

申请上海交通大学博士学位论文

原子核基态与低激发态的性质

论文作者 路毅

学 号 0120729043

指导教师 导师 赵玉民教授

专 业 粒子物理与原子核物理

答辩日期 2016年11月

A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for the
Degree of Doctor

Properties of atomic nuclei at ground state and low-lying states

YI LU

Supervisor:

Prof. YUMIN ZHAO

DEPARTMENT OF PHYSICS AND ASTRONOMY
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
SHANGHAI, P.R.CHINA

November, 2016

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日期：_____年____月____日

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名： _____

指导教师签名： _____

日 期： _____年____月____日

日 期： _____年____月____日

原子核基态与低激发态的性质

摘 要

本文研究原子核基态和低激发态中的几个问题, 包括原子核质量的描述、原子核电荷半径的经验规律、随机相互作用下 sd 玻色子系统的规则结构以及利用配对近似方法研究原子核的伽莫夫-泰勒跃迁等.

原子核质量、电荷半径都是核物理中的基本物理量. 原子核质量是核天体物理中的关键输入参量, 原子核电荷半径描述原子核的尺度. 原子核质量、电荷半径模型可简单分为三类, 宏观模型用简洁的公式拟合所有实验数据 (3000 多个质量数据、约1000 个电荷半径数据); 微观模型利用平均场等方法计算原子核质量、电荷半径; 宏观-微观模型在宏观经验公式的基础上, 加入微观模型在核素图局部区域的修正.

对能在原子核质量模型是很重要的, 其物理根据是同类核子配对, 即两个中子或质子角动量耦合为零时能量最低. 人们已经观察到, 中子数对质子对能强度有影响, 质子数对中子对能强度也有影响. 在本文第二章中我们考察不同的质量模型理论预言值相对于实验值的偏差, 发现这些偏差中存在奇偶性, 所以我们引入简单的公式修正这些带有奇偶性的偏差. 我们引入简单的局域公式描述电荷半径的实验数据, 在 $N, Z \geq 8$ 情况下这些局域公式的精度为0.0084fm.

原子核结构理论以唯象模型为基本手段, 以“基本组元+相互作用”方式计算可观测量, 相互作用来源于重整化后的核子-核子相互作用 (通过核子核子散射得到). 然而, 当相互作用完全随机时, 得到的结果的规律性就不能归因于相互作用, 而应归因于由基本组元(这里指壳模型中的价质子和价中子)形成的“组态空间”和“相互作用形式”, 属于模型本身的性质, 所以随机相互作用数值实验, 有益于对多体模型的理解.

IBM模型 (相互作用玻色子模型: the Interacting Boson Model) 假定同类核子耦合为 s 玻色子 (角动量为 0) 和 d 玻色子 (角动量为 2), 在此基础上可以利用 sd 玻色子的对称性方便地得到对称条件下原子核的能谱和跃迁结果. IBM 简单优美, 应用广泛. 我们在第三章中在 IBM-1 模型下做随机相互作用数值实验, 指出低激发态能量值的线性关联, 这样的线性关联有五种以上, 其中四种可以由 IBM-1 模型的 $U(5)$ 极限推导出来. 这些结果是出乎意料的, 因为

U(5) 极限是 d 玻色子相互作用的极限情况之一, sd 玻色子并不属于这个极限情况. 我们严格推导了 d 玻色子系统在随机相互作用下基态自旋概率的解析公式, 这是迄今为止关于随机相互作用下基态自旋概率唯一的解析结果.

原子核伽莫夫-泰勒跃迁是贝塔衰变的一种, 是很重要的弱相互作用过程. 在宇宙大爆炸核素合成、原子核贝塔衰变和中微子物理中, 伽莫夫-泰勒跃迁是最重要的反应之一. 原子核壳模型在低激发态能给出相对较好的结果. 然而, 在重核区, 由于态空间维数太大, 壳模型无法同时考虑自旋-轨道伙伴态 (spin-orbit partners). 例如在 50-82 壳, 价核子数较多时, 只能考虑 $0h_{11/2}$, 暂时无法包括 $0h_{9/2}$. 在伽莫夫-泰勒跃迁中, 跃迁算符是一个“自旋同位旋翻转”单体算符, 即不改变粒子的轨道量子数, 只改变它的自旋和同位旋, 所以自旋-轨道伙伴态非常重要. 配对近似对态空间做有效的截断, 所以可以考虑更多的轨道, 包括自旋-轨道伴侣, 因而对于重核低激发态中的伽莫夫-泰勒跃迁, 具有应用前景. 我们在第四章中把配对近似用于伽莫夫-泰勒跃迁计算, 关于 ^{48}Ca 原子核的计算结果与 pf 壳层该原子核伽莫夫-泰勒跃迁的大规模壳模型计算结果基本一致, 为配对近似方法研究重核的伽莫夫-泰勒跃迁打下了很好的基础.

关键词: 原子核质量, IBM, 随机相互作用, 配对近似, 伽莫夫-泰勒跃迁

Properties of atomic nuclei at ground state and low-lying states

ABSTRACT

In this thesis I study a number of issues on ground and low-lying states of atomic nuclei, including the description of nuclear masses, empirical relations of nuclear charge radii, regular structure of sd boson systems under random interactions, and the nuclear Gamow-Teller transitions in terms of the nucleon pair approximation of the shell model, and so on.

Nuclear masses and charge radii are both basic physical quantities. Nuclear masses are key inputs in nuclear astrophysics, while nuclear charge radii describe the dimensions of nuclei. Theoretical models of nuclear masses and charge radii can be simply classified into three categories. Macroscopic models fit all experimental data (more than 3000 mass data and about 1000 charge radii data) with simple formulas. Microscopic models calculate nuclear masses and charge radii with mean-field methods. Macro-microscopic models modify macroscopic empirical formulas, based on microscopic considerations of local nuclear structure on the nuclear chart.

Nuclear pairing energy is very important in nuclear mass models. Its physics is the pairing of like nucleons, i.e., the energy of two neutrons or protons get a minimum when their angular momentums couple to zero. It is already observed that, neutron number influences proton pairing energy, and proton number influences neutron pairing energy. In Chapter 2 of this thesis we investigate deviations of different nuclear mass models against experimental data, and find odd-even staggering in them. Thus we suggest simple formulas to correct these deviations. We also introduce simple local formulas to describe experimental nuclear charge radii. In $N, Z \geq 8$ nuclei, these formulas achieve an accuracy of 0.0084fm.

Phenomenological modeling is the basic methodology of nuclear structure theory. Observables are calculated with “basic constituents + interactions”.

Those interactions come from renormalized nucleon-nucleon interactions (via nucleon-nucleon scattering experiments). However, when the input interactions are Gaussian random variables, regularities in the output results can not be attributed to interactions, but to “configuration space” and “interaction form” constructed with basic constituents (in shell model they are protons and neutrons), and these are properties of the model itself. So numerical experiments of random interactions help us better understand many-body models.

The IBM model (interacting boson model) assumes that like nucleons couple into s bosons ($J = 0$) and d bosons ($J = 2$). Based on symmetries of s bosons and d bosons, one can easily get nuclear energies and transition probabilities. The IBM model is simple, elegant and widely applied. In Chapter 3 we do numerical experiments in the IBM-1 model under random interactions, and point out linear correlations among low-lying states. These results are surprising, because the $U(5)$ limit is the limit of d bosons, not necessarily a limit of sd boson system. We rigorously derived the probabilities of ground state spin, which is the only analytical results to now about ground state spin probabilities under random interactions.

Nuclear Gamow-Teller transition is a kind of beta decay, and is a very important weak process. In big bang nucleosynthesis, nuclear beta decay and neutrino physics, Gamow-Teller transition is one of the most important reactions. The Nuclear Shell Model gives reasonably good results of low-lying states. However, in heavy nuclei, because of explosive dimensions of the basis space, the Nuclear Shell Model can not consider spin-orbit partners (e.g. $0h_{11/2}$ and $0h_{9/2}$). For example in the 50-82 shell, the Nuclear Shell Model can not include $0h_{9/2}$. In Gamow-Teller transition, the transition operator is a “spin-isospin-flip” operator, so it changes the spin and isospin of a nucleon, but not the orbit quantum number. So spin-orbit partners are very important. The nucleon pair approximation can effectively truncate the configuration space, thus includes more orbits, including spin-orbit partners, and is promising for application to calculations of Gamow-Teller transitions between low-lying states of heavy nuclei. In Chapter 4 we apply the Nucleon Pair Approximation to calculations of Gamow-Teller transitions. Numerical results of ^{48}Ca is consistent with those of large-scale shell model results in pf shell, and paves way for further applications in heavy nuclei

in the future.

KEY WORDS: atomic nuclear mass, IBM, random interaction, Nucleon Pair Approximation, Gamow-Teller transition

目 录

摘要	i
ABSTRACT	iii
目录	vii
插图索引	xiii
表格索引	xiii
主要符号对照表	xv
第一章 前言	1
1.1 原子核质量、电荷半径的局域关系	1
1.1.1 原子核质量中的奇偶性	1
1.1.2 原子核电荷半径局域关系	3
1.2 IBM-1模型中的随机相互作用	4
1.3 壳模型配对近似下的伽莫夫-泰勒跃迁	5
第二章 原子核质量、电荷半径的局域关系	9
2.1 原子核质量中的奇偶性	9
2.2 原子核电荷半径	14
2.3 小结	21
第三章 sd 玻色子的随机相互作用	23
3.1 背景简介	23
3.2 数值结果	24
3.2.1 关于 $U(5)$ 极限的讨论	25
3.2.2 随机相互作用下的 d 玻色子系统	27

3.2.3	晕转态的波函数	28
3.3	简单系统的基态自旋概率的解析公式	31
3.3.1	d 玻色子基态自旋概率的解析公式	31
3.3.2	$j = 5/2$ 壳中三个费米子	37
3.3.3	$j = 7/2$ 壳中三费米子系统	38
3.4	小结	41
第四章	原子核配对近似下的伽莫夫-泰勒跃迁	43
4.1	背景简介	43
4.2	截断空间的基矢构建	43
4.3	哈密顿量	44
4.4	算法介绍	46
4.4.1	推广的Wick定理	46
4.4.2	单体算符 Q^t 的约化矩阵元 $\langle \tilde{A}^{J'} Q^t A^{J'} \rangle$	47
4.4.3	基矢内积的计算	49
4.4.4	两体相互作用 $(Q \times Q)^0$	50
4.4.5	两体相互作用 $(Q_\nu^t Q_\pi^t)^0$	51
4.4.6	两体相互作用矩阵元 $\sum_m A_m^{s+} A_m^s = \hat{s}(A^{s+} \times A^s)^0$	52
4.4.7	偶偶核伽莫夫-泰勒跃迁矩阵元	53
4.5	^{48}Ca 两中微子双贝塔衰变	57
4.6	单体跃迁的求和规则	59
4.6.1	跃迁强度求和规则	60
4.6.2	能量平均的跃迁求和规则	62
4.7	小结	72
第五章	总结与展望	73
附录 A	角动量代数以及本论文所用约定	75
A.1	角动量重新耦合	75
A.2	本论文中所用约定	76
附录 B	$j = 7/2$壳中四费米子系统基态自旋	77

参考文献	81
简历	93
致谢	95
攻读学位期间发表的学术论文目录	97

表格索引

2.1	修正项对质量公式的改进.	13
2.2	电荷半径的不同局域关系式的误差 (1)	18
2.3	电荷半径的不同局域关系式的误差 (2)	18
2.4	不同局域关系式的最佳组合.	20
3.1	R_I 与 R_4 之间线性关联的描述.	26
3.2	d 玻色子系统的基态自旋.	28
3.3	d 玻色子系统的基态自旋 I	34
3.4	d 玻色子系统的基态自旋概率 $P(I)$	35
3.5	d 玻色子系统的基态自旋总概率 $P(I)$	36
3.6	$j = \frac{5}{2}$ 壳中三费米子系统的基态自旋概率.	38

插图索引

2.1	单中子分离能的误差平均值.	10
2.2	单质子分离能的误差平均值.	11
2.3	不同模型的 Δ 值.	13
2.4	$R_{res}^{(3)} = R_{exp} - r_0 A^{1/3} - r_1 A^{-2/3} - r_2 I$	15
2.5	不同的局域关系式 (1).	16
2.6	不同的局域关系式 (2).	16
2.7	不同的局域关系式 (3).	17
2.8	$\delta R_{1n-1p}(N, Z) \sim A$	17
2.9	$\Delta(N, Z) = R(N, Z) - 2R(N - 1, Z) + R(N - 2, Z)$	19
2.10	原子核在局域公式中的相对位置.	20
3.1	IBM-1模型中的 $R_6 - R_4$ 关联.	25
3.2	IBM-1模型中的 $R_8 - R_4$ 关联.	26
3.3	d 玻色子数和 d 玻色子辛弱数.	29
3.4	基态自旋为 $2n$ 的随机样本中 C_1, C_2 的分布.	30
4.1	$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ 的伽莫夫-泰勒跃迁.	58
4.2	$^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ 的伽莫夫-泰勒跃迁.	59
4.3	$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ 的两中微子双贝塔衰变 ($2\nu\beta\beta$) 跃迁矩阵元.	60
4.4	$^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ $2\nu\beta\beta$ 跃迁中的相位相消效应.	61

主要符号对照表

N	原子核中子数
Z	原子核质子数
A	原子核质量数
$B(N, Z)$	N 个中子 Z 个质子的原子核结合能
$S_n(N, Z)$	原子核单中子分离能
$S_p(N, Z)$	原子核单质子分离能
H	原子核体系哈密顿量
n_d	d 玻色子数
τ	d 玻色子辛弱数
A^\dagger	对产生算符
A^r	对湮灭算符
$B(GT)$	伽莫夫-泰勒跃迁强度
q_f	伽莫夫-泰勒跃迁quenching参数
$M_{2\nu}$	两中微子双贝塔衰变跃迁矩阵元

第一章 前言

原子核处在原子的中心，由中子和质子通过强相互作用力结合而成，直径从几费米到十几费米不等，占原子质量的绝大部分，是非常致密的量子多体体系。核子（中子、质子）之间的相互作用为强相互作用，特征为短程吸引：核力强度远比电磁相互作用强，所以能克服质子之间的库仑排斥力，把核子结合在一起；核力的力程很短，在原子核外即衰减为零。

1911年，卢瑟福在 Geiger-Marsden 实验的基础上，用 α 粒子（氦核）轰击金箔，通过对散射数据的分析，发现了原子核这一致密中心的存在。1932年查德威克发现中子以后，海森堡提出了他的“中子-质子模型”。原子核结构的研究开始了。

量子色动力学（QCD）描述了原子核相关的最基本的相互作用和反应过程。但是在低能情况下（例如原子核），夸克物质不能用微扰法，所以无法从 QCD 导出核子核子相互作用。另一方面，即使有了核子核子相互作用，几十甚至几百个核子在几十个轨道上进行角动量耦合，态空间的维数是极其巨大的，在实际计算中难以实现。所以，原子核结构理论以唯像模型为基本手段。本章介绍本论文涉及到的几个原子核结构问题。

1.1 原子核质量、电荷半径的局域关系

1.1.1 原子核质量中的奇偶性

原子核质量小于所有核子质量之和，这是因为核子之间的各种相互作用，它们的总和是原子核结合能。原子核结合能的定义如下

$$B(N, Z) = \{NM_n + ZM_p - M(N, Z)\}c^2, \quad (1.1)$$

其中 M_n 是中子质量， M_p 是质子质量， $M(N, Z)$ 是原子核质量。原子核质量与结合能是一一对应的，而结合能与原子核结构直接相关，所以通过研究原子核质量，可以得到关于原子核结构的信息。在上个世纪五十年代之以前，独立粒子壳模型没有得到广泛的认可，这是因为核子核子相互作用是短程的，原子核中没有一个像原子中的库伦势一样的中心势。然而，原子核分离能显示出明显的壳效应，印证了幻数的存在。在 $Z \sim 40, N \sim 60$ 附近，中子分离能还反映出

原子核从球形到椭球形的形状变化^[1]. 奇异核中的新幻数^[2,3], 对超重核稳定岛的探索^[4,5]等等都与原子核质量息息相关. 在晕核^[6]中, 中子分离能对于径向波函数的确定非常关键, 它是现代三体模型的输入量. 原子核结合能可以用来推断各种核反应释放的能量, 进一步推断哪些反应可能发生, 例如两质子发射反应^[7,8].

在粒子物理中标准模型中, Cabibbo-Kobayashi-Maskawa 夸克混合矩阵的幺正性是一个有待证实的问题. 可以通过测量原子核贝塔衰变禁戒跃迁 $0^+ \rightarrow 0^+$ 来确定矢量耦合常数 G_V , 以此检验 CKM 矩阵的幺正性^[9]. 母核与子核质量的高精度数据非常重要. 在天体物理、宇宙大爆炸核合成中, 原子核质量更为重要. 实际上, 天体物理的需要是原子核质量测量实验最重要的动机之一.

年代最早, 也是如今应用最普遍的原子核质量模型是有限液滴模型, 其基本形式如下.

