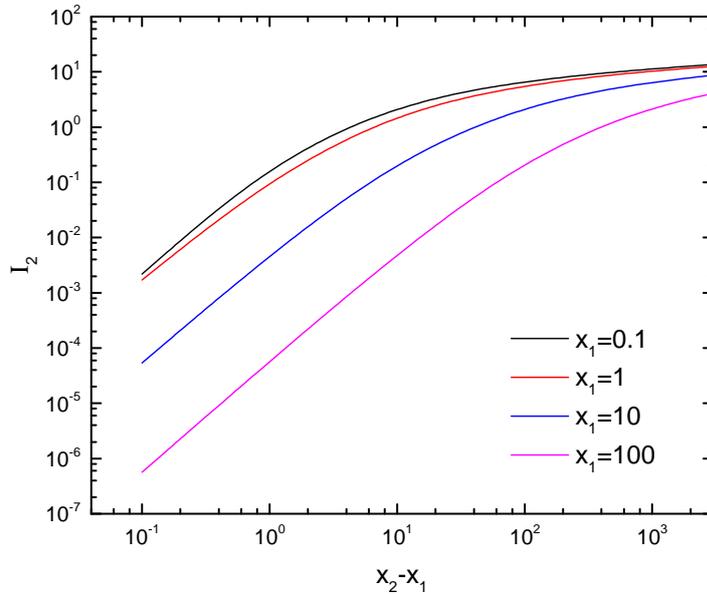


图 4-3 式 (4-43) 的两圈图积分结果 (彩图)

Fig 4-3 (color online) The two-loop integral in Eq.(4-43)

式(4-43)中的 $I_2(x_1^2, x_2^2)$ 计算结果如图4-3所示。对给定的 x_1 , $I_2(x_1^2, x_2^2)$ 随 $x_2 - x_1$ 变化。曲线从上到下依次对应 $x_1 = 0.1$, $x_1 = 1$, $x_1 = 10$ 和 $x_1 = 100$ 。可以看到, I_2 可以在 $\mathcal{O}(1)$ 数量级。另外, 虽然图中 I_2 随 $x_2 - x_1$ 的增大而增大, 但是由式(4-27)可以看到, $x_2 - x_1$ 的增大会导致 $\sin^2 2\theta$ 的减小, 这样会导致 $I_2 \sin^2 2\theta$ 不能足够大, 而且由式(4-34)可以看到, ω 也不能足够大, 所以也不能通过调节 ω 来增大公式(4-41)的中微子质量。

最后, 中微子的质量矩阵可以由对称的 Yukawa 耦合 ($f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$) 完全确定。得到中微子质量矩阵为:

$$m_{\alpha\beta} \equiv (m_\nu)_{\alpha\beta} = \frac{cI_2 \sin^2 2\theta \omega m_\alpha m_\beta}{2^8 \pi^4 v^2} f_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau). \quad (4-53)$$

利用前面得到的各参数的取值范围, 取 $c \sim 1$ 、 $I_2 \sim 1$ 、 $\sin^2 2\theta \sim 1$ 、 $\omega \sim 1 \text{ TeV}$, 这样可以从 Yukawa 耦合得到中微子有效质量, 或者根据有效质量确定 Yukawa 耦合的数值:

$$m_{ee} = 6 \times 10^{-4} \text{ eV} \left(\frac{f_{ee}}{\sqrt{4\pi}} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right), \quad (4-54)$$

$$m_{\mu\mu} = 0.1 \text{ eV} \left(\frac{f_{\mu\mu}}{0.013} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right), \quad (4-55)$$

$$m_{\tau\tau} = 0.1 \text{ eV} \left(\frac{f_{\tau\tau}}{5 \times 10^{-5}} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right), \quad (4-56)$$

$$m_{e\mu} = m_{\mu e} = 0.1 \text{ eV} \left(\frac{f_{e\mu}}{2.9} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right), \quad (4-57)$$

$$m_{e\tau} = m_{\tau e} = 0.1 \text{ eV} \left(\frac{f_{e\tau}}{0.17} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right), \quad (4-58)$$

$$m_{\mu\tau} = m_{\tau\mu} = 0.1 \text{ eV} \left(\frac{f_{\mu\tau}}{8 \times 10^{-3}} \right) \left(\frac{c}{1} \right) \left(\frac{I_2}{1} \right) \left(\frac{\sin^2 2\theta}{1} \right) \left(\frac{\omega}{1 \text{ TeV}} \right). \quad (4-59)$$

反过来, Yukawa 耦合 f 由中微子质量矩阵参数化的形式如下:

$$f = \frac{2^8 \pi^4 v^2}{cI_2 \sin^2 2\theta} \frac{1}{\hat{m}_\alpha} m_\nu \frac{1}{\hat{m}_\beta} \frac{1}{\omega}. \quad (4-60)$$

4.3 无中微子双贝塔衰变

在这类扩展的两希格斯双重态模型中, 由于不存在树图水平的中微子质量项, 所以不存在由中微子传递的无中微子双贝塔衰变衰变过程。但是由于存在轻子数破缺 $\Delta L =$

± 2 的过程，所以无中微子双贝塔衰变仍然会以不同的方式实现。下面分析这类模型中无中微子双贝塔衰变过程的大小。

由马约拉纳中微子传递的无中微子双贝塔衰变过程的有效算符如下所示：

$$\mathcal{O}^{\text{standard}} = \frac{g^4}{2m_W^4} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \bar{u}_L \gamma^\nu d_L \bar{e}_L \gamma_\mu \gamma_\nu e_L^c \frac{m_{ee}}{q^2} = \frac{1}{\Lambda_2^5} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \bar{u}_L \gamma^\nu d_L \bar{e}_L \gamma_\mu \gamma_\nu e_L^c \quad (4-61)$$