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta(A, Z),$$

其中 E_B 是结合能, A, Z 分别是原子核质量数和质子数, 公式右边各项分别是体积能, 表面能, 库伦能, 对称能, 对能. 由于夸克禁闭, 核子之间的强相互作用力类似于分子之间的范德瓦尔斯力, 二者力程都很短, 所以总的结合能近似地正比于核子数, 所以有体积能; 而表面的核子周围的核子数比内部的核子少, 所以需要引入一个表面修正项, 正比于表面积大小, 这两个特征与小水滴的结合能原理完全一致. 原子核还有中子和质子的相互作用, 用对称能描述; 还有质子之间的库仑排斥力, 所以需要库伦能. 同类核子之间的配对关联造成的对力, 导致偶偶核多一份结合能, 奇奇核少一份结合能:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} 1, & \text{偶偶核} \\ -1, & \text{奇奇核} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2)$$

对力是量子体系中普遍存在的一个现象. 在核物理、金属团簇、超导量子点中, 粒子数为偶数时, 平均每粒子的结合能更大. 核物理中, 这样的对力会导致单核子分离能的奇偶振荡. 除此以外, 还有大量关于对力的证据. 在辛弱数 (seniority) 图像中, 体系基态为 0^+ , 并且核子倾向于配成角动量为 0 的对, 0^+ 的能量更低, 所以与 2^+ 之间有一个很大的劈裂. 在大量单满壳原子核 (只有一种价核子) 的能谱中, 这一图像得到了证实. 在开壳核 (有两种价核子) 中,

由于质子中子相互作用, 能谱更加复杂, 然而, 所有偶偶核的基态都是 0^+ 态, 绝大多数的第一激发态都是 2^+ 态. 在晕核中对力也起到重要的作用. ^9Li 稳定, ^{10}Li 不稳定, 而晕核 ^{11}Li 是稳定的, 这是因为两个晕中子形成配对关联, 降低了体系的能量.

实际上, 中子数对质子对能有影响, 质子数对中子对能也有影响, 所以也有考虑了同位旋效应的对能形式^[10,11]. 不仅如此, 质子数的奇偶性对中子对能也有影响^[12,13], quartet 结构 (α 关联, 即两中子两质子关联)^[14], $T=0$ 中子-质子对关联^[15-18] 等图像都与此相关. 这些现象说明, 不仅中子数、质子数为偶数时结合能更高, 质量数 (总核子数 A) 为偶数时, 也有一份额外的结合能.

在这些工作的启发下, 我们考察了最著名的六组原子核质量模型, 发现它们对于对能的考虑并不完善^[19], 在这些理论结果与实验的偏差中, 仍然存在奇偶性, 而这来源于 A 为偶数时的额外结合能. 而这一部分额外的结合能需要得到妥善的考虑. 我们用简单的经验公式拟合这份额外的结合能, 并尝试改进原子核质量模型的误差.

1.1.2 原子核电荷半径局域关系

在原子核中, 质子的分布决定了原子核的电荷半径. 电荷半径可以反应原子核结构的很多重要信息, 比如晕核^[6], 形状共存^[20]等现象. 中子皮现象是与电荷半径直接相关的一个前沿现象. 重核被认为具有中子皮, 一方面是因为重核拥有过剩的中子, 另一方面是因为库伦势 (排斥力) 使得重核表面质子密度较低. 这与中子星类似, 所以对中子皮的研究或许对于我们理解中子星有帮助^[21].

电荷半径的理论公式有两种, 一种是宏观-微观公式. 与上文中提到的宏观-微观质量公式类似, 用有限的几项公式描述宏观性质, 这样的性质在整个核素图上随着中子数、质子数的变化而均匀变化; 再用少量修正项描述微观结构演变, 例如壳效应、同位旋效应、形变等等. 另一种是平均场计算模型, 用有效相互作用项拟合一系列原子核的基态性质, 以此定标, 然后描述所有原子核的基态.

除了这些公式, 还有一种办法描述和预言原子核基态性质, 即局域关系, 例如 Garvey Kelson 关系^[22,23]. 这一类局域关系假定原子核基态性质在核素图上一个小区内没有跃变, 通过已知原子核的信息来预测它们附近的未知原子核的性质.

到目前为止, 电荷半径的经验公式的最低误差为 0.022fm [24]. 我们调研了一系列局域关系, 用来描述电荷半径的实验值 [25]. 我们发现, 用简单的局域关系 (公式1.3) 描述电荷半径的测量值, 误差仅为 0.0084fm [26]. 这些结果将在第三章介绍.

$$\delta R_{1n-1p} = R(N, Z) + R(N - 1, Z - 1) - R(N, Z - 1) - R(N - 1, Z), \quad (1.3)$$

1.2 IBM-1模型中的随机相互作用

在自然界中, 所有偶偶核 (中子数、质子数均为偶数的原子核) 的基态角动量都是 $J_0 = 0$, 同位旋为 $T_0 = T_{\min}$, 即 $(N-Z)/2$. 在传统上, 人们将这个现象归因于核子-核子剩余相互作用——由于核子核子短程吸引 (可用 δ 相互作用做简单近似), 所以两个同类核子自旋相反时, 轨道波函数重叠最大, 相互吸引最强, 能量最低, 造成同类核子配对现象. 核子-核子配对现象在原子核谱学中可以观察到, 尤其是在原子核结合能的研究中得到明显的证据. Racah [27-29] 用辛弱数准自旋 (Seniority quasispin formalism) 的数学语言优雅地描述了这个现象. 根据这一机制, 早期壳模型 [30] 假设偶数个价核子配对, 所以原子核基态自旋由未配对的核子决定, 从而预言了大量原子核的基态自旋和宇称. 如果没有辛弱数假设, 早期壳模型只能预言满壳原子核, 或满壳外一个粒子或空穴的情况. 后来, 玻尔等人 [31] 发现, 超导体中超导电子对之间的配对, 与原子核中的核子-核子配对, 存在着深刻的相似性. 随着原子核实验数据的积累和理论模型的进步, 配对关联的重要性有上升趋势. 在奇异核中, 配对关联对于中子滴线的位置起着决定性的作用. 在中子星中, 配对关联对于中子星外壳中的热过程具有显著影响 [32].

1988年, Johnson, Birtsch, Dean [33] 用完全随机的相互作用分多个样本进行壳模型计算. $J_0 = 0, T_0 = T_{\min}$ 的组态只占整个组态空间的不到 10%, 但是有 60% 以上的随机样本中, 基态均为 $J_0 = 0, T_0 = T_{\min}$. 这个现象马上引起了关注, 并被不断检验. 广泛的研究表明, 不仅费米子系统如此, 玻色子系统也是如此. 一个自然的问题是: 我们真的理解基态自旋为零这个现象吗? 这个问题是普遍的, 在原子团簇、势阱中的粒子、量子点、无规则系统中都是适用的.

多体模型都是基于“组态+相互作用”模式, 这也是多体问题唯像模型的基本特征. 如果排除了相互作用的因素, 基态自旋可能是“组态+相互作用形式”本身导致的——模型本身对组态具有“偏好”. 人们为了理解这一现象, 对壳模型、IBM 模型进行了大量的数值实验, 产生了很多有趣的结果. 随机相互

作用的数值实验, 对我们理解我们的模型, 具有重要的参考意义 [34-36].

IBM 模型 (相互作用玻色子模型: the Interacting Boson Model) [37] 假定同类核子两两配对, 组合成自旋为 0 (s) 或 2 (d) 的玻色子. s 和 d 玻色子算符作为基本单元, 通过角动量耦合构成组态与相互作用. 虽然结构简单, IBM 模型是一个非常强大的工具. 它通过李群代数展示了原子核的动态对称性 (dynamical symmetries), 并由此衍生出一系列代数模型 [38].

人们用 IBM 模型做了大量随机相互作用实验 [39-43]. 参考文献 [39] 讨论了单体、两体随机相互作用下的转动谱和振动谱. 在参考文献 [44, 45] 中, 所有偶偶核被分为三类: 辛弱数、非谐振子和转动区域. 定义

$$R_I = (E_{I_1^+} - E_{0_1^+}) / (E_{2_1^+} - E_{0_1^+}) \quad (1.4)$$

作为指标. R_4 为 1.0, 2.0, 3.33 时, 对应的偶偶核分别为辛弱数、非谐振子、转动模式. 在这三个区域, 这种系统性非常普遍. 而且随着中子数和质子数的增加, 这三种不同模式之间的转变非常迅速. 辛弱数模式到非谐振子模式之间的转变曾被归因于中子-质子相互作用 [46].

我们观察到, IBM-1 模型中的低激发态能量值的劈裂中存在线性关联 (I 取不同值时, 公式 1.4 中定义的 R_I 之间呈线性关系), 这与基态自旋是否为 0 无关. 低激发态能级劈裂之间的线性关联是 sd 玻色子系统的性质. 我们发现在大多数随机样本中, 这样的线性关联与 d 玻色子 U(5) 群极限给出的预言近似一致. 我们推导了 d 玻色子系统在随机相互作用下基态自旋的严格公式. 这一部分将在第四章介绍.

1.3 壳模型配对近似下的伽莫夫-泰勒跃迁

原子核壳模型是最重要的核结构模型之一 [30]. 首先它假定对于每一个核子, 其他核子的总作用构成一个中心势场, 这个核子在其中自由运动. 这在当初构成了争议, 一方面是因为原子核中没有原子中的电荷中心, 所以中心势是否存在是一个疑问; 另一方面, 几十个到几百个核子结合在一起, 人们难以想象核子之间没有碰撞. “幻数”的存在佐证了中心势的存在. 在原子核的尺度下 (1.75fm 到 15fm), 这个中心势的不同轨道形成劈裂, 所以当两个核子碰撞时, 如果下层能级已经占满, 它们无法跃迁到其他轨道, 所以这两个核子的波函数碰撞前后并没有改变, 碰撞没有造成影响. 所以核子被看做独立的粒子, 在中心势场中运动, 这叫做“独立粒子模型”. “幻数”即 2, 8, 10, 28, 50, 82, 126 等数

字, 当中子数或质子数等于它们的时候原子核很稳定. 在独立粒子模型中, 如果仅仅取一个简单的中心势场 (比如方势阱、谐振子势、 Woods-Saxon 势等), 无法给出这些幻数. Mayer^[30] 在中心势以外加上较强的自旋-轨道耦合项 (原子物理中这一项很小), 轨道的能级受到影响, 被“重新编排”成不同的组, 每组轨道 (一个大壳) 之间有相对较大的劈裂, 一种核子 (例如中子) 每填满一个大壳, 这种核子的个数 (例如中子数) 就等于一个幻数. 在现代壳模型中, 人们假定充满内层大壳的核子不参与激发 (低能情况下这一假设正确), 这些核子构成惰性内核 (inert core), 未填满的大壳中的核子叫做价核子 (类似于原子物理中的价电子), 这些价核子占据不同的轨道, 形成组态 (configuration), 这些组态之间存在剩余相互作用 (刨除中心势的贡献), 这叫做组态-相互作用壳模型 (Configuration-Interaction Shell Model), 当今所有壳模型计算都以此为基本框架. 在这个图像下, 通过对角化哈密顿量, 产生本征值 (能量值) 和波函数. 根据这些波函数, 以及相关的跃迁算符, 得到跃迁几率等等可观测量.

壳模型古老而年轻, 是最基本的原子核模型之一, 也是其他模型 (比如平均场方法、集体模型等) 的重要参考对象^[47]. 早期实验技术不太发达时, 入射粒子的能量有限, 只能克服轻核的库伦排斥力, 所以原子核实验早期所用的靶核大都是轻核. 壳模型在轻核区取得了巨大的成功. 随着技术的进步, 中重核的实验数据逐渐积累. 然而随着质量数的增大, 原子核价壳层轨道的个数越来越多, 新增轨道的角动量越来越大, 所以壳模型组态空间的维数呈指数增长, 壳模型哈密顿量的对角化变得越来越困难. I. Talmi 有一个著名的例子: 对于原子核 ${}^{154}_{62}\text{Sm}_{92}$, 质子价壳层在 $Z = 50 - 82$, 中子价壳层在 $N = 82 - 126$, 总共大约有 3×10^{14} 个 2^+ 态^[47]. 而壳模型可对角化的维数上限是 $10^{11} - 10^{12}$, 这个困境在可预见的未来不会得到根本解决.

所以在重核区域, 人们通过不同的方法对空间进行截断. 在壳模型计算中, 可以在特定条件下, 减少轨道的根数, 或者限定某些轨道上的粒子数. 上个世纪七十年代, Arima 和 Iachello 假定同种核子配成角动量为 0 或 2 的玻色子, 以此为基本单元构造组态和相互作用, 建立相互作用玻色子模型 (IBM: Interacting Boson Model). 相比壳模型, IBM 模型大大减小了组态空间维数, 并在描述和预言原子核能谱、跃迁等方面取得了成功. 陈金全^[48-50] 在上个世纪九十年代提出了配对近似模型, 赵玉民等^[51] 完善了 this 模型. IBM 以玻色子为基本单元, 而配对近似以费米子为基本单元, 考虑它们之间的配对, 再用配成的对组建基矢, 所以考虑了泡利不相容原理. 两个同类核子配成集体对, 对结

构系数的设定是开放的，有各种不同的方法确定“集体对”内部的结构，所以配对近似更灵活。

新世纪的这十多年，配对近似取得了一系列发展^[52]，被应用到中重核各个区域，讨论了配对的可靠性、原子核能谱、以及各类电磁跃迁。傅冠健发展了 $T=0$ 质子中子配对关联^[18,53-55]，并在配对近似框架下讨论了4核子 Quartet 关联。

贝塔衰变^[30]是原子核物理中一个基本的物理过程：中子（udd）中一个 d 夸克衰变为一个 u 夸克，释放一个电子和一个反电子中微子，留下的两个 u 夸克和一个 d 夸克组成一个质子。所以自由中子的寿命只有 15 分钟。如果在束缚的原子核（母核）中，一个中子衰变为质子，子核可能处在各个不同的激发态上，反映出原子核的结构信息。在能量守恒定律满足的条件下（比如丰质子原子核，或星体环境中，原子核具有很高的动能），质子也可以衰变为中子，释放出一个反电子和一个电子中微子。质子还可以俘获一个原子内层电子，变为一个中子，释放一个电子中微子。从费曼图上看，这些反应都是同一个过程，它们都是由弱相互作用造成的，Mayer 把它们统称为贝塔转变（ β transformation）^[30]。

在宇宙演化的过程中，随着宇宙的膨胀，宇宙中的物质温度逐渐降低，中子和质子组成氢、氦等元素，随着进一步冷却，氦核组合在一起，形成 ^8Be , ^{12}C , ^{16}O 等等越来越重的元素，合成 Fe 等中重核以后，发生快速中子俘获，慢速中子俘获等过程，形成重核。在丰中子的原子核中，中子通过贝塔衰变变为质子；而丰质子的原子核中的质子通过电子俘获反应变为中子，所以贝塔稳定性决定了哪些原子核能稳定存在，决定了今天我们身体里的元素。直到今天，核天体物理学家仍然在研究一些贝塔衰变，在星系的元素丰度与贝塔衰变反应截面之间寻找联系，试图建立宇宙历史上曾经出现的（以及星系中正发生的）核素反应道。

贝塔衰变中涉及到电子中微子。中微子的质量是一个物理基本问题。在某些 isobar 链（同质量数的核素）上，质子数相差 2 的两个偶偶核的基态可能都处于 isobar 链上的能量极小值，所以根据能量守恒定律，它们不能向相邻原子核进行贝塔衰变。但是它们之间有可能发生双贝塔衰变（ $2\nu\beta\beta$ ），释放出两个电子（或者正电子）和两个中微子。如果它们之间的奇奇核的基态能量比它们的基态低，但是由于角动量选择定则，这两个偶偶核向这个奇奇核的贝塔衰变被禁止（属于禁戒跃迁，概率非常小），双贝塔衰变也可能发生。如果中微子是 Majorana 费米子，它就是自己的反粒子，双贝塔衰变可能不释放中微子，只

释放出两个电子，即零中微子双贝塔衰变 ($0\nu\beta\beta$)。

适合进行双贝塔衰变实验的核素共有十一种，人们正在用它们进行实验研究 (NEMO-3, EXO200 等实验组)。只要实验上观察到 $0\nu\beta\beta$ 过程，就能说明中微子是 Majorana 费米子。另一方面，一旦 $0\nu\beta\beta$ 过程被观察到，中微子的绝对质量也可以估算，母核的跃迁矩阵元将会至关重要。

在原子核贝塔衰变中，当出射电子与反电子中微子角动量耦合为1时，这样的跃迁称为 Gamow-Teller 跃迁^[56]。伽莫夫-泰勒跃迁是贝塔衰变、双贝塔衰变的核心过程。由于弱反应的实验难度较大，人们用核子交换反应 (例如 $136\text{Xe}(3\text{He},t)136\text{Cs}$)^[57]代替贝塔衰变，得到同样的核结构信息。伽莫夫-泰勒跃迁强度分布，是每个原子核的指纹。

在理论上，壳模型^[58,59]和准粒子随机相位近似方法 (QRPA)^[60]都可以计算伽莫夫-泰勒跃迁。壳模型对低激发态能提供较为可信的预言，而 QRPA 对高激发态的描述比较好，尤其对 5-10MeV 附近的 Gamow-Teller 共振峰的位置预言准确，而且能考虑多个大壳的高能激发。

对于重核低激发态 Gamow-Teller 跃迁，配对近似可能是一个不错的选择。我编写了程序，进行了初步的计算，尚未发表。这一部分工作将放在第四章介绍。

第二章 原子核质量、电荷半径的局域关系

原子核质量、电荷半径都是原子核的基本性质. 质量反映了原子核的结合能大小, 电荷半径反映了质子的空间分布. 这两个量与原子核结构直接相关, 体现出壳效应、对力、晕核、Wigner 效应、形变等原子核结构演变现象. 随着实验数据的积累和理论工具的进步, 目前有 3 种方法, 对这两个物理量进行描述和预言. (1) 宏观经验公式, 用简单的公式和很少的参数拟合原子核质量、电荷半径实验数据; (2) 微观方法, 通过拟合各核区的能谱跃迁等实验数据, 得到相应的核子-核子相互作用, 计算基态结合能以及电荷半径; (3) 宏观+微观公式, 在宏观经验公式的基础上, 加上一些考虑各个核区结构的微观项, 得到对质量、电荷半径较好的描述.

本章分别介绍我们在原子核质量和电荷半径方面的工作.

2.1 原子核质量中的奇偶性

原子核质量是原子核物理、天体物理、宇宙学最重要的物理量之一. 领域内有一些受欢迎的模型, 可用来预言原子核质量, 比如 Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov 理论^[61,62], Duflo-Zuker 模型^[11], Wezsäcker-Skyrme 模型^[63,64], 有限液滴模型 (FRDM)^[65,66]. 局域质量关系在外推未知原子核质量时也非常有用, 比如 Garvey-Kelson 关系^[22,23,67,68], 中子-质子相互作用系统学^[13,69]. 关于原子核质量的实验测量和理论研究可以参考文献 [9,70], 文献 [71] 中讨论了各种不同的模型.

核子对力对于研究原子核低激发态非常重要. 原子核单核子分离能的奇偶振荡反映了对能的贡献. 然而, 由于原子核结构在核素图不同区域的演化, 在原子核模型中令人满意地考虑对能是很难的. 比如, 在参考文献 [69] 中, “实验的”对称能也产生了奇偶振荡, 这被阐释为理论模型对对能处理不善的表现.

所以这个工作的目标是考察: 在多大程度上, 原子核质量模型考虑了质量的奇偶性. 为了这个目标, 我们细致地调查了一系列著名原子核模型对单核子分离能的预言值相比实验值^[73]的误差. 我们在这些理论误差中观察到了奇偶振荡. 对这种奇偶振荡的考虑, 有益于减少质量模型的总均方差.

简而言之, 我们把原子核结合能、单中子分离能对实验值的偏离定义为“残余”结合能和“残余”分离能. 它们只是理论的误差. 我们定义残余的单中

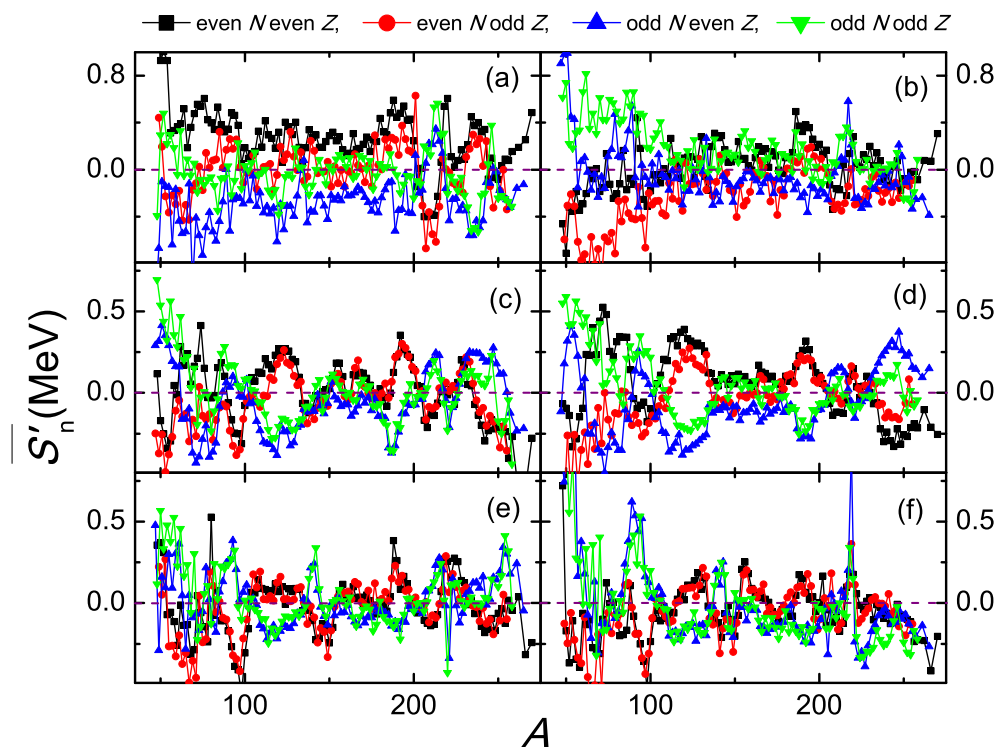


图 2.1 单中子分离能的误差平均值. 本图取自文献 [72].

Fig 2.1 $\overline{S'_n}(A)$: Average value of deviations of theoretical models, for single neutron separation energy, adapted from Ref. [72]. For different theoretical models: (a) Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov-14 [61], (b) Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov-17 [62], (c) the Duflo-Zuker model [11], (d) the Weizsäcker-Skyrme model [11], (e) Moller-Nix-1995 [66], (f) Moller-Nix-1988 [65].

子分离能和单质子分离能为 $S'_n(N, Z) = S_n^{\text{exp}}(N, Z) - S_n^{\text{th}}(N, Z)$, $S'_p(N, Z) = S_p^{\text{exp}}(N, Z) - S_p^{\text{th}}(N, Z)$, 残余的结合能为 $B'(N, Z) = B^{\text{exp}}(N, Z) - B^{\text{th}}(N, Z)$. N 和 Z 分别是中子数和质子数. 为了突出这些量的统计性质, 我们对属于一个 A (质量数) 值的所有数据求平均, 分别标记为 $\overline{S'_n}(A)$, $\overline{S'_p}(A)$, $\overline{B'}(A)$. 它们是研究奇偶性的关键物理量.

在图2.1和图2.2中, 我们分别展示 $\overline{S'_n}(A)$ 和 $\overline{S'_p}(A)$ 相对 A 的变化曲线. 这里考察了六组理论数据, 包括 Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov-14 [61], Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov-17 [62], Duflo-Zuker 模型 [11], Weizsäcker-Skyrme 模

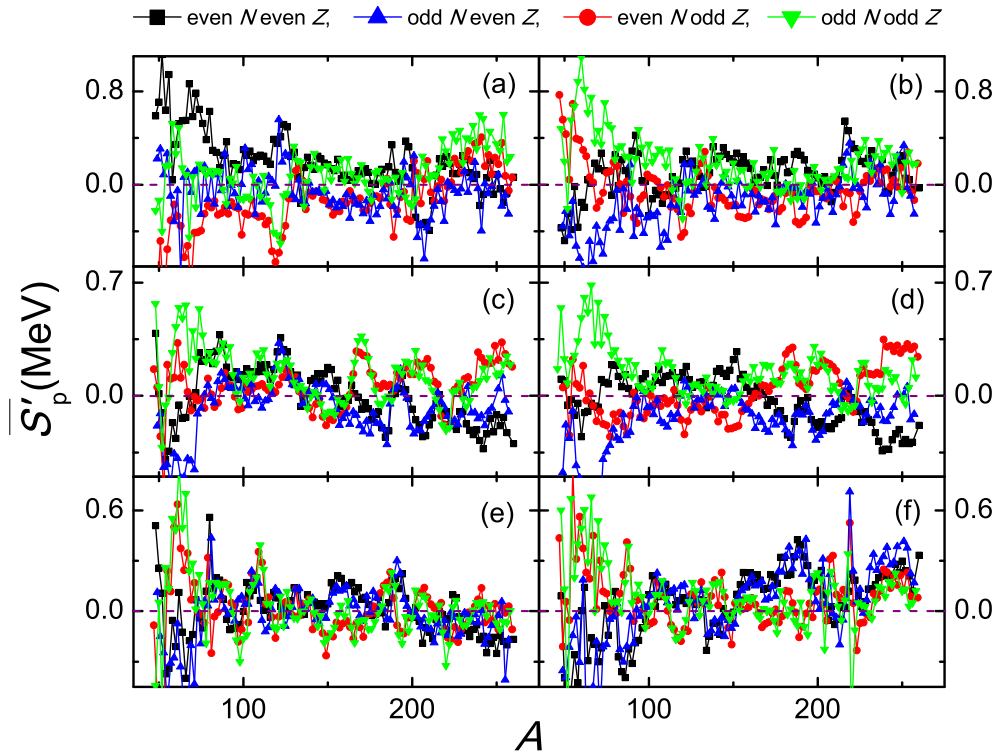


图 2.2 单质子分离能的误差平均值. 本图取自文献 [72].

Fig 2.2 The same with Fig. 2.1 except it is single proton separation energy. adapted from Ref. [72].

型（径向基修正）^[64], Moller-Nix-1995^[65] 和 Moller-Nix-1988^[66]. 我们按照中子数 N 与质子数 Z 的奇偶性, 把原子核分为四类: 偶偶核, 偶奇核, 奇偶核和奇奇核. 在图2.1中, $\overline{S'_n}(A)$ 对这四类原子核的四个分支彼此不同. 由于残余的对能, 偶数 N 的分支与奇数 N 的分支之间有一个劈裂. 更重要的是, 我们观察到偶偶核的 $\overline{S'_n}(A)$ 统计上比偶奇核（偶数 N 奇数 Z ）的 $\overline{S'_n}(A)$ 更大; 奇奇核的又比奇偶核的更大, 虽然这个劈裂比对能造成的劈裂小的多. 在图2.2中 $\overline{S'_p}(A)$ 也有类似的现象. 这与“偶数 A 的原子核相比奇数 A 的原子核多一份结合能”这一推测 [12, 74, 75]是一致的: 如果偶数 A 的原子核比奇数 A 的原子核更稳定, 上述的现象就会出现.

由于 Dufflo-Zuker 模型和 Weizsäcker-Skyrme 模型在优化时没有特别针对 A 的奇偶性, 我们在这些模型中寻找奇偶振荡的更多证据. 为了突出这种奇偶性,

我们定义

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(A) &= \overline{S'_n}{}^{ee}(A) - \overline{S'_n}{}^{eo}(A-1); \\
 \Delta_2(A) &= \overline{S'_n}{}^{oo}(A) - \overline{S'_n}{}^{oe}(A-1); \\
 \Delta_3(A) &= \overline{S'_p}{}^{ee}(A) - \overline{S'_p}{}^{oe}(A-1); \\
 \Delta_4(A) &= \overline{S'_p}{}^{oo}(A) - \overline{S'_p}{}^{eo}(A-1); \\
 \Delta_5(A) &= \overline{B'}(A) - \overline{B'}(A-1), \quad A = \text{even}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里的上标“ee”，“oo”，“oe”，和“eo”是偶数 N 偶数 Z ，奇数 N 奇数 Z ，奇数 N 偶数 Z ，和偶数 N 奇数 Z 的缩写. 在图2.3中，我们展示在两个精度较高的宏观-微观模型 Duflo-Zuker 模型 Weizsäcker-Skyrme 模型中这些 Δ 的值. 我们可以很清楚地看到上文中描述的奇偶性. 对于 A 的值相对较小的原子核，这些 Δ 的值较大. 它们在 $A \sim 70$ 时约为 400 keV，在 $A \sim 100$ 时约为 200 keV，在 A 大于 100 时小于 0.

我们用经验的公式描述图2.1-2.3中展示的奇偶性. 我们在 Duflo-Zuker 模型和 Weizsäcker-Skyrme 模型的 S_n^{th} 和 S_p^{th} 的数据中引入额外的一项：偶数 A 的原子核 $C_1 + C_2/A$ ，奇数 A 的原子核 $C_3 + C_4/A$. 通过对实验数据 AME2012 [73] 进行 χ^2 拟合，我们得到参数 C_1, C_2, C_3, C_4 . 对于结合能我们也做了相同的处理. 最终结果总结在表2.1中. 可以看到，我们得到了负的 C_1, C_4 值和正的 C_2, C_3 值（除了结合能的 C_3 接近于0）. 所以这额外的一项在偶数 A 的原子核中为正，在奇数 A 的原子核中为负. 这与偶数 A 原子核有额外结合能的假设是一致的.

向参考文献 [64] 的理论数据中加入这一项以后，参考文献 [69] 中“实验”对称能的奇偶振荡的问题便解决了. 也就是说，如果这个工作中的修正项被考虑，“实验”对称能的奇偶振荡便不会出现.

由于考虑了上述的奇偶性，模型对原子核结合能和分离能的描述得到了改善. 根据表2.1，Weizsäcker-Skyrme模型的单核子分离能的均方根标准差减少了19-20 keV，Duflo-Zuker模型减小了8-9 keV. 结合能的描述也改进了. 值得一提的是，如果我们把偶数 A 的原子核分成偶偶核与奇奇核两类，奇数 A 的原子核分成偶奇核与奇偶核两类，可以把 Weizsäcker-Skyrme 模型的单核子分离能均方根误差减少 27-32 keV，结合能减小 12 keV，Duflo-Zuker 模型的单核子分离能减小 13-14 keV，结合能减小 4keV.

这个工作调研了领域内比较重要的几个质量模型对分离能的预言值相对实验值 AME2012 的偏离. 我们在这些偏离中观察到统计的偏离. 这些奇偶性与参

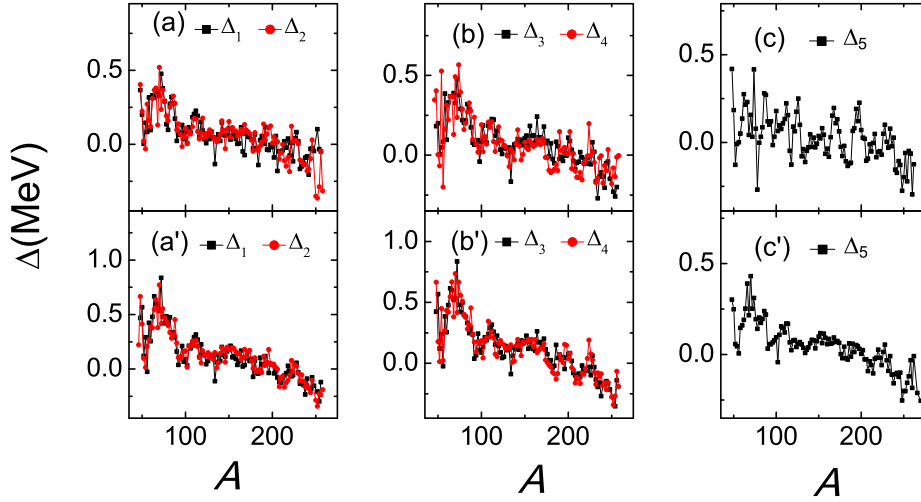
图 2.3 不同模型的 Δ 值. 本图取自文献 [72].

Fig 2.3 Values of different Δ s, adapted from Ref. [72]. (a) $\Delta_1(A)$ and $\Delta_2(A)$ of the Duflo-Zuker model, (a') $\Delta_1(A)$ and $\Delta_2(A)$ of the Weizsäcker-Skyrme model, (b) $\Delta_3(A)$ and $\Delta_4(A)$ of the Duflo-Zuker model, (b') $\Delta_3(A)$ and $\Delta_4(A)$ of the Weizsäcker-Skyrme model, (c) $\Delta_5(A)$ of the Duflo-Zuker model, (c') $\Delta_5(A)$ of the Weizsäcker-Skyrme model.

表 2.1 修正项对质量公式的改进. 本表取自文献 [72].

Table 2.1 Reduction of root mean square deviations (RMSD) of two mass models ^[11, 63] on both binding energy and separation energy, and corresponding parameters.

	Duflo-Zuker			Weizsäcker-Skyrme		
	S_n	S_p	B	S_n	S_p	B
C_1	-0.075	-0.070	-0.023	-0.086	-0.056	-0.072
C_2	11.334	17.001	2.214	18.538	14.239	10.295
C_3	0.043	0.050	0.051	0.051	0.084	-0.006
C_4	-12.039	-6.905	-12.460	-13.907	-18.300	-5.295
σ	0.294	0.324	0.570	0.275	0.268	0.213
σ'	0.286	0.315	0.568	0.256	0.248	0.207

考文献 [75] 的推测一致：由于中子质子相互作用，偶偶核与奇奇核（质量数为偶数）相比其他原子核，多一份结合能. 将这种奇偶性以简单公式的形式考虑以后，理论模型的预言值得到了改善.