其中

$$\frac{1}{\Lambda_2^5} = 16 G_F^2 \frac{m_{ee}}{q^2}. \quad (4-62)$$

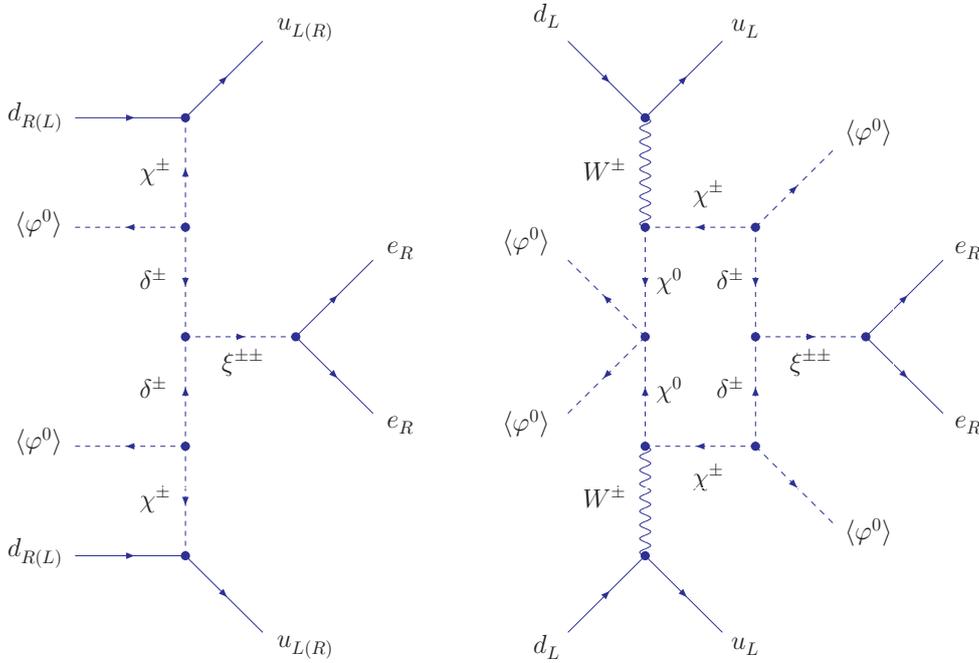


图 4-4 树图和单圈图的无中微子双贝塔衰变

Fig 4-4 Tree and one-loop diagrams for neutrinoless double beta decay

如图4-4所示，在这个扩展的两希格斯双重态模型中，无中微子双贝塔衰由一个树图和一个单圈图产生。对于树图过程，把弱本征态的标量粒子 χ^\pm, δ^\pm 变换到质量本征态 $\hat{\chi}^\pm, \hat{\delta}^\pm$ ，可以看到这个图表示四个图，图上的两个单电荷传播子可能表示 $\hat{\chi}^\pm - \hat{\chi}^\pm, \hat{\delta}^\pm - \hat{\delta}^\pm, \hat{\chi}^\pm - \hat{\delta}^\pm, \hat{\delta}^\pm - \hat{\chi}^\pm$ 。同理，对于单圈图过程，由式(4-40)可以看到，与左手流 W_L^\pm 有关的顶点包括 $\hat{\chi}^\pm W^\mp \chi_R^0, \hat{\chi}^\pm W^\mp \chi_I^0, \hat{\delta}^\pm W^\mp \chi_R^0, \hat{\delta}^\pm W^\mp \chi_I^0$ ，连接 W_L 的传播子可以是非标准模型希格斯双重态中的实标量粒子 χ_R^0 或者虚标量粒子 χ_I^0 ，所以这个单圈图表示八个图。

取 $q \sim 100\text{MeV}$ 、 $\Delta m_{\pm} \sim 1\text{TeV}$ 、 $m_{\xi} \sim 1\text{TeV}$ 、 $\chi^{\pm} \sim 1\text{TeV}$ 、 $\delta^{\pm} \sim 1\text{TeV}$ 。则树图过程的有效算符为：

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{\text{tree}} &= \frac{1}{\Lambda_{01}^5} \bar{u}_L d_R \bar{u}_L d_R \bar{e}_R^c e_R + \frac{1}{\Lambda_{02}^5} \bar{u}_R d_L \bar{u}_R d_L \bar{e}_R^c e_R + \frac{1}{\Lambda_{03}^5} \bar{u}_L d_R \bar{u}_R d_L \bar{e}_R^c e_R \\
\frac{1}{\Lambda_{01}^5} &= \frac{1}{4} \hat{y}_d^2 f_{ee} c_1 \sin^2 2\theta \frac{\omega}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \left(\frac{1}{m_{\chi^{\pm}}^2} - \frac{1}{m_{\delta^{\pm}}^2} \right)^2 = \frac{2^7 \pi^4}{I_2} \frac{c_1}{c} \frac{m_d^2}{m_e^2} \frac{m_{ee} \Delta m_{\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2 m_{\chi^{\pm}}^2 m_{\delta^{\pm}}^2} \\
&= 2 \times \left(\frac{c_1}{c} \right) \left(\frac{m_d}{3\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{q}{100\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{\Delta m_{\pm}^2}{1\text{TeV}^2} \right) \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\xi^{\pm\pm}}} \right)^2 \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\chi^{\pm}}} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\delta^{\pm}}} \right)^2 \frac{1}{\Lambda_2^5}, \\
\frac{1}{\Lambda_{02}^5} &= \frac{1}{4} \hat{y}_u^2 f_{ee} c_2 \sin^2 2\theta \frac{\omega}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \left(\frac{1}{m_{\chi^{\pm}}^2} - \frac{1}{m_{\delta^{\pm}}^2} \right)^2 = \frac{2^7 \pi^4}{I_2} \frac{c_2}{c} \frac{m_u^2}{m_e^2} \frac{m_{ee} \Delta m_{\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2 m_{\chi^{\pm}}^2 m_{\delta^{\pm}}^2} \\
&= 0.5 \times \left(\frac{c_2}{c} \right) \left(\frac{m_u}{1.5\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{q}{100\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{\Delta m_{\pm}^2}{1\text{TeV}^2} \right) \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\xi^{\pm\pm}}} \right)^2 \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\chi^{\pm}}} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\delta^{\pm}}} \right)^2 \frac{1}{\Lambda_2^5}, \\
\frac{1}{\Lambda_{03}^5} &= \frac{1}{4} \hat{y}_d \hat{y}_u f_{ee} c_3 \sin^2 2\theta \frac{\omega}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \left(\frac{1}{m_{\chi^{\pm}}^2} - \frac{1}{m_{\delta^{\pm}}^2} \right)^2 = \frac{2^7 \pi^4}{I_2} \frac{c_3}{c} \frac{m_d m_u}{m_e^2} \frac{m_{ee} \Delta m_{\pm}^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2 m_{\chi^{\pm}}^2 m_{\delta^{\pm}}^2} \\
&= 1 \times \left(\frac{c_3}{c} \right) \left(\frac{m_d}{3\text{MeV}} \right) \left(\frac{m_u}{1.5\text{MeV}} \right) \left(\frac{q}{100\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{\Delta m_{\pm}^2}{1\text{TeV}^2} \right) \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\xi^{\pm\pm}}} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\chi^{\pm}}} \right)^2 \left(\frac{1\text{TeV}}{m_{\delta^{\pm}}} \right)^2 \frac{1}{\Lambda_2^5}, \tag{4-63}
\end{aligned}$$

以上各式中的 $c_{1,2,3}$ 定义为

$$(c_1, c_2, c_3) = \begin{cases} (c, c, c) & \text{对于第 1 种,} \\ (\frac{1}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}) & \text{对于第 2 种,} \\ (\frac{1}{c}, c, 1) & \text{对于第 3 种,} \\ (c, \frac{1}{c}, 1) & \text{对于第 4 种,} \end{cases} \tag{4-64}$$

其中, c 的定义见式 (4-42)。

由图4-4中的单圈图可以得到单圈图无中微子双贝塔衰变的有效算符:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{1\text{-loop}} &= \frac{1}{\Lambda_1^5} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \bar{u}_L \gamma_\mu d_L \bar{e}_R e_R^c \\ \frac{1}{\Lambda_1^5} &= \frac{1}{27\pi^2} \frac{g^4}{m_W^4} \frac{\omega}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} f_{ee} I_1 \sin^2 2\theta = 64\pi^2 G_F^2 \frac{v^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \frac{m_{ee}}{m_e^2} \frac{I_1}{I_2} \frac{1}{c} \\ &= 9 \times 10^4 \times \left(\frac{q}{100 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{1 \text{ TeV}}{m_{\xi^{\pm\pm}}} \right)^2 \left(\frac{I_1}{1} \right) \left(\frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{1}{c} \right) \frac{1}{\Lambda_2^5}. \quad (4-65)\end{aligned}$$

上式用到关系式:

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}\nu^2} = \frac{\sqrt{2}g^2}{m_W^2}. \quad (4-66)$$