2.2 原子核电荷半径

今天，原子核的大小 [25] 是原子核实验数据最丰富、最准确的物理量之一. 电子散射和缪子原子光谱是直接测量电荷半径的实验方法 [76]，这样的实验数据表明： β -稳定线附近的原子核密度是基本恒定的. 随着放射性离子束 [77]、超高灵敏度激光光谱技术 [78, 79] 的发展，奇异核的电荷半径测量取得了很大的进步. 由于奇异核距离稳定线较远，对奇异核电荷半径的测量反映出中子皮效应 [21, 80–82]、原子核形状变化 [83–85]、形状共存 [20, 86, 87]. 这一系列问题是下一代原子核实验装置最重要的目标之一，比如不稳定核的电子散射实验正在进行中 [88, 89].

更准确的实验数据对现有的理论提出挑战，也会兆示新的原子核结构. 在微观计算中，Hartree-Fock-Bogolyubov模型 [90, 91] 以及相对论平均场模型 [92, 93] 可以给出电荷半径的计算结果，精度 (RMSD) 在 0.027fm 左右. 电荷半径也可以从 α 衰变能 [94, 95]，以及重核团簇辐射、质子辐射 [96] 等数据中推导. 在宏观经验公式中，一般有如下形式 [24, 97, 98]

$$R(N, Z) = r_0 A^{1/3} + r_1 A^{-2/3} + r_2 I + r_d \Delta E,$$

这里 A 是质量数（核子总数）， $I = N - Z/A$ 代表原子核的同位旋第三分量， ΔE 是壳修正. 我们用最新的实验数据 [25, 99] 进行了数值实验，发现这四项都是必要的. 首先我们假定 $R(N, Z) = r_0 A^{1/3} + r_1 A^{-2/3} + r_2 I$ 并用这个公式拟合实验数据. 我们定义误差为 $R_{res}^{(3)} = R_{exp} - r_0 A^{1/3}$. 在图2.4 中，可以看到明显的壳效应. Z 相同的点彼此之间更紧凑，形成同位素链（isotopic chain）. 所以在同一区域中，同中子数移动（isotone shifts）比同位素移动（isotope shifts）要大得多. 这与我们的直觉一致：电荷半径对质子数 Z 的依赖更大. 对于壳模型，可以用价核子数 N_n, N_p 构成的经验公式 $N_n N_p / (N_n + N_p)$ 来拟合. 参考文献 [24] 中，质量模型中的壳修正项、形变项被用来修正电荷半径公式，在 $A \geq 16$ 区域取得了 0.022fm 的精度. 宏观经验公式具有形式简洁、规律普遍的优点. 局域公式则更为精确，适于短距离外推未知电荷半径. 其中，Garvey-Kelson 关系 [22, 23] 是一个典型的例子. Garvey-Kelson 关系在电荷半径的描述上达到了

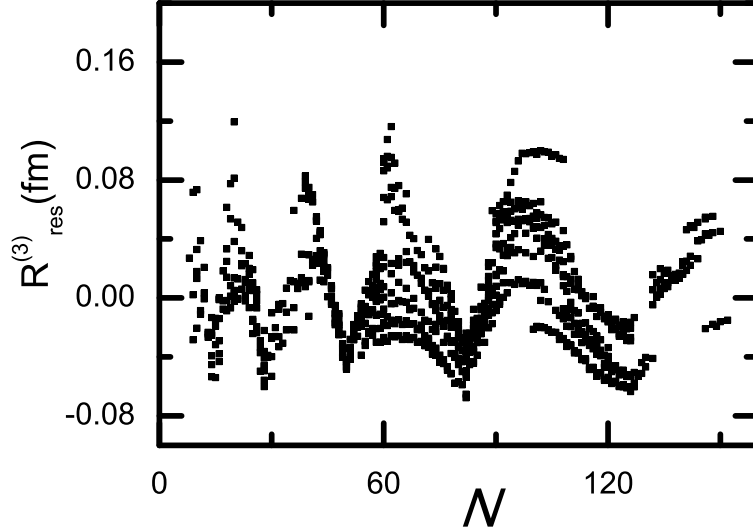


图 2.4 $R_{res}^{(3)} = R_{exp} - r_0 A^{1/3} - r_1 A^{-2/3} - r_2 I$.

Fig 2.4 $R_{res}^{(3)} = R_{exp} - r_0 A^{1/3} - r_1 A^{-2/3} - r_2 I$, versus neutron number, where R_{exp} is the experimental value of nuclear charge radii, A is the mass number, r_0, r_1, r_2 are parameters. This plot well shows the shell effects in nuclear charge radii.

0.01 fm 的精度 [97]. 基于质子-中子相互作用的局域关系也受到关注 [100-104]. 受这些工作启发, 我们设计了一系列局域关系, 并测试了它们的精度.

图2.5到图2.7是各种局域关系的示意图, 表2.2和表2.3是这些局域关系的精度, 考虑 $N, Z \geq 8$ 的原子核. 其中,

$$\delta R_{1n-1p} = R(N, Z) + R(N-1, Z-1) - R(N, Z-1) - R(N-1, Z), \quad (2.2)$$

这一公式最为准确, 达到了 0.0084fm 的精度, 图2.8中展示这个公式的误差. 可以看到, 部分实验数据的误差大于 0.1fm, 然而这个局域公式的准确度很高, 绝大多数数据点在 0.01fm 以下.

在表2.2和表2.3中可以看到, “Box 1-3” 局域关系的描述比较准确, 这说明随着中子数和质子数的变化, 电荷半径的变化是均匀的 [105]. 一般认为, 原子核内部密度基本不变 (不可压缩), 表面密度随结构有一定变化 (例如晕核, 表面的一对晕中子的几率波非常弥散).

其他的局域关系并不准确, 这有很多原因. 局域关系的误差分为两部分, 一部分随中子数、质子数的增长而光滑变化, 包括公式 (2.2) 中的前三项; 另一部分随中子数、质子数的增长发生跃变, 取决于壳效应、形变效应、配对效

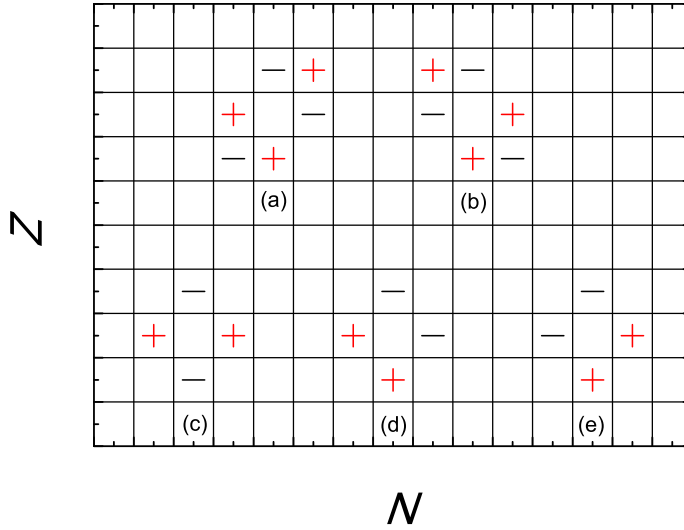


图 2.5 不同的局域关系式 (1) .

Fig 2.5 Different local relations (1): (a) Garvey-Kelson longitude relation; (b) Garvey-Kelson transverse relation; (c) Diamond 1; (d) Diamond 2; (e) Diamond 3.

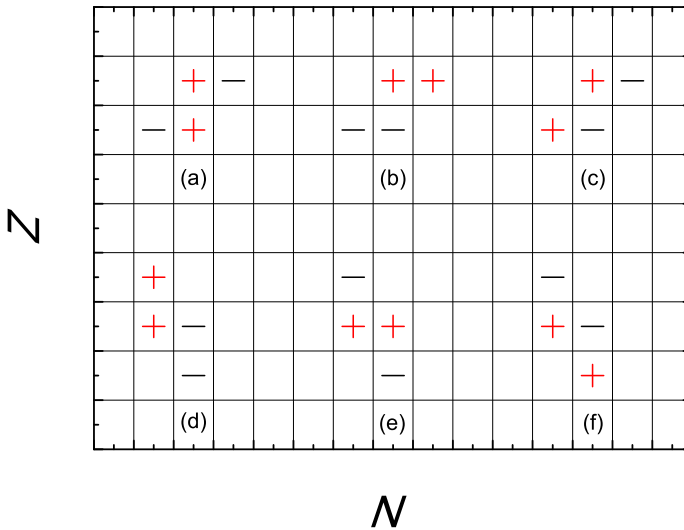


图 2.6 不同的局域关系式 (2) .

Fig 2.6 Different local relations (2): (a) Parallelogram 1; (b) Parallelogram 2; (c) Parallelogram 3; (d) Parallelogram 4; (e) Parallelogram 5; (f) Parallelogram 6.

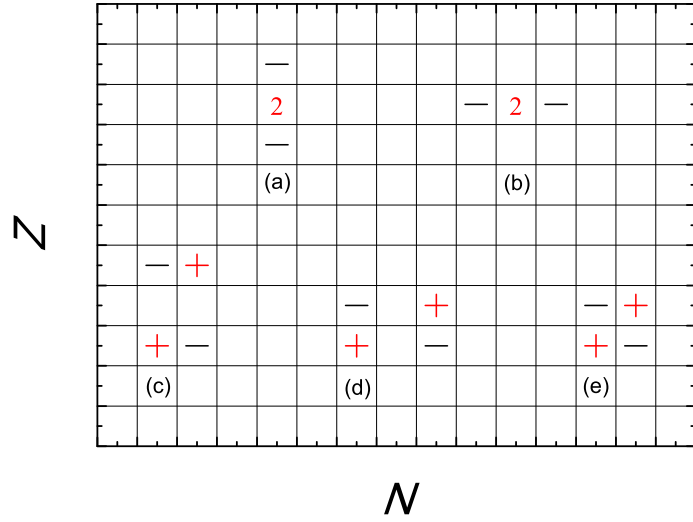


图 2.7 不同的局域关系式 (3) .

Fig 2.7 Different local relations (3): (a) Line 1; (b) Line 2; (c) Box 1; (d) Box 2; (e) Box 3.

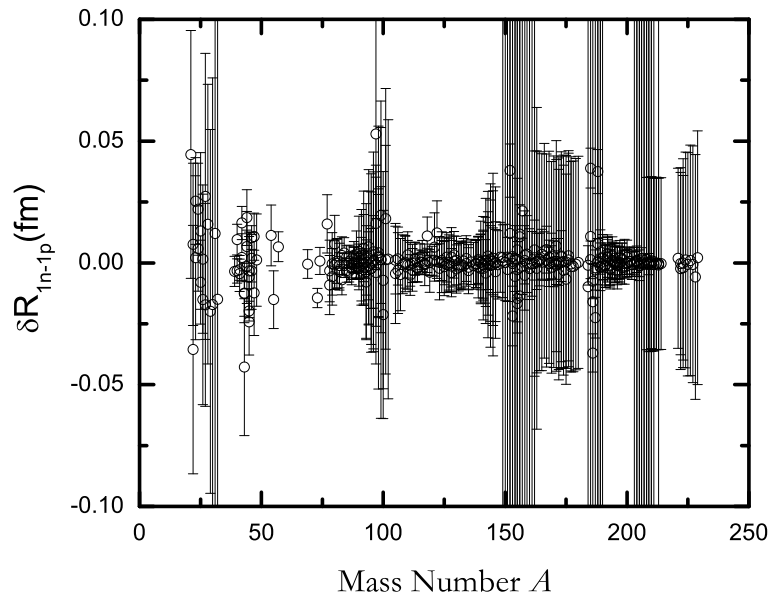


图 2.8 $\delta R_{1n-1p}(N, Z) = R(N, Z) + R(N - 1, Z - 1) - R(N - 1, Z) - R(N, Z - 1)$.

Fig 2.8 Root mean square deviations of $\delta R_{1n-1p}(N, Z) = R(N, Z) + R(N - 1, Z - 1) - R(N - 1, Z) - R(N, Z - 1)$. Though the experimental errors of nuclear charge radii can be large, the local relation of δR_{1n-1p} fits the experimental values very well.

表 2.2 电荷半径的不同局域关系式的误差 (1) .

Tab 2.2 Root mean square deviations of local relations (1).

	Garvey-Kelson		Diamond			
	Longitude	Transverse	(1)	(2)	(3)	
RMSD (fm)	0.012	0.011	0.053	0.069	0.047	
Average Deviation (fm)	-0.0004	0.0009	0.001	-0.056	-0.025	
Number	223	202	290	290	290	
Parallelogram						
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	0.014	0.083	0.024	0.047	0.048	0.055
	-0.0002	0.060	-0.015	0.027	-0.0004	-0.043
	404	404	404	268	268	268

应, 以及具体每个核的性质. 所以好的局域关系应该消除第一部分误差, 以及壳效应与配对效应. Garvey-Kelson关系和“Box 1-3”三个局域关系满足这些条件.

值得一提的是, “Line 2”局域关系, 即

$$\Delta(N, Z) = R(N, Z) - 2R(N - 1, Z) + R(N - 2, Z), \quad (2.3)$$

显示出非常明显的奇偶性^[106]. 如图2.9, 所示, 大多数偶数中子的原子核 Δ 的值大于零, 而奇数中子的原子核 Δ 的值小于零. 这说明, 中子是否配对 (奇偶性), 对于质子分布有显著的影响. 这与上文中关于质量奇偶性的讨论是一致的, 即中子是否配对, 对于质子的对关联能量有直接影响. 这可能兆示 Quartet、T=0 配对等等中子质子相互关联.

电荷半径未知的原子核, 可能处于局域关系中的任一位置 (例如在

表 2.3 电荷半径的不同局域关系式的误差 (2) .

Tab 2.3 Root mean square deviations of local relations (2).

	Box			Line	
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)
RMSD (fm)	0.013	0.0096	0.0084	0.052	0.016
Average Deviation (fm)	-0.0002	0.00002	0.00028	-0.0001	-0.0005
Number	296	427	394	354	641

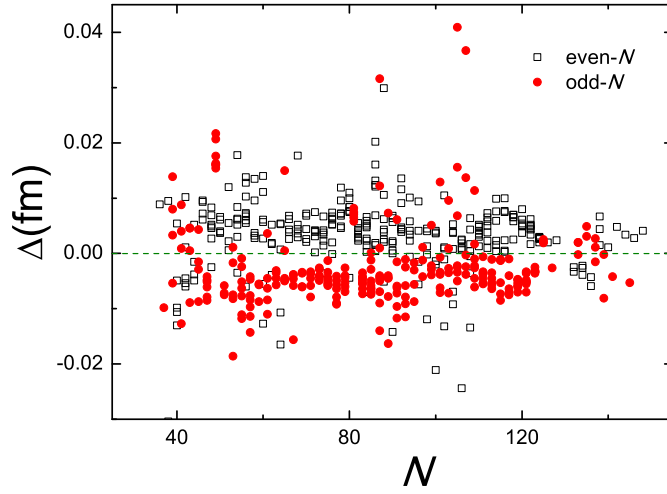


图 2.9 $\Delta(N, Z) = R(N, Z) - 2R(N - 1, Z) + R(N - 2, Z)$.

Fig 2.9 $\Delta(N, Z) = R(N, Z) - 2R(N - 1, Z) + R(N - 2, Z)$ vs. N . Red dots represent odd- N cases, while hollow squares represent even- N cases. Neutron number oddity impacts proton distributions.

δR_{1n-1p} 中, 有四个相对位置, 均有可能是电荷半径未知的原子核), 所以, 对于数据未知的原子核, 可以用它周围的原子核数据, 用多个局域关系进行预言, 然后取平均^[67,68], 得到更准确的结果. 所以我们用如下三个最准的局域公式, 进行试验:

$$\begin{aligned}\delta R_{1n-1p} &= R(N, Z) + R(N - 1, Z - 1) - R(N, Z - 1) - R(N - 1, Z), \\ \delta R_{1n-2p} &= R(N, Z) + R(N - 1, Z - 2) - R(N, Z - 2) - R(N - 1, Z), \\ \delta R_{2n-1p} &= R(N, Z) + R(N - 2, Z - 1) - R(N, Z - 1) - R(N - 2, Z).\end{aligned}$$

只用一个公式进行预言时, 由于未知核可以处在任意位置 (如图2.10所示), 一共有12种情形. 如果对同一个核用两种方式 (不同的相对位置) 做预言并进行叠加, 则有 $C_{12}^2 = 66$ 种不同的情形. 对于叠加次数 n ($n=1,2,3,\dots$), 我们寻找对上述三个公式最佳的组合方式. 在表2.4中, 对于 $n = 1, 2, \dots, 12$, 我们展示预言原子核电荷半径的最佳策略.