其中, 式 (4-65) 中的 I_1 是一个单圈积分, 由下面的计算可以看到 I_1 的数值可取为 $I_1 \sim 1$ 。 I_1 实际上是由八个单圈积分组合而成,

$$I_1 = I_{1R} \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2} \right) - I_{1I} \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2} \right), \quad (4-67)$$

$$I_{1R} \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2} \right) = F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2} \right) + F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2} \right) - 2F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_R^0}^2} \right) \quad (4-68)$$

$$I_{1I} \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2} \right) = F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2} \right) + F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2} \right) - 2F_1 \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2}, \frac{m_{\tilde{\delta}^\pm}^2}{m_{\chi_I^0}^2} \right) \quad (4-69)$$

其中单圈积分 $F_1(a, b)$ 的形式为:

$$F_1(a, b) = (16\pi)^2 \int \frac{d^4 \tilde{q}}{(2\pi)^4} \frac{-i}{(\tilde{q}^2 - 1)(\tilde{q}^2 - a)(\tilde{q}^2 - b)} \quad (4-70)$$

因为 I_1 的发散项会通过 F_1 四项相加减而抵消掉, 则上式去掉发散项和常数项的部分得到:

$$F_1(a, b) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln(1 - x - y + ax + by). \quad (4-71)$$

式 (4-67) 的单圈积分结果如图4-5所示, 对于给定的 x_1 , 选择 $\tilde{I}_1(x_1^2, x_2^2) \equiv I_{1R}(x_1^2, x_2^2)$ 或者 $\tilde{I}_1(x_1^2, x_2^2) \equiv I_{1I}(x_1^2, x_2^2)$ 随 $x_2 - x_1$ 变化, 曲线从上之下依次为 $x_1 = 0.1$, $x_1 = 1$, $x_1 = 10$ 和 $x_1 = 100$ 。可以看到, $I_1 = I_{1R} - I_{1I}$ 可以在 $\mathcal{O}(1)$ 数量级。

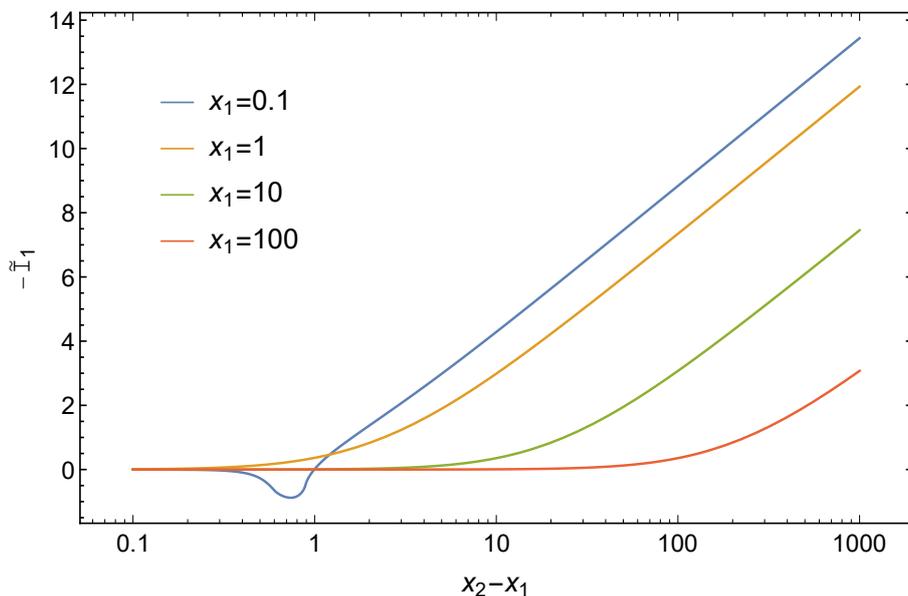


图 4-5 式 (4-67) 的单圈积分结果 (彩图)

Fig 4-5 (color online) The one-loop integral in Eq.(4-67)

综上, 可以从式 (4-61)、(4-63) 和 (4-65) 的相对数量级估计中得到在这种模型的无中微子双贝塔衰变过程中, 单圈图过程可以占主导, 且比起标准的无中微子双贝塔衰变过程有显著增强, 即

$$\frac{1}{\Lambda_1^5} \gg \frac{1}{\Lambda_{01}^5}, \frac{1}{\Lambda_{02}^5}, \frac{1}{\Lambda_{03}^5}, \frac{1}{\Lambda_2^5}, \quad (4-72)$$

对这种无中微子双贝塔衰变由单圈图主导的过程, 可以得到衰变的半衰期的倒数为:

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} |\eta_N M_N^{0\nu}|^2 \quad (4-73)$$

其中,

$$\eta_N = \frac{16\pi^2}{c} \frac{I_1}{I_2} \frac{m_{ee} m_p v^2}{m_{\xi_{\pm\pm}}^2 m_e^2}, \quad (4-74)$$

利用文献 [54] 的数据, 核矩阵元为:

$$M_N^{0\nu} = \frac{m_p}{m_e} \left[\left(\frac{f_V}{f_A} \right)^2 M_{F,N} - M_{GT,N} \right] \quad (4-75)$$

其中, 取 $f_V \approx 1$, $f_A \approx 1.26$ 。对于 ^{136}Xe , 取 $G_{0\nu} = 3.56 \times 10^{-14} \text{ yr}^{-1}$, $M_{GT,N} = 0.113$, $M_{F,N} = -0.0407$; 对于 ^{76}Ge , 取 $G_{0\nu} = 5.77 \times 10^{-15} \text{ yr}^{-1}$, $M_{GT,N} = 0.058$, $M_{F,N} = -0.0203$ 。

可以取 $|m_{ee}| \sim 10^{-7} \text{eV}$ ，这样计算得到 ^{136}Xe 和 ^{76}Ge 的无中微子双贝塔衰变半衰期的数值为：

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{136}\text{Xe}) = 4.80 \times 10^{26} \text{ yr} \times \left(\frac{10^{-7} \text{ eV}}{|m_{ee}|} \right)^2 \left(\frac{m_{\xi^{\pm\pm}}}{1 \text{ TeV}} \right)^4 \left(\frac{c}{1} \right)^2 \left(\frac{I_2}{1} \right)^2 \left(\frac{1}{I_1} \right)^2 \quad (4-76)$$

$$T_{1/2}^{0\nu}(^{76}\text{Ge}) = 1.67 \times 10^{26} \text{ yr} \times \left(\frac{10^{-6} \text{ eV}}{|m_{ee}|} \right)^2 \left(\frac{m_{\xi^{\pm\pm}}}{1 \text{ TeV}} \right)^4 \left(\frac{c}{1} \right)^2 \left(\frac{I_2}{1} \right)^2 \left(\frac{1}{I_1} \right)^2 \quad (4-77)$$

由第二章第2.3节的内容可知，目前的实验对 ^{136}Xe 和 ^{76}Ge 的无中微子双贝塔衰变半衰期的限制为 $T_{1/2}^{0\nu}(^{136}\text{Xe}) > 3.4 \times 10^{25} \text{ yr}$ 和 $T_{1/2}^{0\nu}(^{76}\text{Ge}) > 3.0 \times 10^{25} \text{ yr}$ 。下一代无中微子双贝塔衰变实验可以达到的灵敏度为 $T_{1/2}^{0\nu}(^{136}\text{Xe}) > 6.0 \times 10^{27} \text{ yr}$ 和 $T_{1/2}^{0\nu}(^{76}\text{Ge}) > 10^{27} \text{ yr}$ 。

从上面的内容可以看到，在这类扩展的两希格斯双重态模型中，公式 (4-53) 中微子质量矩阵由对称的 Yukawa 耦合 $f_{\alpha\beta}$ 完全确定，并且中微子质量可以具有非常小的质量；由式 (4-72) 可以看到，无中微子双贝塔衰变过程由单圈的过程主导，并且由公式 (4-76) 和公式 (4-77) 可以看到在中微子质量非常小的情况下，这个过程可以也可以对无中微子双贝塔衰变有明显的增强，从而被未来的实验观测到。

4.4 其他相关过程

4.4.1 轻子相关的过程

两电荷标量粒子 $\xi^{\pm\pm}$ 与右手轻子 ($e_R^\pm, \mu_R^\pm, \tau_R^\pm$) 的耦合项 $f_{\alpha\beta}\xi^{\pm\pm}\bar{e}_{\alpha R}e_{\beta R}^C + h.c.$ 会和一些实验^[55,56] 有关联，例如 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\mu^-e^+ \rightarrow \mu^+e^-$, $\mu \rightarrow 3e$, $\mu \rightarrow e\gamma$, $(g-2)_\mu$ 。

$\xi^{\pm\pm}$ 对 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ 和 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程的贡献如图4-6所示。把重的 $\xi^{\pm\pm}$ 积掉并且利用 Fierz 变换，这两个过程的有效算符表示为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \frac{|f_{ee}|^2}{8m_{\xi^{\pm\pm}}^2} (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + \frac{|f_{e\mu}|^2}{2m_{\xi^{\pm\pm}}^2} (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{\mu}_R \gamma_\mu \mu_R) \\ &= \frac{2^{13}\pi^8}{c^2 I_2^2 \sin^4 2\theta} \frac{v^4 |m_{ee}|^2}{m_e^4 m_{\xi^{\pm\pm}}^2 \omega^2} (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + \frac{2^{15}\pi^8}{c^2 I_2^2 \sin^4 2\theta} \frac{v^4 |m_{e\mu}|^2}{m_e^2 m_\mu^2 m_{\xi^{\pm\pm}}^2 \omega^2} \\ &\quad \times (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{\mu}_R \gamma_\mu \mu_R). \end{aligned} \quad (4-78)$$

类似地，还可以得到 $\mu^-e^+ \rightarrow \mu^+e^-$ 过程的有效拉格朗日量：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \frac{f_{ee} f_{\mu\mu}^*}{8m_{\xi^{\pm\pm}}^2} (\bar{e}_R \gamma^\mu \mu_R) (\bar{e}_R \gamma_\mu \mu_R) + \text{H.c.} \\ &= \frac{2^{13}\pi^8}{c^2 I_2^2 \sin^4 2\theta} \frac{v^4 m_{ee} m_{\mu\mu}^*}{m_e^2 m_\mu^2 m_{\xi^{\pm\pm}}^2 \omega^2} (\bar{e}_R \gamma^\mu \mu_R) (\bar{e}_R \gamma_\mu \mu_R). \end{aligned} \quad (4-79)$$

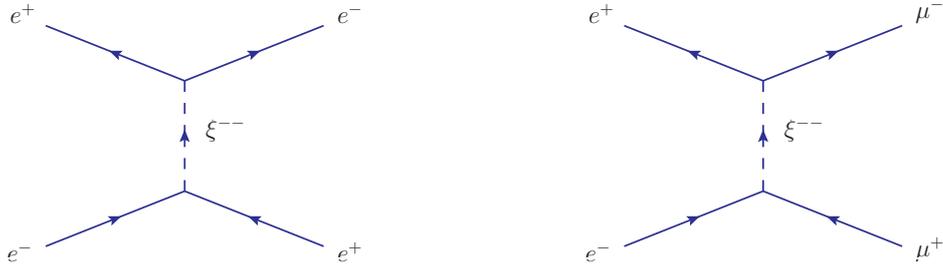


图 4-6 两电荷标量粒子传递的正负电子到正负电子和正负电子到正负缪子的过程。箭头表示电荷流动的方向，时间方向从左至右。

Fig 4-6 The doubly charged scalar exchange diagram for electron-antielectron to muon-antimuon process. Arrows show the flow of charge, time flows from left to right.

如图 4-7 所示，对于稀有的三体衰变过程 $\mu \rightarrow 3e$ ，有效拉格朗日量为：

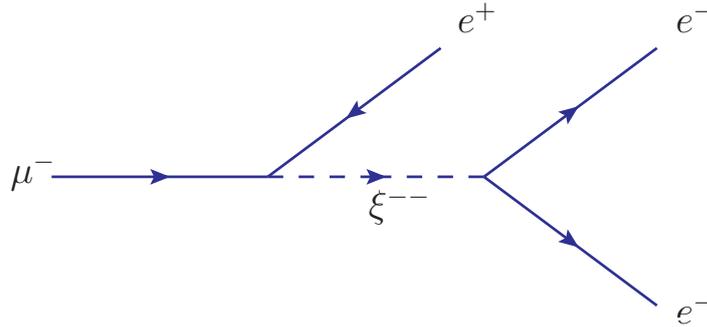


图 4-7 缪子衰变到三个电子的过程

Fig 4-7 Diagram for muon decaying to two electrons and one antielectron process.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \frac{f_{ee}f_{e\mu}^*}{2m_{\xi^{\pm\pm}}^2}(\bar{e}_R\gamma^\mu e_R)(\bar{e}_R\gamma_\mu\mu_R) + \text{H.c.} \\ &= \frac{2^{15}\pi^8}{c^2 I_2^2 \sin^4 2\theta} \frac{v^4 m_{ee} m_{e\mu}^*}{m_e^3 m_\mu m_{\xi^{\pm\pm}}^2 \omega^2} (\bar{e}_R\gamma^\mu e_R)(\bar{e}_R\gamma_\mu\mu_R) + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4-80)$$

则这个过程的衰变宽度为

$$\Gamma_{\mu \rightarrow 3e} = \frac{|f_{e\mu}f_{ee}|^2}{3 \times 2^{12}\pi^3} \frac{m_\mu^5}{m_{\xi^{\pm\pm}}^4} = \frac{2^{20}\pi^{13}}{3c^4 I_2^4 \sin^8 2\theta} \frac{v^8 m_\mu^3 |m_{ee}|^2 |m_{e\mu}|^2}{m_e^6 m_{\xi^{\pm\pm}}^4 \omega^4}. \quad (4-81)$$

已知标准模型中的 μ 的衰变宽度，可以将其近似为总的衰变宽度，即

$$\Gamma_\mu \simeq \Gamma_{\mu \rightarrow e\bar{\nu}_e\nu_\mu}^{\text{SM}} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad (4-82)$$

这样可以得到这类扩展的希格斯双重态模型中的 μ 衰变到三个电子的分支比:

$$Br(\mu \rightarrow 3e) = \frac{\Gamma_{\mu \rightarrow 3e}}{\Gamma_{\mu}} = \frac{2^{26} \pi^{16}}{c^4 I_2^4 \sin^8 2\theta} \frac{v^8 |m_{ee}|^2 |m_{e\mu}|^2}{G_F^2 m_e^6 m_{\mu}^2 m_{\xi^{\pm\pm}}^4 \omega^4}. \quad (4-83)$$

同理, 可以得到 τ 的稀有三体衰变过程, 例如 $\tau^- \rightarrow 3\mu$, $\mu^+ \mu^- e^-$, $e^+ \mu^- \mu^-$, $\mu^- e^+ e^-$, $\mu^+ e^- e^-$, $3e$ 。