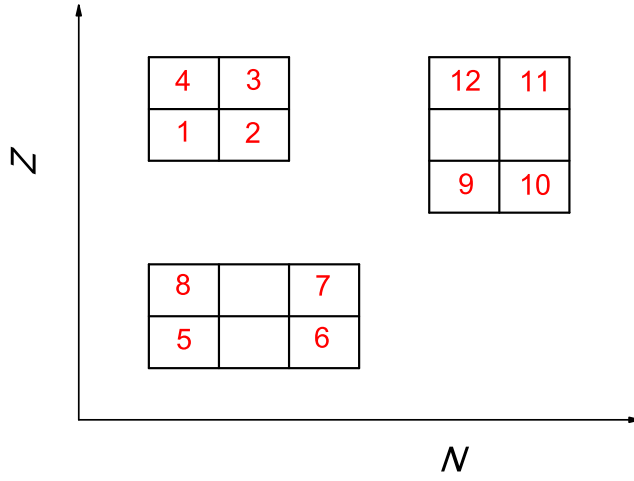


图 2.10 原子核在局域公式中的相对位置.

Fig 2.10 The relative location of a certain nucleus in a local relation. The three relations in the sketch are separately $\delta R_{rm1n-1p}$, $\delta R_{rm1n-2p}$ and $\delta R_{rm2n-1p}$.

表 2.4 不同局域关系式的最佳组合.

Tab 2.4 For each n (number of local relations used to describe one nucleus), the best combination of those local relations.

n	C	σ (fm)
1	1	0.008371
2	1,3	0.005480
3	1,7,10	0.003566
4	1,8,10,11	0.002428
5	2,5,8,10,11	0.001778
6	2,4,5,6,10,11	0.001480
7	2,4,5,6,8,10,11	0.001381
8	2,3,4,5,6,8,10,11	0.001282
9	2,3,4,5,6,7,8,10,11	0.001253
10	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	0.001266
11	1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12	0.001362
12	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	0.001514

2.3 小结

本节考察了当前流行的质量模型，包括 Hatree-Fock-Bogoliubov 计算，Duflo-Zuker 模型，Weizsaker-Skyrme 模型，Moller-Nix 模型. 我们考察这些模型的理论值相对实验值的偏离，用简单的局域关系式扣出奇偶性. 我们指出，这些模型没有完整地考虑奇偶性，由此引入奇偶修正，提高了这些模型的精确度. 受此启发，我们用简单的局域关系描述原子核电荷半径，在 $N, Z \geq 8$ 区域取得了 0.0084fm 的精度.

第三章 sd 玻色子的随机相互作用

3.1 背景简介

核子核子相互作用是一个非常重要的课题. 在壳模型框架下, 有以下几种方法得到有效相互作用: 1. 对力+多极多极力, 经过少量调参, 得到唯象的相互作用^[107]; 2. 以通用的单体+两体相互作用形式, 通过一系列调节, 对一个核区的众多能级进行拟合, 得到唯象的相互作用^[108]; 3. 从核子-核子散射实验数据出发, 用 G 矩阵方法 (G matrix method)^[109], 手征有效场理论 (Chiral Effective Field Theory) 等方法得到相互作用矩阵元, 然后经过微调得到相互作用.

原子核的能谱是由真实的核子-核子相互作用决定的. 一个有趣的问题是: 如果用完全随机的核子-核子相互作用作为输入量, 取大量的样本进行计算, 那么核结构模型产生的结果会有规律吗? 1988 年, Johnson, Bertsch 和 Dean 以“随机相互作用产生有规则的能谱”为题在《Physical Review Letters》上发表论文^[33]: 用完全随机的相互作用进行壳模型计算, 取一千个样本. 虽然组态空间中总角动量为 0, 同位旋是 $T = T_{\min} = N - Z$ 的基矢不是最多的, 基态总角动量为 0, 同位旋是 $T = T_{\min} = N - Z$ 的随机样本却占据整个系综的绝大多数. 他们还观察到, $J = 0, T = T_{\min}$ 的基态和其他激发态之间有一个显著的劈裂, 这些现象在过去被认为是同类核子之间的对力的证据^[29]. 在随机相互作用下, 这些现象也出现了, 至今仍然没有一个清晰有力的解释. 有人认为答案是时间反演对称性, 但是后来发现时间反演对称性不是必要的^[110].

随机相互作用数值实验还产生了结合能的奇偶振荡^[111]. 在真实原子核中, 原子核结合能 (基态能量) 随质子数、中子数的变化产生的奇偶振荡有两个原因^[112]. 一方面, 在开壳原子核 (open shell nuclei) 中, 单 j 轨道会失去转动对称性, 劈裂为 $2j + 1$ 根轨道, 它们的角动量第三分量 m 为好量子数, 这样的轨道的能量值不同, 每根轨道只能占据两个同类核子, 所以会产生奇偶振荡. 另一方面, 即同类核子之间的对关联. 这一机制在金属团簇、超导量子点中均适用. 然而, 完全随机的相互作用产生的结合能中也存在奇偶振荡.

随机相互作用数值实验的结果中, 还有振动、转动谱^[39]. 人们根据原子核低激发能谱的特征, 把真实原子核粗略地分为三类, 即辛弱数模式 (单满壳原子核)、非谐振子振动模式 (价核子数较少时)、转动模式. 然而, 随机相互作

用下, 这些模式也以不同的概率出现了.

以上现象都说明, 模型本身(基本组元(质子、中子)+空间(例如sd壳)+相互作用形式(单体、两体相互作用))“偏爱”某些量子态, 这与相互作用的大小毫无关系. 后来, 人们对这个问题进行了大量的研究^[34-36].

需要说明的是, 真实相互作用与随机相互作用产生的波函数是几乎完全不同的^[113], 随机相互作用下, 电四极跃迁 $B(E2)$ 的值的统计平均值比真实情况下小一个数量级, 即使是 $B(E2)$ 最大值也比真实值小. 所以要得到真实的物理量, 必须用真实的相互作用. 而随机相互作用数值实验的意义, 在于理清能谱(系统本征值)的哪些性质由模型本身决定, 与相互作用无关. 哈密顿量形式即可决定多体系统能谱的一些性质, 这是一个非常有趣的问题.

相互作用玻色子(IBM)模型^[37]以sd玻色子为基本组成, 群对称性为基础, 是一个简洁优美而强大的模型, 具有广泛的应用. 人们用它做了大量的随机相互作用实验: 比较实验数据特征和sd玻色子随机相互作用计算结果的特征^[114], 用平均场方法、添加F玻色子研究基态自旋为零的样本, 振动转动谱^[39-42]; 随机相互作用下, 基态自旋为零的随机样本中, 晕带激发态之间的关联^[43,115].

这些研究工作非常重要, 它们都关注基态自旋为零的随机样本, 基态自旋不为零的样本都被排除了. 然而, 随机相互作用下系统的很多规律性, 实际上与基态自旋无关. 所以这一章讨论IBM-1模型随机样本中的普遍规律. 我们观察到随机样本中低激发态之间存在非常紧凑的关联, 与基态自旋是否为零无关.

3.2 数值结果

sd玻色子哈密顿量为

$$H = \sum_{l_1 \leq l_2; l_3 \leq l_4; L} \frac{V_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{(L)}}{\sqrt{(1 + \delta_{l_1 l_2})(1 + \delta_{l_3 l_4})}} [b_{l_1}^\dagger b_{l_2}^\dagger]^L [b_{l_3} \tilde{b}_{l_4}]^L, \quad (3.1)$$

其中 $l_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为 0 或 2, 它们分别是 s 玻色子和 d 玻色子的自旋. $V_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{(L)} = \langle l_1 l_2 : L | V | l_3 l_4 : L \rangle$ 是两体相互作用矩阵元. 它们是服从高斯分布的随机数, 分布中心为 0, 宽度为 $\sqrt{(1 + \delta_{l_1 l_2, l_3 l_4})}$. 这样定义的多组随机数构成系综, 称作两体随机系综. 我们定义 $R_I = (E_{I_1^+} - E_{0_1^+}) / (E_{2_1^+} - E_{0_1^+})$. 在图3.1-3.2中我们分别绘制了 R_6 和 R_8 相对 R_4 的图, 称作 Mallmann 图^[117]. 我们只收录了基态自旋不为零的随机样本, 玻色子总数 n 为 6-11. 对每个 n 的值, 我们取 60000 组随机相互作用, 分别做计算, 然后对这 60000 个样本做统计. 在

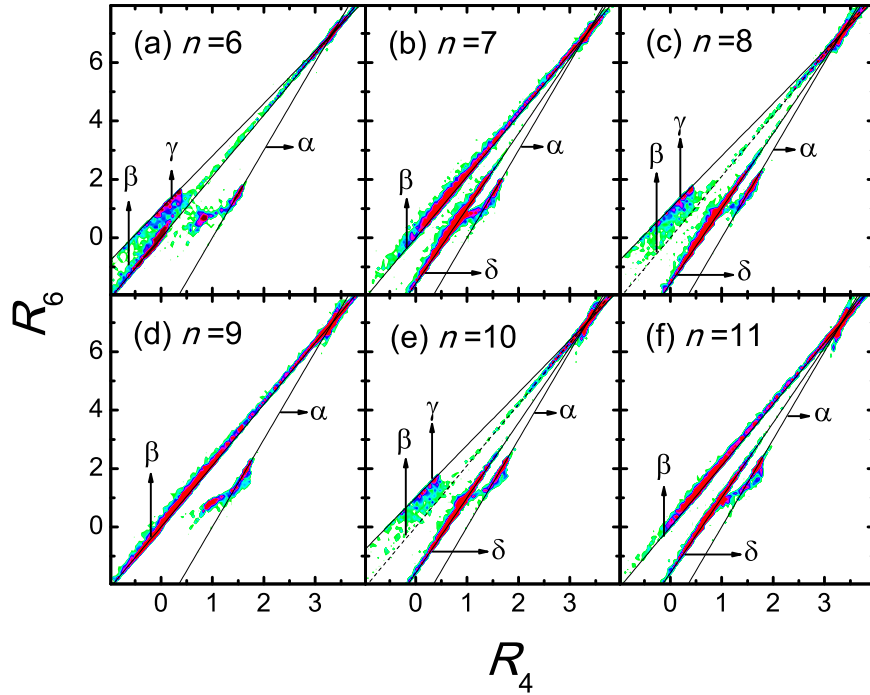


图 3.1 IBM-1模型中的 $R_6 - R_4$ 关联. 本图取自文献 [116].

Fig 3.1 $R_6 \sim R_4$ correlation of sd bosons under random interactions. n is boson number. We only consider *spin-non-zero* random samples. The peak at $(R_4, R_6) = (3.3, 7.0)$ corresponds to rotation, the peak at $(R_4, R_6) = (1.0, 1.0)$ corresponds to seniority correlation. Except from these, we observe compact linear correlations between R_4 and R_6 (labeld as α , β , γ and δ).

图3.1-3.2中, 可以看到 R_6 , R_8 都与 R_4 有很强的线性关联. 我们把这些线性关联标记为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$. 对于基态自旋为零的随机样本, 人们在 IBM^[43] 模型和 FDSM^[118] 模型中讨论了类似的线性关联. 有趣的是, 这样的线性关联是普遍存在的, 与样本的基态自旋毫无关系. 我们第一次找出了 δ, ξ 线性关联. 为了方便, 我们在表3.1中, 列出所有线性关联.

3.2.1 关于 $U(5)$ 极限的讨论

在这一节中, 我们用 IBM 模型中的 $U(5)$ 群极限讨论这些线性关联. $U(5)$ 极限是 d 玻色子的群极限. 除了 α 线性关联以外, 所有其他关联都可以从 $U(5)$ 极限导出. 对这些关联, 我们发现相应的随机样本的低激发态可以用 d 玻色子凝聚来描述. 这有两方面证据: 1. 用 $U(5)$ 极限的约化规则推导出这些线性关

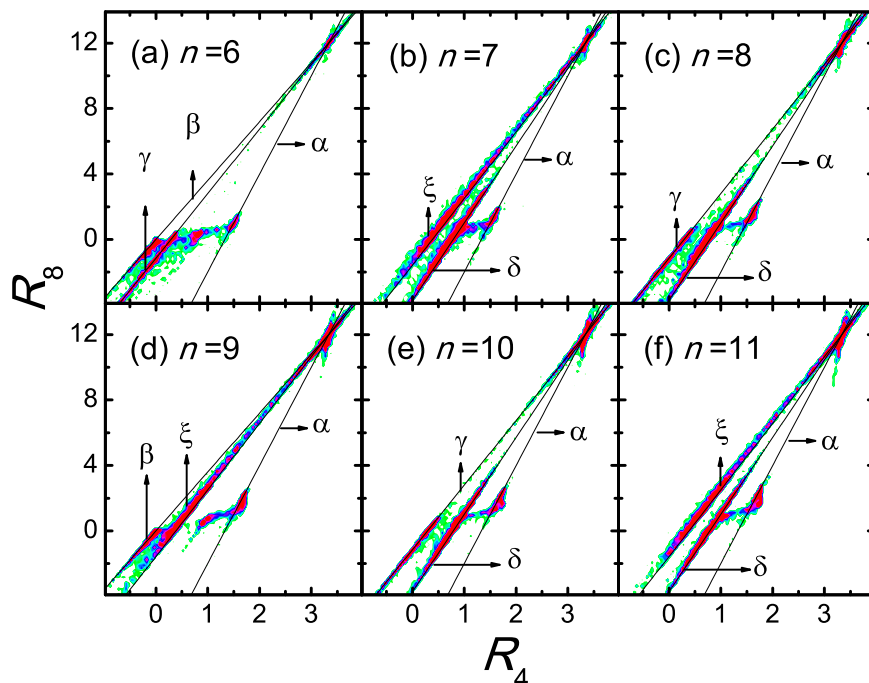


图 3.2 IBM-1模型中的 $R_8 - R_4$ 关联. 本图取自文献 [116].

Fig 3.2 The same with Fig. 3.1 except it presents correlations between R_8 and R_4 .

表 3.1 R_I 与 R_4 之间线性关联的描述. 本图取自文献 [116].

Tab 3.1 Description of linear correlations between R_I and R_4 (labeled as $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$). We define $R_6 = k_1 R_4 + b_1$, $R_8 = k_2 R_4 + b_2$. For each linear correlation we present its k_1, b_1, k_2, b_2 and corresponding demands on the boson number n . We note that, in correlation β and ξ , the formulas of R_6 and R_4 are the same.

Correlation	k_1	b_1	k_2	b_2	n
α	3	-3	6	-8	both even and odd n
β	$\frac{21}{10}$	0	$\frac{15}{8}$	0	$n = 3k$ or odd n
γ	$\frac{9}{5}$	1	$\frac{138}{35}$	$-\frac{8}{7}$	even n
δ	$\frac{18}{7}$	$-\frac{11}{7}$	$\frac{33}{7}$	$-\frac{26}{7}$	$n \neq 3k$
ξ	$\frac{21}{10}$	0	$\frac{57}{14}$	$-\frac{11}{7}$	odd n

联；2.对每个随机样本中低激发态的波函数，做 d 玻色子数的统计平均，并与总玻色子数相比较.

3.2.2 随机相互作用下的 d 玻色子系统

在这一小节中，我们根据低激发态的 d 玻色子凝聚，推导随机样本中的四种线性关联 $\beta, \gamma, \delta, \xi$ 的公式. 根据参考文献 [37] 中的公式(2.79, 2.82)和参考文献 [119]中的公式(2.8)， d 玻色子晕转态能量为

$$E_{\tau I} = C_1 \tau(\tau + 3) + C_2 I(I + 1), \quad (3.2)$$

这里 τ 是 d 玻色子“辛弱数”， I 是这个态的自旋，

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-7V_{2222}^{(0)} + 10V_{2222}^{(2)} - 3V_{2222}^{(4)}}{70}, \\ C_2 &= \frac{-V_{2222}^{(2)} + V_{2222}^{(4)}}{14}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

τ 的值由 $U(5)$ 极限的约化规则给出，在参考文献 [37]的公式(2.28-2.35)中有讨论. 为了读者方便，我们在这里复述. 这里 n 为 d 玻色子数（ s 玻色子数为 0），因为我们在这里讨论低激发态中的 d 玻色子凝聚. 对于给定的 d 玻色子数 n ，我们把它分为 $n = 2v + \tau$ ，所以 τ 的值

$$n, n - 2, \dots, 1 \text{ or } 0 \quad (n = \text{odd or even}),$$

对应 $v = 0, 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$. 对于每个 τ 值我们得到不同的 λ 值，满足 $\tau = 3n_{\Delta} + \lambda$. 也就是说，对于 τ ,

$$\lambda = \tau, \tau - 3, \dots, 0 \text{ or } 1, 2 \quad (\tau \pmod{3}),$$

对应 $n_{\Delta} = 0, 1, 2, \dots, [\frac{\tau}{3}]$. 而体系的总角动量与 λ 有关，与 τ 不直接相关：

$$I = \lambda, \lambda + 1, \dots, 2\lambda - 2, 2\lambda.$$

根据上面描述的 d 玻色子约化规则，我们可以讨论公式3.5中 C_1, C_2 的正负号对晕转态自旋的影响. 假定 $n = 2k + 1$ （奇数 n ），而 C_1 和 C_2 都是正实数. 根据公式(3.2)，晕转态的 τ 取最小值（即 $v = 0$ ）. 对于自旋为 0, 2, 4, 6, 8 的晕转态，很容易得到 $|\tau, \lambda\rangle = |3, 0\rangle, |1, 1\rangle, |3, 3\rangle, |3, 3\rangle$ ，和 $|5, 5\rangle$. 这些态的能量值分别为 $18C_1, 4C_1 + 6C_2, 18C_1 + 20C_2, 18C_1 + 42C_2, 40C_1 + 72C_2$. 所以有

$$R_6 = \frac{21}{10}R_4, \quad R_8 = \frac{57}{14}R_4 - \frac{11}{7}.$$

表 3.2 d 玻色子系统的基态自旋. 本图取自文献 [116].