对于发生味转变的过程, 例如图4-8所示的 $\mu \rightarrow e\gamma$ 过程, 衰变宽度为

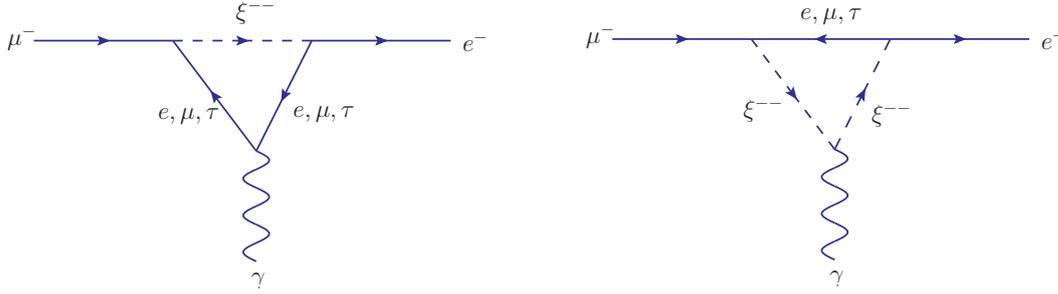


图 4-8 缪子衰变到电子和光子的味转变过程单圈图

Fig 4-8 One-loop diagram for muon decaying to electron and photon.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu \rightarrow e\gamma} &= \frac{\alpha m_{\mu}^5}{9 \times 2^{12} \pi^3} \frac{|f_{\mu e} f_{ee}|^2 + |f_{\mu e} f_{\mu\mu}|^2 + 4|f_{\mu\tau} f_{e\tau}|^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^4} \\ &= \frac{2^{20} \pi^{13} \alpha}{9 c^4 I_2^4 \sin^8 2\theta} \frac{v^8}{m_{\xi^{\pm\pm}}^4 \omega^4} \left(\frac{m_{\mu}^3 |m_{ee}|^2 |m_{e\mu}|^2}{m_e^6} + \frac{|m_{e\mu}|^2 |m_{\mu\mu}|^2}{m_e^2 m_{\mu}} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{m_{\mu}^3 |m_{e\tau}|^2 |m_{\mu\tau}|^2}{m_e^2 m_{\tau}^4} \right), \end{aligned} \quad (4-84)$$

得到这个过程的分支比为:

$$\begin{aligned} Br(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{\Gamma_{\mu \rightarrow e\gamma}}{\Gamma_{\mu}} &= \frac{2^{26} \pi^{16} \alpha}{3 c^4 I_2^4 \sin^8 2\theta} \frac{v^8}{G_F^2 m_{\xi^{\pm\pm}}^4 \omega^4} \left(\frac{|m_{ee}|^2 |m_{e\mu}|^2}{m_e^6 m_{\mu}^2} + \frac{|m_{e\mu}|^2 |m_{\mu\mu}|^2}{m_e^2 m_{\mu}^6} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{|m_{e\tau}|^2 |m_{\mu\tau}|^2}{m_e^2 m_{\mu}^2 m_{\tau}^4} \right). \end{aligned} \quad (4-85)$$

同理还可以得到其他味转变过程, 例如 $\tau \rightarrow \mu\gamma$, $e\gamma$ 。计算 μ 的异常磁矩 $(g-2)_{\mu}$ 可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta a_{\mu} &= -\frac{m_{\mu}^2}{96\pi^2} \frac{4|f_{\mu e}|^2 + |f_{\mu\mu}|^2 + 4|f_{\mu\tau}|^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \\ &= \frac{2^{11} \pi^6}{3 c^2 I_2^2 \sin^4 2\theta} \frac{v^4}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2 \omega^2} \left(4 \frac{|m_{e\mu}|^2}{m_e^2} + \frac{|m_{\mu\mu}|^2}{m_{\mu}^2} + 4 \frac{|m_{\mu\tau}|^2}{m_{\tau}^2} \right). \end{aligned} \quad (4-86)$$

综上，对上述过程的参数取 $c = \mathcal{O}(1)$, $I_2 = \mathcal{O}(1)$, $\sin 2\theta \leq 1$, $m_{\xi^{\pm\pm}} = \mathcal{O}(\text{TeV})$, $\omega = \mathcal{O}(\text{TeV})$, $m_{e\mu, e\tau, \mu\mu, \mu\tau, \tau\tau} = \mathcal{O}(0.1 \text{ eV})$ 和 $m_{ee} \lesssim \mathcal{O}(10^{-4} \text{ eV})$ 时，上述过程的结果可以与实验给出的限制^[4] 相符合。

4.4.2 希格斯场相关的过程

由于标准模型的希格斯双重态 φ 与非标准模型的双重态 χ 、单态单电荷标量粒子 δ^\pm 、单态两电荷标量粒子 $\xi^{\pm\pm}$ 存在耦合，由图4-9所示，这些非标准模型的标量粒子可以传递一些单圈过程从而产生标准模型中的希格斯双重态 φ 的 6 维算符。得到希格斯

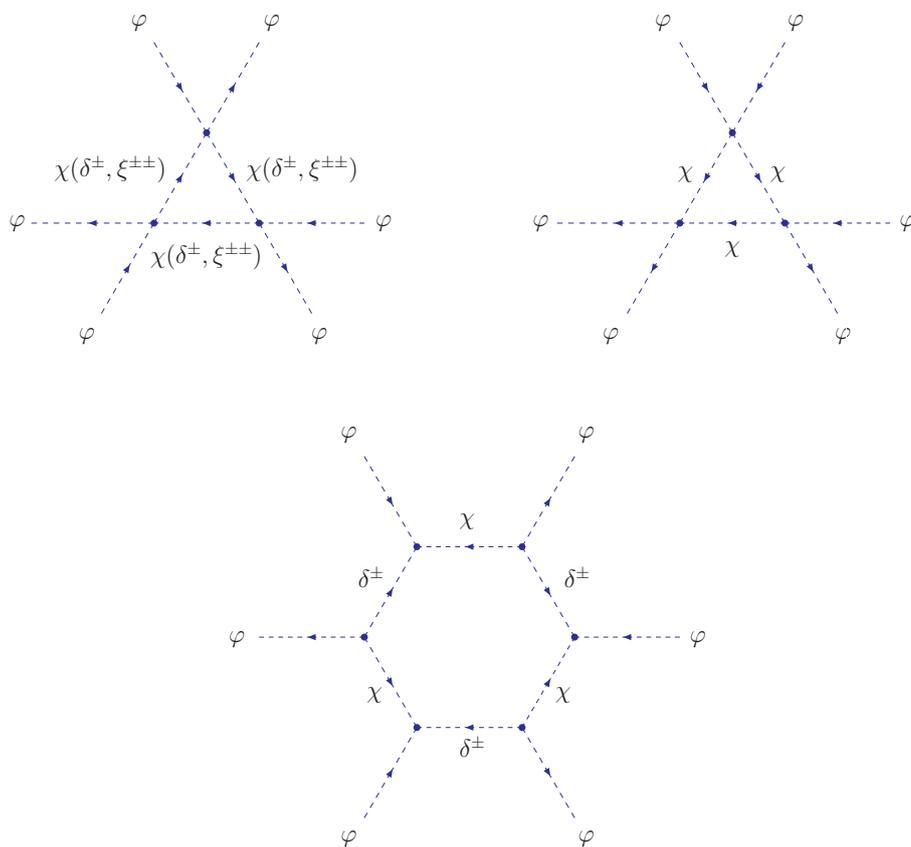


图 4-9 产生标准模型中的希格斯双重态 6 维算符的单圈图

Fig 4-9 One-loop diagrams for giving a dimension-6 term of SM Higgs scalar.

场势能项为：

$$V \supset \mu_\varphi^2 \varphi^\dagger \varphi + \kappa_1 (\varphi^\dagger \varphi)^2 + \frac{1}{\Lambda_6^2} (\varphi^\dagger \varphi)^6 \quad (4-87)$$

上式 (4-87) 中,

$$\frac{1}{\Lambda_6^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{\kappa_3^3 + (\kappa_3 + \kappa_4)^3 + (\kappa_3 + \kappa_4)|\kappa_5|^2}{M_\chi^2} + \frac{\kappa_{\varphi\delta}^3}{M_\delta^2} + \frac{\kappa_{\varphi\xi}^3}{M_\xi^2} \right. \\ \left. + \frac{\sigma^6}{(M_\chi^2 - M_\delta^2)^4} \left[\frac{M_\chi^4 + 10M_\chi^2 M_\delta^2 + M_\delta^4}{3M_\chi^2 M_\delta^2} + 2 \frac{M_\chi^2 + M_\delta^2}{M_\chi^2 - M_\delta^2} \ln \left(\frac{M_\delta^2}{M_\chi^2} \right) \right] \right\}. \quad (4-88)$$

由希格斯势场的最小值得到真空期望值 v 满足如下关系:

$$\mu^2 + \kappa_1 v^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{\Lambda_6^2} v^4 = 0 \quad (4-89)$$

得到希格斯玻色子 h 的平方和三次方项为

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \kappa_{\text{eff}} v h^3 \quad (4-90)$$

其中,

$$m_h^2 = 2\kappa_1 v^2 + 3 \frac{v^4}{\Lambda_6^2}, \quad \kappa_{\text{eff}} = \kappa_1 + \frac{5v^2}{2\Lambda_6^2} = \frac{m_h^2}{2v^2} + \frac{v^2}{\Lambda_6^2}. \quad (4-91)$$

希格斯玻色子三次方项的耦合导致了与标准模型不同的耦合, 偏移值为:

$$R_\lambda = \frac{\lambda_{\text{eff}} - \lambda_{\text{SM}}}{\lambda_{\text{SM}}} = \frac{2v^4}{m_h^2 \Lambda_6^2} = 0.12 \left(\frac{2 \text{ TeV}}{\Lambda_6} \right)^2 \quad (4-92)$$

其中

$$\lambda_{\text{SM}} = \frac{m_h^2}{2v^2}. \quad (4-93)$$

式 (4-87) 的 6 维算符可以对电弱相变产生影响, 从而影响电弱重子生成^[57]。这个过程可能可以被目前的 LHC 实验或者未来的加速器实验检验^[58]。对希格斯的双光子衰变^[59]:

$$R_{\gamma\gamma} \equiv \frac{\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)}{\Gamma_{\text{SM}}(h \rightarrow \gamma\gamma)} \\ = \left| 1 + \frac{\kappa_{\hat{\chi}^\pm} v^2}{2m_{\hat{\chi}^\pm}^2} \frac{A_0(\tau_{\hat{\chi}^\pm})}{A_1(\tau_W) + \frac{4}{3} A_{\frac{1}{2}}(\tau_t)} + \frac{\kappa_{\hat{\delta}^\pm} v^2}{2m_{\hat{\delta}^\pm}^2} \frac{A_0(\tau_{\hat{\delta}^\pm})}{A_1(\tau_W) + \frac{4}{3} A_{\frac{1}{2}}(\tau_t)} \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{\varphi\xi} v^2}{m_{\xi^{\pm\pm}}^2} \frac{A_0(\tau_{\xi^{\pm\pm}})}{A_1(\tau_W) + \frac{4}{3} A_{\frac{1}{2}}(\tau_t)} \right|^2 \quad (4-94)$$

其中,

$$\begin{aligned}
\kappa_{\hat{\chi}^\pm} &= \kappa_3 \cos^2 \theta + \kappa_{\varphi\delta} \sin^2 \theta - \frac{\sigma \sin 2\theta}{\sqrt{2}v}, \quad \kappa_{\delta^\pm} = \kappa_3 \sin^2 \theta + \kappa_{\varphi\delta} \cos^2 \theta + \frac{\sigma \sin 2\theta}{\sqrt{2}v}, \\
\tau_X &= 4 \frac{m_X^2}{m_h^2}, \quad A_0(x) = -x^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \right), \\
A_1(x) &= -x^2 \left[\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \right], \\
A_{\frac{1}{2}}(x) &= 2x^2 \left[\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \right]. \tag{4-95}
\end{aligned}$$

当参数取 $\kappa_{\hat{\chi}^\pm} = \mathcal{O}(1)$, $\kappa_{\delta^\pm} = \mathcal{O}(1)$, $\kappa_{\varphi\xi} = \mathcal{O}(1)$, $m_{\hat{\chi}^\pm} = \mathcal{O}(\text{TeV})$, $m_{\delta^\pm} = \mathcal{O}(\text{TeV})$, $m_{\xi^{\pm\pm}} = \mathcal{O}(\text{TeV})$ 时 $R_{\gamma\gamma}$ 的值与实验结果^[4] 相符。

全文总结

本文讨论了中微子质量和无中微子双贝塔衰变过程的关联。由 **Schechter-Valle** 定理可以知道，无中微子双贝塔衰变与中微子质量直接相关，即如果存在无中微子双贝塔衰变，那么中微子就有非零的马约拉纳质量。但是在可以产生足够被实验探测到的无中微子双贝塔衰变的模型中，中微子不一定需要具有足够大的质量。

在无中微子双贝塔衰变的标准表述中，无中微子双贝塔衰变过程由轻的马约拉纳中微子传递。在这种情况下，无中微子双贝塔衰变的衰变率由马约拉纳中微子的有效质量完全确定，只有当电子中微子有效质量足够大时，实验才可能观测到无中微子双贝塔衰变现象。

在一种最小左右对称模型中，中微子质量通过第一类和第二类跷跷板机制产生。在这种模型中，无中微子双贝塔衰变过程有 1. 两个左手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程；2. 两个右手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程；3. 一个左手流一个右手流组成的分别由轻中微子和重中微子传递的过程；4. 分别由左手和右手希格斯三重态传递的无中微子双贝塔衰变过程；5. $W_L - W_R$ 混合的无中微子双贝塔衰变过程。通过对这些过程衰变率相对大小的分析，可以发现在这种左右对称模型中，无中微子双贝塔衰变由纯左手流传递的轻中微子过程和纯右手流传递的重中微子过程主导，即无中微子双贝塔衰变过程的大小取决于左手轻中微子和右手重中微子的有效质量。然后本文选用第二类跷跷板机制主导的情形对这两个过程进行具体分析，选择合适的参数后，发现在正质量顺序的情况下，重中微子过程主导无中微子双贝塔衰变，并且在很大的参数区间内这种情形会被实验排除；在反质量顺序的情况下，无中微子双贝塔衰变过程与标准表述中的情形类似，主要由轻中微子有效质量决定，并且下一代无中微子双贝塔衰变实验即将可以对这种情况进行检验。