Tab 3.2 Summary of ground state spin of d boson systems, with n , C_1 and C_2 varying. n is d boson number, and “g.s.” is short for “ground state”. \blacktriangle means larger probabilities, while Δ means smaller probabilities.

C_1, C_2	$C_1 < 0, C_2 > 0$						$C_1 > 0, C_2 > 0$			
n	$3k$		$3k + 1$		$3k + 2$		$2k$		$2k + 1$	
τ, λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ
$ 0_1\rangle$	n	0	$n - 4$	0	$n - 2$	0	0	0	3	0
$ 2_1\rangle$	$n - 2$	1	n	1	n	2	2	2	1	1
$ 4_1\rangle$	n	3	n	4	n	2	2	2	3	3
$ 6_1\rangle$	n	3	n	4	n	5	4	4	3	3
$ 8_1\rangle$	n	6	n	4	n	5	4	4	5	5
g.s. spin	0		$\blacktriangle 2, \Delta 0$		$\blacktriangle 2, \Delta 0$		0		$\blacktriangle 2, \Delta 0$	
Correlation	β		δ		δ		γ		ξ	

C_1, C_2	$C_1 < 0, C_2 < 0$						$C_1 > 0, C_2 < 0$			
n	$3k$		$3k + 1$		$3k + 2$		$2k$		$2k + 1$	
τ, λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ	τ	λ
$ 0_1\rangle$	n	0	$n - 4$	0	$n - 2$	0	0	0	3	0
$ 2_1\rangle$	$n - 2$	1	n	1	n	2	2	2	1	1
$ 4_1\rangle$	n	3	n	4	n	2	2	2	3	3
$ 6_1\rangle$	n	3	n	4	n	5	4	4	3	3
$ 8_1\rangle$	n	6	n	4	n	5	4	4	5	5
g.s. spin	$2n$		$2n$		$2n$		$\blacktriangle 2n, \Delta 0$		$\blacktriangle 2n, \Delta 2$	
Correlation	β		δ		δ		γ		ξ	

这个线性关系对应 β 关联, 这与图3.1,3.2中的现象一致: β 关联在 $n = 3k$, C_1, C_2 均为负值时出现 (τ 取最大值). R_8-R_4 关联对应 ξ .

上述讨论对 C_1, C_2, n 的其他情况都适用, 所有结果都在图3.2中总结.

3.2.3 晕转态的波函数

在这一小节中, 我们关注 $\beta, \gamma, \delta, \xi$ 关联的随机样本, 研究它们的晕转态的波函数. 我们发现它们符合 d 玻色子凝聚的预言, 与我们的假设一致.

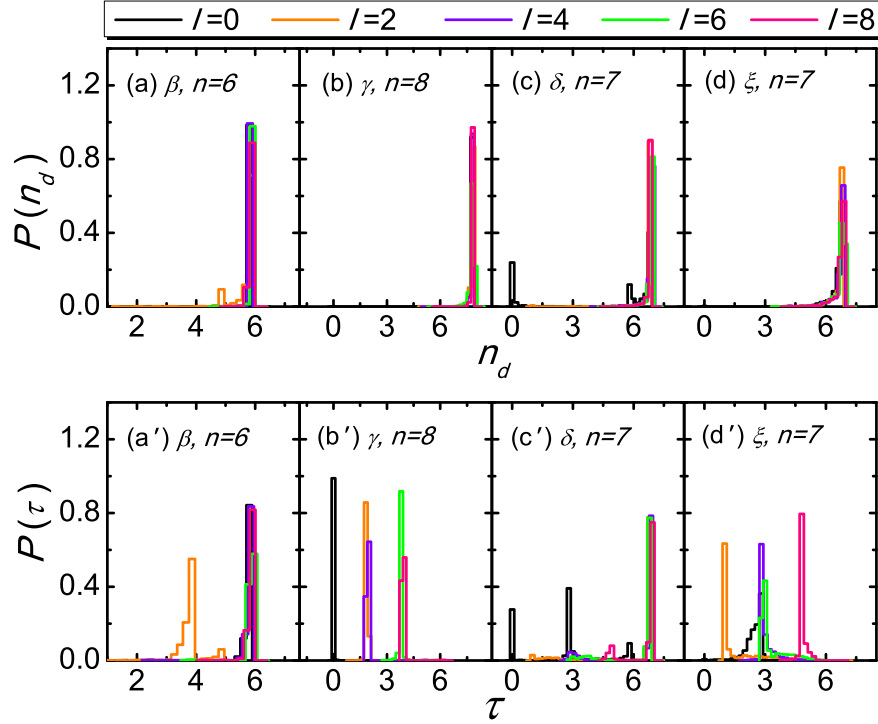


图 3.3 d 玻色子数和 d 玻色子辛弱数. 本图取自文献 [116].

Fig 3.3 The expected values of d boson number (n_d) and d boson seniority numbers (τ) in $0_1^+, 2_1^+, 4_1^+, 6_1^+, 8_1^+$ yrast states of g.s. spin- $2n$ random samples. (a) (a') correspond to β correlation (boson number $n = 6$), (b) (b') correspond to γ correlation (boson number $n = 8$), (c) (c') correspond to δ correlation (boson number $n = 7$), (d) (d') correspond to ξ correlation (boson number $n = 7$). $P(n_d)$ and $P(\tau)$ are normalized. It is shown that statistical distributions of n_d and τ are consistent with predictions given by d boson condensate.

让我们先研究 β 关联 (在 sd 玻色子系统 $n = 3k$ 时出现), 即 $R_6 = \frac{21}{10}R_4$, $R_8 = \frac{18}{5}R_4$. 这个关联在 $C_1 < 0$ 而且 $n = 3k$ (k 为整数), 在这种情况下基态自旋为 0 或 $2n$ (最大自旋), 而 d 玻色子辛弱数 τ 取最大值. 在这个工作中我们关注基态自旋不为 0 的随机样本, β 关联是 C_1, C_2 均为负值, 基态自旋为 $2n$ 时, d 玻色子凝聚造成的. 在图[3.3](a)栏中我们画了这种情况下 d 玻色子数 n_d , d 玻色子辛弱数 τ 在随机样本中的分布. 可以看到 n_d 都集中在 n 附近, 与 d 玻色子凝聚的假设一致. 在图3.3(a') 栏中, 我们画了相同情况下 d 玻色子辛弱数 τ 的分布情况, 也与表3.1中的预言一致: 在角动量为 0,4,6,8 的晕转态中, τ 近似等于 n , 在 2_1^+ 中 τ 近似等于 $n - 2$. 在图3.4 (a) 栏中, 我们展示基态自旋为 $2n$ 、满足 β 关联、玻色子数 $n = 6$ 的随机样本中 C_1 和 C_2 的分布. 我们可以

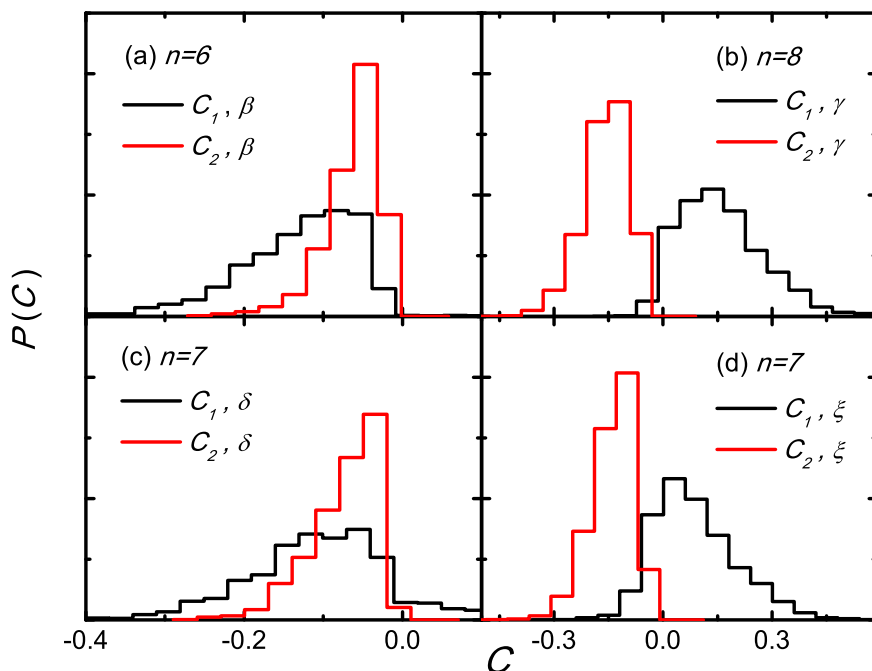


图 3.4 基态自旋为 $2n$ 的随机样本中 C_1, C_2 的分布. 本图取自文献 [116].

Fig 3.4 Distribution of C_1, C_2 in Eq. (3.2) for g.s. spin- $2n$ random samples. Panel (a) displays β correlation (boson number $n = 6$), Panel (b) displays γ correlation (boson number $n = 8$), Panel (c) displays δ correlation (boson number $n = 7$), Panel (d) displays ξ correlation (boson number $n = 7$). We can see that, in β and δ correlations C_1, C_2 are negative, and $C_1 < 0, C_2 > 0$ in γ and ξ correlations. This is consistent with Tab. [3.1] predicted by d boson condensate.

看到, 绝大多数情况下 C_1 和 C_2 都是负值. 这些证据都表明, 与上一小节分析的一样, β 关联是由 d 玻色子凝聚造成的.

γ 关联与 β 关联的情况非常相似 (sd 玻色子系统在 n 为偶数时产生). 从图3.3(b,b')中可以看到, n_d 和 τ 的期望值与表3.1中预言的一致 ($n_d = n = 8$, τ 取最小值, 这里对于晕转态 $0_1^+, 2_1^+, 4_1^+, 6_1^+, 8_1^+$, τ 分别等于 0, 2, 2, 4, 4). 在图3.4(b)中 $C_1 > 0, C_2 < 0$ 对绝大多数样本都成立, 这也与表3.1一致.

$n \neq 3k$ 时, δ 关联出现, 它的规律比上文提到的 β 和 γ 关联更复杂. 它只在 $n = 3k + 2$ 且基态自旋为 2 的随机样本中出现, n_d 和 τ 的统计数据与表3.1列出的 $C_1 < 0, C_2 > 0$ 的情况一致. 在这种情况下, 晕转态 n_d 和 τ 的值等于 n (除了自旋为 0 的晕转态 $\tau = n - 2$). 对于满足 δ 关联的其他随机样本, 自旋为 0 的晕转态的 n_d 值没有明显的规律, 而其他晕转态比较符合表3.2的结果. 这些“不规则”的自旋为 0 的晕转态没有破坏 δ 关联, 这是一个有趣的现象. 根

据表3.1, 对于 δ , 对于自旋为 $I = 2, 4, 6, 8$ 的晕转态, $\tau = n$. 所以这四个态的能量为 $C_1 n(n+3) + C_2 I(I+1)$. 我们定义自旋为 I 的能级中能量最低的为 E_I , 我们得到

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{14C_2}{E_2 - E_0} + 1, \\ R_6 &= \frac{36C_2}{E_2 - E_0} + 1, \\ R_8 &= \frac{66C_2}{E_2 - E_0} + 1. \end{aligned}$$

这导致

$$R_6 = \frac{18}{7}R_4 - \frac{11}{7}, \quad R_8 = \frac{33}{7}R_4 - \frac{26}{7}.$$

所以 δ 关联比表3.1中给出的情况更普遍. δ 关联要求自旋为 I ($I \neq 0$) 的态中能量最低的由 d 玻色子凝聚给出, 而它对随机样本中自旋为0且能量最低的态没有额外要求.

最后我们讨论 ξ 关联, 它在 $C_1 > 0$ 并且 n 为奇数时出现. 在这种情况下, 基态自旋可能为 0, 2 (如果 $C_2 > 0$), 或者 $2n$ 或 2 (如果 $C_2 < 0$), 取决于 C_1 和 C_2 的相对值, 与表3.1中讨论的一致. 在图3.3 (d, d') 中我们对 $n = 7$, 基态自旋为 $2n$ 且满足 xi 关联的随机样本中自旋为 0, 2, 4, 6, 8 的晕转态的 n_d 值与 τ 值进行统计. 可以看到, n_d 值和 τ 值符合表3.1. 我们也进一步讨论了基态自旋为 $2n$ 的随机样本中 C_1, C_2 的正负性, 在图3.4 (d) 中. 虽然 ξ 关联的 τ 值, C_2 的符号都与 β 关联完全不同, 但是 $R_6 - R_4$ 的图中, ξ 关联与 β 关联相同.

3.3 简单系统的基态自旋概率的解析公式

3.3.1 d 玻色子基态自旋概率的解析公式

前文中提到, 对于随机相互作用下系统的基态自旋的概率, 人们做了大量工作 [34-36]. 其中有一个唯象的经验方法 [120], 适用于各种两体相互作用系统, 一个平均场方法 [40, 41], 适用于 sp 和 sd 玻色子系统, 还有一个最低能量方法, 适用于单 j 壳 [121].

一个自然的选择是研究简单系统, 来寻找线索. 在参考文献 [120]中, 一个经验方法被用于 $j = 7/2$ 壳, 而在参考文献 [122]中, Chau 和合作者提出了一

种几何方法, 提供了 d 玻色子系统和 $j = 7/2$ 壳中费米子系统的严格数值解. 沿着这条路径, 我们第一次推导了 d 玻色子系统基态自旋概率的解析解, 对于 $j = 5/2$ 壳基态自旋概率 $P(I)$ 是确定的实数.

d 玻色子系统的哈密顿量为

$$H = \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} V_L [(d^\dagger d^\dagger)^{(L)} (\tilde{d}\tilde{d})^{(L)}]^{(0)}, \quad (3.4)$$

这里 $V_L = \langle dd : L | V | dd : L \rangle$ 是两体相互作用矩阵元, 这里设定为符合 (0,1) 高斯分布的随机数, 这样形成的多个随机样本, 形成随机系综 (two-body random ensemble: TBRE). d 玻色子系统符合 $U(5)$ 群对称性^[37], 有 τ, λ 等中间量子数, 以及一套约化规则, 来决定每一个态的能量, 在上一节中有叙述, 这里不再重复. 其中

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-7V_0 + 10V_2 - 3V_4}{70}, \\ C_2 &= \frac{-V_2 + V_4}{14}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

下面我们计算 n 个 d 玻色子系统的基态自旋概率. 在公式 (3.2) 中, C_1 和 C_2 均为正负待定的实数. 下面我们通过解释 $C_1 > 0, C_2 < 0, n = 2k$ 的情形来展示我们的方法. 对于给定的 τ 值, 能量最低的态有 $I = 2\lambda = 2\tau$ (因为 $C_2 < 0$). 由于 $n = 2k$, τ 也是偶数, 所以基态自旋为 4 的倍数, 设为 $4m$, m 是整数. 为方便我们定义

$$\frac{C_1}{C_2} \equiv \eta.$$

基态自旋为

$$\begin{aligned} E_{I=4m} &= 2m(2m+3)C_1 + 4m(4m+1)C_2 \\ &= 4C_2(\eta+4) \left[m + \frac{3\eta+2}{4(\eta+4)} \right]^2 - C_2 \frac{(3\eta+3)^2}{4(\eta+4)}. \end{aligned}$$

这意味着 $E_{I=4m}$ 是自变量为整数 $m = 0, \dots, \frac{n}{2}$ 的抛物线.