本文重点讨论一种扩展的两希格斯双重态模型，这种模型既可以产生足够被下一代实验探测到的无中微子双贝塔衰变，又可以只产生非常小的中微子马约拉纳质量。在这种模型中，引入一个没有 **Yukawa** 耦合的单电荷的标量粒子，这个粒子与两个希格斯标量场组成一个三次方的势能项；还引入一个两电荷的标量粒子，这个粒子与右手的轻子存在 **Yukawa** 耦合，并且与单电荷标量粒子组成一个三次方的势能项。在希格斯场自发对称性破缺之后，可以得到各粒子的质量，而中微子的马约拉纳质量会由两圈图和三圈图产生，其中两圈图决定中微子的质量。这样中微子会具有非常小的马约拉纳质量，并且质量矩阵完全由两电荷标量粒子与右手轻子的 **Yukawa** 耦合矩阵确定。同时这个模型

会产生无中微子双贝塔衰变过程，无中微子双贝塔衰变由单圈图过程主导，这个过程的衰变率可以在中微子质量很小的情况下达到被未来无中微子双贝塔衰变实验探测到的水平。最后，为了检验这个模型，本文还讨论了其他实验对这个模型的限制，包括一些轻子相关的稀有过程和希格斯粒子相关的过程。

参考文献

- [1] Sheldon L. Glashow. “*Partial-symmetries of weak interactions*”. *Nuclear Physics*, **1961**, 22(4): 579–588. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558261904692>.
- [2] Steven Weinberg. “*A Model of Leptons*” [Journal Article]. *Physical Review Letters*, **1967**, 19(21): 1264–1266. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>.
- [3] Abdus Salam. “*Weak and Electromagnetic Interactions*”. *Conf. Proc.* **1968**, C680519: 367–377.
- [4] Particle Data Group, C Patrignani *et al.* “*Review of particle physics*”. *Chinese physics C*, **2016**, 40(10): 100001.
- [5] Planck Collaboration *et al.* “*Planck intermediate results. XLVI. Reduction of large-scale systematic effects in HFI polarization maps and estimation of the reionization optical depth*”. *Astronomy & Astrophysics*, **2016**.
- [6] M. Goepfert-Mayer. “*Double Beta-Disintegration*”. *Phys. Rev.* 1935-09: 512–516. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.512>.
- [7] Hüseyin Aytekin and Alaaddin Yılmaz. “*Calculation of two-neutrino double beta decay half-lives of 76 Ge, 82 Se, 96 Zr and 100 Mo nuclei for the $0^+ \rightarrow 0^+$ transition*” [Journal Article]. *Physica Scripta*, **2015**, 90(6): 065302. <http://stacks.iop.org/1402-4896/90/i=6/a=065302>.
- [8] W. H. Furry. “*On Transition Probabilities in Double Beta-Disintegration*”. *Phys. Rev.* 1939-12: 1184–1193. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.1184>.
- [9] Joseph Schechter and José WF Valle. “*Neutrinoless double- β decay in $SU(2) \times U(1)$ theories*” [Journal Article]. *Physical Review D*, **1982**, 25(11): 2951.
- [10] Werner Rodejohann. “*Neutrino-less double beta decay and particle physics*” [Journal Article]. *International Journal of Modern Physics E*, **2011**, 20(09): 1833–1930.
- [11] Masaru Doi, Tsuneyuki Kotani, Hiroyuki Nishiura *et al.* “*Neutrino Mass, the Right-Handed Interaction and the Double Beta Decay. II General Properties and Data Analysis*” [Journal Article]. *Progress of Theoretical Physics*, **1981**, 66(5): 1765–1788.

- [12] Masaru Doi, Tsuneyuki Kotani and Eiichi Takasugi. “*Double beta decay and Majorana neutrino*” [Journal Article]. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **1985**, 83: 1–175.
- [13] Masaru Doi and Tsuneyuki Kotani. “*Neutrinoless modes of double beta decay*” [Journal Article]. *Progress of Theoretical Physics*, **1993**, 89(1): 139–159.
- [14] E Caurier, F Nowacki, A Poves *et al.* “*Shell Model Studies of the Double Beta Decays of ^{76}Ge , ^{82}Se , and ^{136}Xe* ” [Journal Article]. *Physical review letters*, **1996**, 77(10): 1954.
- [15] Jouni Suhonen and Osvaldo Civitarese. “*Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay*” [Journal Article]. *Physics Reports*, **1998**, 300(3): 123–214.
- [16] J. D. Vergados, H. Ejiri and F. Šimkovic. “*Theory of neutrinoless double-beta decay*” [Journal Article]. *Reports on Progress in Physics*, **2012**, 75(10): 106301. <http://stacks.iop.org/0034-4885/75/i=10/a=106301>.
- [17] Andrei Neacsu and Mihai Horoi. *An effective method to accurately calculate the phase space factors for $\beta^-\beta^-$ decay* [Electronic Article], 2015-10: 882. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv151000882N>.
- [18] Andrei Neacsu and Mihai Horoi. “*An effective method to accurately calculate the phase space factors for $\beta^-\beta^-$ decay*” [Journal Article]. *arXiv preprint arXiv:1510.00882*, **2015**.
- [19] V.A. Rodin, Amand Faessler, F. Šimkovic *et al.* “*Assessment of uncertainties in QRPA $0\nu\beta\beta$ -decay nuclear matrix elements*”. *Nuclear Physics A*, **2006**, 766: 107–131. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405012455>.
- [20] J. Barea, J. Kotila and F. Iachello. “*Nuclear matrix elements for double- β decay*”. *Phys. Rev. C*, 2013-01: 014315. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.87.014315>.
- [21] E. Caurier, J. Menéndez, F. Nowacki *et al.* “*Influence of Pairing on the Nuclear Matrix Elements of the Neutrinoless $\beta\beta$ Decays*”. *Phys. Rev. Lett.* 2008-02: 052503. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.052503>.
- [22] KamLAND-Zen Collaboration, A. Gando, Y. Gando *et al.* “*Search for Majorana Neutrinos Near the Inverted Mass Hierarchy Region with KamLAND-Zen*”. *Phys. Rev. Lett.* 2016-08: 082503. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.082503>.

- [23] J. Shirai. “Talk at Neutrino 2016 conference”. **2016**.
- [24] H. Gómez. “Latest results of NEMO-3 experiment and present status of SuperNEMO”. *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, **2016**, 273–275: 1765–1770. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405601415007737>.
- [25] CUORE Collaboration, K. Alfonso, D. R. Artusa *et al.* “Search for Neutrinoless Double-Beta Decay of ^{130}Te with CUORE-0”. *Phys. Rev. Lett.* 2015-09: 102502. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.102502>.
- [26] Andrea Pocar. “Searching for neutrino-less double beta decay with EXO-200 and nEXO” [Journal Article]. *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, **2015**, 265 – 266: 42–44. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405601415003533>.
- [27] N Abgrall, Estanislao Aguayo, Frank T Avignone *et al.* “The MAJORANA DEMONSTRATOR neutrinoless double-beta decay experiment”. *Advances in High Energy Physics*, **2014**, 2014.
- [28] Steven Weinberg. “Baryon-and lepton-nonconserving processes” [Journal Article]. *Physical Review Letters*, **1979**, 43(21): 1566.
- [29] Peter Minkowski. “ $\mu \rightarrow e \gamma$ at a rate of one out of 109 muon decays?” *Physics Letters B*, **1977**, 67(4): 421–428. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937790435X>.
- [30] T Yanagida. “Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 1979”. **1979**.
- [31] M Gell-Mann, P Ramond and R Slansky. *Complex spinors and unified theories*. North Holland, Amsterdam, The Netherlands, **1979**.
- [32] S. L. Glashow; ed. by Maurice Lévy, Jean-Louis Basdevant, David Speiser *et al.* “The Future of Elementary Particle Physics”. In: *Quarks and Leptons: Cargèse 1979*. Boston, MA: Springer US, **1980**: 687–713. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-7197-7_15.
- [33] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovi ć. “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation”. *Phys. Rev. Lett.* 1980-04: 912–915. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.44.912>.

- [34] M. Magg and Ch. Wetterich. “Neutrino mass problem and gauge hierarchy”. *Physics Letters B*, **1980**, 94(1): 61–64. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269380908254>.
- [35] “Proton lifetime and fermion masses in an $SO(10)$ model”. *Nuclear Physics B*, **1981**, 181(2): 287–300. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321381903540>.
- [36] R. Foot, H. Lew, X. -G. He *et al.* “See-saw neutrino masses induced by a triplet of leptons”. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, **1989**, 44(3): 441–444. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01415558>.
- [37] Ernest Ma and D.P. Roy. “Heavy triplet leptons and new gauge boson”. *Nuclear Physics B*, **2002**, 644(1-2): 290–302. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321302008155>.
- [38] Pei-Hong Gu. “Neutrinoless double beta decay in the left-right symmetric models for linear seesaw”. *arXiv preprint arXiv:1512.01119*, **2015**. <https://arxiv.org/abs/1512.01119>.
- [39] P. S. Bhupal Dev, Srubabati Goswami and Manimala Mitra. “TeV-scale left-right symmetry and large mixing effects in neutrinoless double beta decay”. *Phys. Rev. D*, 2015-06: 113004. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.113004>.
- [40] E Caurier, F Nowacki, A Poves *et al.* “Shell Model Studies of the Double Beta Decays of ^{76}Ge , ^{82}Se , and ^{136}Xe ” [Journal Article]. *Physical review letters*, **1996**, 77(10): 1954.
- [41] Jouni Suhonen and Osvaldo Civitarese. “Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay” [Journal Article]. *Physics Reports*, **1998**, 300(3): 123–214.
- [42] J. D. Vergados, H. Ejiri and F. Šimkovic. “Theory of neutrinoless double-beta decay” [Journal Article]. *Reports on Progress in Physics*, **2012**, 75(10): 106301. <http://stacks.iop.org/0034-4885/75/i=10/a=106301>.
- [43] Mihai Horoi. “Shell model analysis of competing contributions to the double- β decay of ^{48}Ca ” [Journal Article]. *Physical Review C*, **2013**, 87(1): 014320.
- [44] Amand Faessler, Marcela González, Sergey Kovalenko *et al.* “Arbitrary mass Majorana neutrinos in neutrinoless double beta decay” [Journal Article]. *Physical Review D*, **2014**, 90(9): 096010. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.096010>.

- [45] Vladimir Tello, Miha Nemevšek, Fabrizio Nesti *et al.* “*Left-Right Symmetry: From the LHC to Neutrinoless Double Beta Decay*” [Journal Article]. *Physical Review Letters*, **2011**, 106(15): 151801. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.151801>.
- [46] Shao-Feng Ge, Manfred Lindner and Sudhanwa Patra. “*New physics effects on neutrinoless double beta decay from right-handed current*”. *arXiv preprint arXiv:1508.07286*, **2015**.
- [47] G.C. Branco, P.M. Ferreira, L. Lavoura *et al.* “*Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models*”. *Physics Reports*, **2012**, 516(1 - 2): 1–102. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312000695>.
- [48] KL McDonald and BHJ McKellar. “*Evaluating the two loop diagram responsible for neutrino mass in Babu’s model*”. *arXiv preprint hep-ph/0309270*, **2003**.
- [49] J. Van der Bij and M. Veltman. “*Two-loop large Higgs mass correction to the g -parameter*”. *Nuclear Physics B*, **1984**, 231(2): 205–234. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321384902840>.
- [50] A.I. Davydychev and J.B. Tausk. “*Two-loop self-energy diagrams with different masses and the momentum expansion*”. *Nuclear Physics B*, **1993**, 397(1): 123–142. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139390338P>.
- [51] A. Ghinculov and J.J. van der Bij. “*Massive two-loop diagrams: The Higgs propagator*”. *Nuclear Physics B*, **1995**, 436(1): 30–48. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139400522G>.
- [52] S. Borowka, G. Heinrich, S.P. Jones *et al.* “*SecDec-3.0: Numerical evaluation of multi-scale integrals beyond one loop*” [Journal Article]. *Computer Physics Communications*, **2015**, 196: 470–491. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465515002027>.
- [53] Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig and Frederik Orellana. “*New Developments in FeynCalc 9.0*”. *arXiv preprint arXiv:1601.01167*, **2016**. <https://arxiv.org/abs/1601.01167>.
- [54] M. Hirsch, H. V. Klapdor-Kleingrothaus and S. G. Kovalenko. “*Supersymmetry and neutrinoless double β decay*”. *Phys. Rev. D*, 1996-02: 1329–1348. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.1329>.

- [55] Miguel Nebot, Josep F. Oliver, David Palao *et al.* “Prospects for the Zee-Babu model at the CERN LHC and low energy experiments”. *Phys. Rev. D*, 2008-05: 093013. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.093013>.
- [56] Juan Herrero-Garcia, Miguel Nebot, Nuria Rius *et al.* “The Zee - Babu model revisited in the light of new data”. *Nuclear Physics B*, **2014**, 885: 542–570. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321314001849>.
- [57] Xinmin Zhang. “Operator analysis for the Higgs potential and cosmological bound on the Higgs-boson mass”. *Phys. Rev. D*, 1993-04: 3065–3067. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.3065>.
- [58] Fa Peng Huang, Pei-Hong Gu, Peng-Fei Yin *et al.* “Testing the electroweak phase transition and electroweak baryogenesis at the LHC and a circular electron-positron collider”. *Phys. Rev. D*, 2016-05: 103515. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.103515>.
- [59] Marcela Carena, Ian Low and Carlos E. M. Wagner. “Implications of a modified Higgs to diphoton decay width”. *Journal of High Energy Physics*, **2012**, 2012(8): 60. [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2012\)060](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2012)060).

致 谢

在上海交通大学两年半的硕士生活即将结束了，非常开心在这里度过了一段富有激情充满收获值得怀念的时光。感谢上海交通大学物理与天文系的良师益友在我研究生期间给予的帮助。

感谢我的导师顾佩洪特别研究员。顾老师悉心指导我的科研，让我在粒子物理领域不断进步；热心关怀我的生活，帮我解决各种遇到的和可能遇到的困难与烦扰。顾老师深厚精湛的学术能力与真诚热心的品行风格是我学习的榜样，非常幸运可以做顾老师的学生。

感谢在科研和学习过程中给予我支持和帮助的何小刚老师，何老师规范场论标准模型的笔记是我经常查阅的资料。感谢师兄鲁文斌对我方方面面的帮助，师兄的建议与指导帮助我顺利度过进入粒子物理领域时最迷茫与困惑的阶段。感谢周航在科研与生活中对我的帮助，与周航科研中的讨论和闲暇时的交流让我获益良多。感谢代建平师兄、刘冰、周颖、何敏、施禹基、王子瑞等同学们平时的讨论，与各位在粒子所的相处是一段非常快乐的时光。

攻读学位期间发表的学术论文

- [1] ZHEN LIU, PEI-HONG GU. Extending two Higgs doublet models for two-loop neutrino mass generation and one-loop neutrinoless double beta decay. Nuclear Physics B, 2017, 915206-223. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032131630387X>