对于 $\eta+4 < 0$, 有 $4C_2(\eta+4) > 0$, $\frac{3\eta+2}{4(\eta+4)} > 0$. 根据上面这个方程, $E_{4m_1^\dagger}$ 随着 m 的值增大而增大, 所以当 m 取最小值时, $E_{I=4m}$ 是基态, 所以基态自旋为 $I = 0$. 类似地, 对于 $\eta+4 > 0$, $4C_2(\eta+4) < 0$. 这个情况下基态有两种情况. 如果 $\frac{3\eta+2}{4(\eta+4)} > \frac{n}{4}$, 基态取 m 的最小值, 所以它的自旋为 $I = 4m_{\min} = 0$; 如果 $\frac{3\eta+2}{4(\eta+4)} < \frac{n}{4}$, 基态取 m 的最大值, 所以它的自旋为 $I = 4m_{\max} = 2n$. 所以在

$C_1 > 0, C_2 < 0, n = 2k$ 情况下, d 玻色子系统基态自旋为

$$I = \begin{cases} 0, & \eta < -\frac{4n+2}{n+3}; \\ 2n, & 0 > \eta > -\frac{4n+2}{n+3}. \end{cases} \quad (3.6)$$

现在我们利用概率密度函数 (PDF: probability density function) 研究两个参数(C_1, C_2)在整个随机系综里的概率分布. C_1 和 C_2 在某一特定二维区间取值的概率为PDF在这个区间上的积分. $-\frac{7V_0+10V_2-3V_4}{70} \leq C_1$ 和 $-\frac{V_2+V_4}{14} \leq C_2$ (即 $V_2 \geq V_4 - 14C_2, V_0 \geq \frac{10V_2-3V_4-70C_1}{7}$, 参见公式 (3.5)) 为

$$\mathcal{P}_1(C_1, C_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(V_4)dV_4 \int_{V_4-14C_2}^{\infty} g(V_2)dV_2 \int_{\frac{10V_2-3V_4-70C_1}{7}}^{\infty} g(V_0)dV_0,$$

所以 C_1, C_2 的概率密度函数为 $f(C_1, C_2)$

$$\begin{aligned} f(C_1, C_2) &= \frac{\partial^2 \mathcal{P}_1(C_1, C_2)}{\partial C_1 \partial C_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(E_4)g(E_4 - 14C_2)g(E_4 - 20C_2 - 10C_1)dE_4 \\ &= \frac{70}{\sqrt{3}\pi} \exp\left(-\frac{100C_1^2 + 260C_1C_2 + 316C_2^2}{3}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

根据公式 (3.6), 对于 $C_1 > 0, C_2 < 0, n = 2k$, 基态自旋为 0 的概率为

$$\int_{-\infty}^0 dC_2 \int_{-\frac{4n+2}{n+3}C_2}^{\infty} dC_1 f(C_1, C_2) = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right);$$

基态自旋为 $2n$ 的概率为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 dC_2 \int_0^{-\frac{4n+2}{n+3}C_2} dC_1 f(C_1, C_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right). \end{aligned}$$

上文中, 我们举例说明了 $C_1 > 0, C_2 < 0, n = 2k$ 情况下, 怎样得到基态自旋 I 的概率. 类似地我们可以研究其他所有情况. 对于不同的 n 和 C_1, C_2 , 我们在表3.3中列出了基态自旋 I 的各种可能, 以及 $\eta \equiv \frac{C_1}{C_2}$ 相应的取值范围. 在这些取值范围上, 对 C_1, C_2 的概率密度函数 (3.7式) 做积分, 即可得到相应的概率, 在表3.4 中给出. 最后, 我们得到对于不同的 n 的值对应的基态自旋及其概率分布, 在表3.5 中列出. 利用数值实验, 我们验证了这些公式.

表 3.3 d 玻色子系统的基态自旋 I .

Tab 3.3 Value of ground state spin of d boson systems, and corresponding ranges of $\eta \equiv \frac{C_1}{C_2}$, for different values of boson number n , and different signs of C_1, C_2 .

	n	0	2	$2n$
	$3k$	$\eta < 0$		
$C_1 < 0, C_2 > 0$	$3k + 1$	$-\frac{3}{4n-2} < \eta < 0$	$\eta < -\frac{3}{4n-2}$	
	$3k + 2$	$-\frac{3}{2n+1} < \eta < 0$	$\eta < -\frac{3}{2n+1}$	
	$2k$	$\eta > 0$		
$C_1 > 0, C_2 > 0$	$2k + 1$	$0 < \eta < \frac{3}{7}$	$\frac{3}{7} < \eta$	
$C_1 < 0, C_2 < 0$				$\eta > 0$
	$2k$	$\eta < -\frac{4n+2}{n+3}$	$-\frac{4n+2}{n+3} < \eta < 0$	
$C_1 > 0, C_2 < 0$	$2k + 1$		$\eta < -\frac{4n+6}{n+4}$	$-\frac{4n+6}{n+4} < \eta < 0$

表 3.4 d 玻色子系统的基态自旋概率率 $P(I)$. 本图取自文献 [116].

	n	$P(0)$	$P(2)$	$P(2n)$
$C_1 < 0, C_2 > 0$	$3k$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right)$	0	0
	$3k+1$	$\frac{1}{2\pi} [\arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right)]$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right)$	0
	$3k+2$	$\frac{1}{2\pi} [\arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right)]$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right)$	0
$C_1 > 0, C_2 > 0$	$2k$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right)$	0	0
	$2k+1$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right)$	$\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right)$	0
$C_1 < 0, C_2 < 0$		0	0	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right)$
	$2k$	$\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$	0	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$
$C_1 > 0, C_2 < 0$	$2k+1$	0	$\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{13}{7\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$

表 3.5 d 玻色子系统的基态自旋总概率 $P(I)$. 本图取自文献 [116].

	$P(0)$	$P(2)$	$P(2n)$
$n = 6k$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$	0	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$
$n = 6k + 1$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$
$n = 6k + 2$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$
$n = 6k + 3$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right)$	$\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$
$n = 6k + 4$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-28}{7\sqrt{3}(2n-1)}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+3)}{27n-19}\right)$
$n = 6k + 5$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right) - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right)$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{26n-17}{7\sqrt{3}(2n+1)}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{49\sqrt{3}}{121}\right) + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{7\sqrt{3}(n+4)}{27n+8}\right)$

3.3.2 $j = 5/2$ 壳中三个费米子

现在我们研究 $j = \frac{5}{2}$ 壳中三个费米子的情况, 每个能级的能量值为^[119]

$$\begin{aligned} E_{3/2} &= \frac{15}{7}G_2 + \frac{6}{7}G_4, \\ E_{5/2} &= \frac{2}{3}G_0 + \frac{5}{6}G_2 + \frac{3}{2}G_4, \\ E_{9/2} &= \frac{9}{14}G_2 + \frac{33}{14}G_4, \end{aligned} \quad (3.8)$$

这里 G_0 、 G_2 、 G_4 为满足 $(0,1)$ 高斯分布的随机数.

我们假定 α_1, α_2 为两个实变量. $E_{3/2} - E_{9/2} \leq \alpha_1, E_{3/2} - E_{5/2} \leq \alpha_2$ (根据公式 (3.8), 这等价于 $G_2 \leq \frac{2}{3}\alpha_1 + G_4, G_0 \geq -\frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{55}{28}G_2 - \frac{27}{28}G_4$) 的概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(G_4) dG_4 \int_{-\infty}^{\frac{2}{3}\alpha_1 + G_4} g(G_2) dG_2 \\ &\quad \int_{-\frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{55}{28}G_2 - \frac{27}{28}G_4}^{\infty} g(G_0) dG_0. \end{aligned}$$

所以 (α_1, α_2) 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\partial^2 \mathcal{P}_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \int_{-\infty}^{\infty} dG_4 g(G_4) \\ &\quad g\left(\frac{2}{3}\alpha_1 + G_4\right) g\left(-\frac{3}{2}\alpha_2 + \frac{55}{42}\alpha_1 + G_4\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \exp\left(-\frac{2269\alpha_1^2}{5292} + \frac{41\alpha_1\alpha_2}{42} - \frac{3}{4}\alpha_2^2\right). \end{aligned}$$

所以基态自旋为 $\frac{3}{2}$ 的概率为

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f_2(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{14\sqrt{3}}{41}\right). \end{aligned}$$

类似地, 我们得到

$$\begin{aligned} P\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{157}{441\sqrt{3}}\right), \\ P\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{11}{7\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

我们用100,000,000次数值计算的结果做了统计，基态自旋的概率与上述解析结果相同，如表3.3.2所示.

表 3.6 $j = \frac{5}{2}$ 壳中三费米子系统的基态自旋概率. 本图取自文献 [116].

Tab 3.6 Ground state spin probabilities of three fermions in the $j = \frac{5}{2}$ shell. “Analytic” means results of the analytic expressions (see explanations in the text). “Numerical” means statistic results of 100,000,000 random samples.

I	Analytic	Numerical
3/2	0.4150	0.4150
5/2	0.2177	0.2178
9/2	0.3673	0.3673

3.3.3 $j = 7/2$ 壳中三费米子系统

根据文献 [119], $j = 7/2$ 壳中三费米子系统的各个态的能量为

$$\begin{aligned}
 E_{3/2} &= \frac{9}{14}G_2 + \frac{33}{14}G_4, \\
 E_{5/2} &= \frac{11}{6}G_2 + \frac{2}{11}G_4 + \frac{65}{66}G_6, \\
 E_{7/2} &= \frac{3}{4}G_0 + \frac{5}{12}G_2 + \frac{3}{4}G_4 + \frac{13}{12}G_6, \\
 E_{9/2} &= \frac{13}{42}G_2 + \frac{150}{77}G_4 + \frac{49}{66}G_6, \\
 E_{11/2} &= \frac{5}{6}G_2 + \frac{13}{22}G_4 + \frac{52}{33}G_6, \\
 E_{15/2} &= \frac{15}{22}G_4 + \frac{51}{22}G_6.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

这里 G_0 、 G_2 、 G_4 、 G_6 是完全随机的两体相互作用矩阵元，遵从 (0,1) 高斯分布. 我们如下计算这个系统的基态自旋概率.

如果 $E_{3/2}$ 是基态 (即 $E_{3/2} < E_I$, $I = 5/2, 7/2, \dots, 15/2$), 我们有

$$\begin{aligned}
 G_4 &\leq G_2, \\
 G_6 &> \frac{22G_2 + 27G_4}{49}, \\
 G_0 &> \frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63},
 \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} G_4 &> G_2, \\ G_6 &> \frac{-110G_2 + 201G_4}{91}, \\ G_0 &> \frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63}. \end{aligned}$$

首先我们计算 $G_4 \leq G_2$, $G_6 > (22G_2 + 27G_4)/49$, $G_0 > (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63$ 的概率. 我们定义 a_1 , a_2 , a_3 为

$$\begin{aligned} a_1 &= G_4 - G_2, \\ a_2 &= \frac{22G_2 + 27G_4}{49} - G_6, \\ a_3 &= \frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63} - G_0. \end{aligned}$$

这样, $G_4 \leq G_2$, $G_6 > (22G_2 + 27G_4)/49$, $G_0 > (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63$ 的概率等于 $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 < 0$ 的概率. 下面计算 (a_1, a_2, a_3) 的概率密度. 我们定义 $G_4 - G_2 \leq a_1$, $(22G_2 + 27G_4)/49 - G_6 \leq a_2$, $(19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 - G_0 \leq a_3$ (等价于 $G_4 \leq G_2 + a_1$, $G_6 \geq (22G_2 + 27G_4)/49 - a_2$, $G_0 \geq (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 - a_3$) 的概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3(a_1, a_2, a_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} dG_2 g(G_2) \int_{-\infty}^{a_1 + G_2} dG_4 g(G_4) \\ &\int_{\frac{22G_2 + 27G_4}{49} - a_2}^{\infty} dG_6 g(G_6) \int_{\frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63} - a_3}^{\infty} dG_0 g(G_0). \end{aligned}$$

所以 (a_1, a_2, a_3) 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, a_3) &= \frac{\partial^3}{\partial a_1 \partial a_2 \partial a_3} \mathcal{P}_3(a_1, a_2, a_3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dG_2 g(G_2) g(a_1 + G_2) g(G_2 + \frac{27}{49}a_1 - a_2) g(G_2 + \frac{66}{49}a_1 + \frac{13}{9}a_2 - a_3) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{2445}{4802}a_1^2 + \frac{320}{441}a_1a_2 - \frac{43}{54}a_2^2 + \frac{61}{98}a_1a_3 - \frac{5}{6}a_2a_3 - \frac{3}{8}a_3^2 \right\}. \end{aligned}$$

$G_4 - G_2 \leq a_1$, $(22G_2 + 27G_4)/49 - G_6 \leq a_2$, $(19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 - G_0 \leq a_3$ 等价于 $G_4 \leq G_2 + a_1$, $G_6 \geq (22G_2 + 27G_4)/49 - a_2$, $G_0 \geq (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 - a_3$, 这些条件满足的概率为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^0 da_1 \int_{-\infty}^0 da_2 \int_{-\infty}^0 da_3 \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2445}{4802}a_1^2 - \frac{473}{441}a_1a_2 - \frac{41}{27}a_2^2 + \frac{61}{98}a_1a_3 + \frac{4}{3}a_2a_3 - \frac{3}{8}a_3^2 \right\} \end{aligned}$$

然后我们计算 $G_4 > G_2$, $G_6 > (-110G_2 + 201G_4)/91$, $G_0 > (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63$ 的概率. 我们定义 b_1 , b_2 , b_3 为

$$\begin{aligned} b_1 &= G_4 - G_2, \\ b_2 &= \frac{110G_2 - 201G_4}{91} + G_6, \\ b_3 &= G_0 - \frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63}. \end{aligned}$$

这样, $G_4 > G_2$, $G_6 > (-110G_2 + 201G_4)/91$, $G_0 > (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63$ 转化为 $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$ 的概率. 下面我们计算 (b_1, b_2, b_3) 的概率密度函数. 我们定义 $G_4 - G_2 \leq b_1$, $(110G_2 - 201G_4)/91 + G_6 \leq b_2$, $G_0 - (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 \leq b_3$ (等价于 $G_4 \leq G_2 + b_1$, $G_6 \leq b_2 - (22G_2 + 27G_4)/49$, $G_0 \leq (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63 + b_3$) 的概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4(b_1, b_2, b_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} dG_2 g(G_2) \int_{-\infty}^{b_1 + G_2} dG_4 g(G_4) \\ &\times \int_{-\infty}^{b_2 - \frac{110G_2 - 201G_4}{91}} dG_6 g(G_6) \int_{-\infty}^{\frac{19G_2 + 135G_4 - 91G_6}{63} + b_3} dG_0 g(G_0). \end{aligned}$$

所以 (b_1, b_2, b_3) 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_4(b_1, b_2, b_3) &= \frac{\partial^3}{\partial b_1 \partial b_2 \partial b_3} \mathcal{P}_4(b_1, b_2, b_3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dG_2 g(G_2) g(b_1 + G_2) g(G_2 + b_2 + \frac{201}{91}b_1) g(G_2 - \frac{22}{21}b_1 - \frac{13}{9}b_2 + b_3) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{48101}{16562}b_1^2 - \frac{3245}{819}b_1b_2 - \frac{41}{27}b_2^2 + \frac{289}{182}b_1b_3 + \frac{4}{3}b_2b_3 - \frac{3}{8}b_3^2 \right\}. \end{aligned}$$

所以 $G_4 > G_2$, $G_6 > (-110G_2 + 201G_4)/91$, $G_0 > (19G_2 + 135G_4 - 91G_6)/63$ 的概率为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} db_1 \int_0^{\infty} db_2 \int_{-\infty}^0 db_3 \\ &\times \exp \left\{ -\frac{48101}{16562}b_1^2 - \frac{3245}{819}b_1b_2 - \frac{41}{27}b_2^2 + \frac{289}{182}b_1b_3 + \frac{4}{3}b_2b_3 - \frac{3}{8}b_3^2 \right\}. \end{aligned}$$

这样, 我们得到基态自旋为 $I = 3/2$ 的概率, $j = 7/2$ 壳中三个费米子系统的其他情况的概率也可以如此计算. 对于 $j = 7/2$ 壳中四个费米子系统的基态自旋概率, 也可以用这个方法计算. 由于公式繁琐, 我在附录B中介绍.

3.4 小结

我们研究了随机相互作用下 sd 玻色子系统晕转态之间的关联. 我们集中研究了基态自旋不为 0 的随机样本. 线性关联 (标记为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ 关联在所有随机样本中普遍存在.

β, γ, δ 和 ξ 关联可以由 d 玻色子凝聚解释. 通过检验波函数, 以及两个参数 C_1, C_2 的不同情况, 我们检验了这个假设. 我们把 d 玻色子数的期望值, d 玻色子辛弱数, $C_1 \equiv 1/70(-7V_{2222}^{(0)} + 10V_{2222}^{(2)} - 3V_{2222}^{(4)})$ 与 $C_2 \equiv 1/14(-V_{2222}^{(2)} + V_{2222}^{(4)})$ 的符号 (这里 $V_{2222}^{(l)}$ 是 d 玻色子之间的两体相互作用矩阵元, $l = 0, 2, 4$), 还有样本的基态自旋作为 d 玻色子相互关联的指标. 这些指标与 d 玻色子凝聚给出的严格结果令人惊讶地一致.

还有一些问题仍然是开放的. α 关联还无法理解, 虽然这个关联可以在非谐振子振动模型中找到对应关系^[43, 44, 123]. 另一个与 $(R_6, R_4) = (7, 3.3)$ [$(R_8, R_4) = (12, 3.3)$]相近的线性关联也被观察到, 但是没有得到解释. 为什么 d 玻色子凝聚在 sd 玻色子系统中出现在这么多随机样本中, 这还没有解释. 我们需要进一步的研究.

对于 d 玻色子, 单 j 壳少量费米子这两类简单系统, 在随机相互作用下它们的基态自旋可以得到精确的解析公式. 我们研究了 d 玻色子系统基态自旋为 I 的概率 $P(I)$, 以及 $j = 5/2$, $j = 7/2$ 壳中三个、四个费米子的基态自旋概率, 得到了严格解析解.

第四章 原子核配对近似下的伽莫夫-泰勒跃迁

4.1 背景简介

在贝塔衰变中，原子核中一个中子变为质子，释放出一个电子和一个反电子中微子。母核有一部分动量 q 转移给轻子，当 $q \rightarrow 0$ 时，跃迁算符只剩下费米算符和伽莫夫-泰勒算符。这两种跃迁分别叫做费米跃迁和伽莫夫-泰勒跃迁。费米算符并不改变组态，仅将初态波函数中的一个中子（或质子）变为质子（或中子），然后与末态做内积。所以费米跃迁涉及到的子核的能级非常有限，往往跃迁强度集中在一个能级（同位旋相似态：isospin analogue state）。费米跃迁可用于确定波函数同位旋。在伽莫夫-泰勒跃迁过程中，轻子总角动量为 1，所以母核与子核总角动量的差最多为 1，它可以涉及到子核很多能级，跃迁总强度分布在这些能级上。伽莫夫-泰勒跃迁强度分布是原子核的“指纹”，也是很多重要物理过程的核心信息。

在核物理中，贝塔衰变是一个基本的物理过程，衰变周期是一个基本观测量，与伽莫夫-泰勒跃迁强度直接相关。在天体物理中，伽莫夫-泰勒跃迁强度决定了很多弱相互作用的反应截面^[124]，进而决定恒星的产生和死亡。在中微子物理中，核物理学家结合伽莫夫-泰勒跃迁的计算与超新星中微子探测，研究中微子的性质^[125,126]。在基本粒子物理中，中微子的质量是最重要的谜之一，在无中微子双贝塔衰变 ($0\nu\beta\beta$) 实验中，实验学家的探测器中所用靶核的伽莫夫-泰勒跃迁分布，是中微子质量的钥匙。

配对近似适用于重核低激发态，所以配对近似可能适于计算重核低激发态的贝塔衰变等弱相互作用过程，这值得尝试。下面介绍配对近似下伽莫夫-泰勒跃迁矩阵元的算法。

4.2 截断空间的基矢构建

我们定义一个集体对为

$$A^{r\dagger} = \sum_{ab} y(abr)(a^+ \times b^+)^{r\dagger}. \quad (4.1)$$

其中， a, b 为不同轨道的产生算符， r 为集体对的角动量及其第三分量， $y(abr)$

是“对结构系数”. 用不同的集体对组建的基矢为

$$A_{M_N}^{J_N \dagger} = ((A^{r_1 \dagger} \times A^{r_2 \dagger})^{J_2} \times \dots \times A^{r_N \dagger})_{M_N}^{J_N \dagger}. \quad (4.2)$$

相应地, 有

$$A^r = - \sum_{ab} y(abr)(a \times b)_r. \quad (4.3)$$

定义时间反演算符 $\tilde{A}_{-\rho}^r = (-1)^{r-\rho} A_{\rho}^r$, 则有

$$\tilde{A}_{-\rho}^r = - \sum_{ab} y(abr)(\tilde{a} \times \tilde{b})_{-\rho}^r. \quad (4.4)$$

用这样的时间反演算符构建的左矢为

$$\tilde{A}_{M_N}^{J_N} = ((\tilde{A}^{r_1} \times \tilde{A}^{r_2})^{J_2} \times \dots \times \tilde{A}^{r_N})_{-M_N}^{J_N}. \quad (4.5)$$

“对结构系数” $y(abr)$ 作为输入量是取定的, 所以自由度被大大减少了, 基矢的数目 (截断空间的维数) 比壳模型要小很多倍 (不同情况倍数不同). 截断空间的选取是灵活的 (SD 截断、SDG 截断、T=0 的对等等), 对结构系数 $y(abr)$ 有多种方法构造, 这使得配对近似更加灵活. 为了得到比较“物理”的集体对, 对不同的原子核有不同的方法确定“对结构系数”: 1. 对角化两粒子哈密顿量, 取低激发态波函数为对结构系数; 2. 用BCS方法确定S对结构系数, 再将多极单体算符 (multipole operator) 作用在S对上, 确定其他角动量的对; 3. 用平均场方法得到波函数的密度矩阵, 再根据密度矩阵确定对结构系数; 4. 在Broken Pair的假设下, 对“对结构系数”做变分法.

4.3 哈密顿量

我们使用单体+两体相互作用 $H = H_1 + H_2$. 单体相互作用为

$$H_1 = \sum_a \epsilon_a n_a, \quad (4.6)$$

其中, ϵ_a 是轨道 a 的能量, n_a 是作用于轨道 a 的粒子数算符.

两体相互作用为

$$H_2 = \sum_{abcd} \frac{\sqrt{(1+\delta_{ab})(1+\delta_{cd})}}{4} \sum_{JT} V_{JT}(ab, cd) \sum_{M, M_T} A_{M M_T}^{J T \dagger}(ab) A_{M M_T}^{J T}(cd), \quad (4.7)$$

其中

$$A_{M,M_T}^{JT\dagger}(ab) = \sum_{m_a m_b \tau_a \tau_b} C_{j_a m_a j_b m_b}^{JM} C_{1/2 \tau_a 1/2 \tau_b}^{1/2 M_T} C_{m_a, \tau_a}^{j_a 1/2 \dagger} C_{m_b, \tau_b}^{j_b 1/2 \dagger}, \quad (4.8)$$

$$A_{M,M_T}^{JT}(cd) = \sum_{m_c m_d \tau_c \tau_d} C_{j_c m_c j_d m_d}^{JM} C_{1/2 \tau_c 1/2 \tau_d}^{1/2 M_T} C_{m_c, \tau_c}^{j_c 1/2} C_{m_d, \tau_d}^{j_d 1/2}, \quad (4.9)$$

$C_{j_a m_a j_b m_b}^{JM}$ 为 CG 系数, $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d$ 为同位旋第三分量, 中子的同位旋第三分量为 $1/2$, 质子则为 $-1/2$. 两体相互作用矩阵元满足对称性

$$\begin{aligned} V_{JT}(ab, cd) &= -(-1)^{j_a + j_b - J + 1 - T} V_{JT}(ba, cd) \\ &= -(-1)^{j_c + j_d - J + 1 - T} V_{JT}(ab, dc) \\ V_{JT}(ab, cd) &= V_{JT}(cd, ab) \end{aligned} \quad (4.10)$$

由于 Clebsch-Gordan 系数

$$C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^1 = C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^1 = 1 \quad (4.11)$$

$$C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^1 = C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^1 = 1/\sqrt{2} \quad (4.12)$$

$$C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^0 = 1/\sqrt{2} \quad (4.13)$$

$$C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0 = -1/\sqrt{2} \quad (4.14)$$

两体相互作用可以写成中子-质子形式: $H_2 = H_{nn} + H_{pp} + H_{np}$. 其中, H_{nn} 为中子-中子相互作用

$$H_{nn} = \sum_{abcd} \frac{\sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}}{4} V_{J,T=1}(ab, cd) \sum_J \sum_M A_M^{J\dagger}(a_\nu b_\nu) A_M^J(c_\nu d_\nu), \quad (4.15)$$

其中下标 ν 表示该算符为中子算符, 质子算符则用 π 表示,

$$\begin{aligned} A_M^{J\dagger}(a_\nu b_\nu) &= C_{j_a m_a j_b m_b}^{JM} C_{m_a}^{j_a \dagger}(\nu) C_{m_b}^{j_b \dagger}(\nu) \\ A_M^J(c_\nu d_\nu) &= -C_{j_c m_c j_d m_d}^{JM} C_{m_c}^{j_c}(\nu) C_{m_d}^{j_d}(\nu). \end{aligned} \quad (4.16)$$

质子-质子相互作用与之类似. 中子-质子相互作用为

$$\begin{aligned} H_{np} &= \sum_{abcd} \frac{\sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}}{4} \sum_J (2V_{J,T=0}(ab, cd) + 2V_{J,T=1}(ab, cd)) \\ &\quad \times \sum_M A_M^{J\dagger}(a_\nu b_\pi) A_M^J(c_\nu d_\pi). \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中

$$\begin{aligned} A_M^{J\dagger}(a_\nu b_\pi) &= C_{j_a m_a, j_b m_b}^{JM} c_{m_a}^{j_a \dagger}(\nu) c_{m_b}^{j_b \dagger}(\pi) \\ A_M^J(c_\nu d_\pi) &= -C_{j_c m_c, j_d m_d}^{JM} c_{m_c}^{j_c}(\nu) c_{m_d}^{j_d}(\pi). \end{aligned} \quad (4.18)$$

根据角动量耦合规则(公式.(A.3)),

$$\sum_M A_M^{J\dagger}(a_\nu b_\pi) A_M^J(c_\nu d_\pi) = \sum_L (-1)^{j_b + j_c + J + L} \hat{L} \begin{Bmatrix} j_a & j_b & J \\ j_d & j_c & L \end{Bmatrix} (Q_\nu^L(ac) \times Q_\pi^L(bd))^0, \quad (4.19)$$

其中 $Q_\nu^L(ac) = (j_a^\dagger \times \tilde{j}_c)^L$. 所以中子-质子相互作用为

$$H_{np} = \sum_{abcdL} \kappa_L(abcd) [Q_\nu^L(ac) \times Q_\pi^L(bd)]^0, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \kappa_L(abcd) &= \frac{\sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}}{2} \sum_J (-1)^{j_b + j_c + J + L} \hat{L} \begin{Bmatrix} j_a & j_b & J \\ j_d & j_c & L \end{Bmatrix} \\ &\times [V_{J,T=0}(ab, cd) + V_{J,T=1}(ab, cd)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.4 算法介绍

4.4.1 推广的Wick定理

为了统一考虑费米子和玻色子, 定义对易子

$$[a, b] = ab - \theta_{ab} ba \quad \theta_{ab} = \begin{cases} -1, & \text{a, b均为费米子,} \\ 1, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} [ab, c] &= abc - \theta_{ab,c} cab \\ &= abc - \theta_{bc} acb + \theta_{bc} acb - \theta_{ab,c} cab \\ &= a[b, c] + \theta_{bc}[a, c]b. \end{aligned}$$

应用到角动量耦合中, 得到

$$[(a \times b)^e, c]^d = \sum_f U(abdc; ef)(a \times [b, c]^f)^d + \theta_{bc} \sum_f U(abcd; ef) \times (-1)^{a+d-e-f}([a, c]^f \times b)^d. \quad (4.22)$$

这个式子是配对近似中应用最多的对易式. 相比 m-scheme 的壳模型 (基矢的角动量第三分量为好量子数), 配对近似完全使用 j-scheme (基矢的总角动量为好量子数). 这大大减少了基矢的个数 (空间维数), 也打开了不同配对模式的方便之门. 但是由于大量的角动量耦合, 随着粒子数的增加, 计算的可行性降低得很快. 一般来说, 配对近似能计算满壳外 8-10 中子, 8-10 质子.

4.4.2 单体算符 Q^t 的约化矩阵元 $\langle \tilde{A}^{J'} || Q^t || A^{J\dagger} \rangle$

哈密顿量中有单体算符, 中子-质子相互作用 (公式4.20) 也可以分成中子单体算符与质子单体算符相互耦合的形式. 更重要的是, 电磁跃迁算符也是单体算符. 下面介绍单体算符约化矩阵元在配对近似程序中的算法. 定义单体算符

$$Q_t \equiv \sum_{ab} q(abt)(j_a^\dagger \times \tilde{j}_b)_t, \quad (4.23)$$

其中 $q(abt)$ 为它的结构系数, 不同的单体算符有不同的结构系数, 但是公式4.23的形式是一致的. 由于我们的谐振子波函数使用 Conden-Shortley 相位约定, 有 $q(abt) = (-1)^{j_a+j_b+1}q(bat)$, 所以可以推得

$$(Q_\sigma^t)^\dagger = (-1)^\sigma Q_{-\sigma}^t.$$

可以得到

$$(Q^t, A^{J_{N^+}})_{-M_N'}^{L_N} = (-1)^{J_N+M_N'}((\tilde{A}^{J_N}, Q^t)_{M_N'}^{L_N})^\dagger$$

所以约化矩阵元

$$\langle \tilde{A}^{J'} || Q^t || A_J^\dagger \rangle = (-1)^{J+t-M'} \langle \tilde{A}^{J'M'} || (\tilde{A}_J^\dagger, Q^t)_{J' - M'}^\dagger \rangle \quad (4.24)$$

根据公式4.22, 角动量重新耦合后得到

$$\begin{aligned} & [(\tilde{A}^{J_{N-1}} \times \tilde{A}^{r_N})^{J_N}, Q^t]_{M_N'}^{L_N} \\ = & \sum_{k=N}^0 \sum_{r_k' L_k \dots L_{N-1}} Q_N(t) \dots Q_{k+1}(t) \bar{M}_k(tr_k') (\dots ((\tilde{A}^{J_{k-1}} \times \tilde{A}^{r_k'})^{L_k} \times \dots \times \tilde{A}^{r_N})_{M_N'}^{L_N}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

这里 $\tilde{A}^{r'_k} = [\tilde{A}^{r_k}, Q^t]^{r'_k}$,

$$Q_i(t) = (-1)^{J_{i-1}+L_i-J_i-L_{i-1}} U(r_i L_i J_{i-1} t, L_{i-1} J_i), \bar{M}_k(tr'_k) = U(r_k t J_{k-1} L_k; r'_k J_k),$$

$$Q_N(t) \cdots Q_{k+1}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{for } k = N, \\ Q_N(t) & , \text{for } k = N - 1. \end{cases}$$

下面计算 $\tilde{A}^{r'_k} = [\tilde{A}^{r_k}, Q^t]^{r'_k}$. 根据公式4.22, 容易得到

$$(\tilde{a}, (c^\dagger \times \tilde{d})^t)_\sigma^s = (-1)^{s-a-t} \delta_{ca} \delta_{ds} \frac{\hat{t}}{\hat{d}} \tilde{d} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} ((\tilde{a} \times \tilde{b})^r, (c^\dagger \times \tilde{d})^t)_\sigma^s &= U(abst; rd) (-1)^{d-b-t} \delta_{bc} \hat{t} / \hat{d} (\tilde{a} \times \tilde{d})_\sigma^s \\ &+ (-1)^{r+t-s} U(abts; rd) \delta_{ac} \hat{t} / \hat{d} (\tilde{d} \times \tilde{b})_\sigma^s \end{aligned} \quad (4.27)$$

所以

$$[\tilde{j}, Q^t]^{j'} = (-1)^{j'-j-t} q(jj't) \frac{\hat{t}}{\hat{j}'} \tilde{j}' \quad (4.28)$$

$$(\tilde{A}^{r_k}, Q^t)^{r'_k} = 2 \sum_{da} z(dat) (\tilde{d} \times \tilde{a})^{r'_k}, \quad (4.29)$$

这里

$$z(dar'_k) \equiv \hat{r}_k \hat{t} \sum_b y(abr_k) q(bdt) \left\{ \begin{matrix} r_k & t & r'_k \\ & d & a & b \end{matrix} \right\}. \quad (4.30)$$

所以, 反对称化以后, $y'(dar'_k) \equiv z(dar'_k) - \theta(adr'_k) z(adr'_k)$, 我们得到

$$\tilde{A}^{r'_k} = (\tilde{A}^{r_k}, Q^t)^{r'_k} = \sum_{da} y'(dar'_k) (\tilde{d} \times \tilde{a})^{r'_k}.$$

最后我们得到

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}^{J'} \| Q^t \| A^{J+} \rangle &= (-1)^t \sum_{k=N}^0 \sum_{r'_k L_k \cdots L_{N-1}} Q_N(t) \cdots Q_{k+1}(t) \bar{M}_k(tr'_k) \\ &\times \langle s_1 \cdots s_N; \cdots J' M' | r \cdots r'_k \cdots r_N; J_1 \cdots L_k \cdots L_N M' \rangle \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.4.3 基矢内积的计算

由集体对组建的基矢（公式（4.2）并不是正交归一的，不同基矢之间的内积为

$$\begin{aligned} \langle A_{M_N}^{J_N} A_{M_N}^{J_N+} \rangle &= \langle (A_{r_1} \times A_{r_2})_{J_2} \times \cdots \times A_{r_N} \rangle_{J_N M_N} | \\ &\quad \cdot | ((A_{s_1}^\dagger \times A_{s_2}^\dagger)_{J_2'} \times \cdots \times A_{s_N}^\dagger)_{J_N' M_N'} \rangle \end{aligned} \quad (4.32)$$

通过多次运用公式（4.22），我们得到

$$\langle A_{J_N, M_N} A_{J_N, M_N}^\dagger \rangle = (-1)^{J_{N-1} + s_N - J_N} \hat{J}_{N-1}^{-1} \hat{J}_{N-1}' \langle (\tilde{A}_{J_N}, A_{s_N}^\dagger)_{J_{N-1}, M_{N-1}} A_{J_{N-1}, M_{N-1}}^\dagger \rangle \quad (4.33)$$

其中

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_{J_N}, A_{s_N}^\dagger]_{L_N} &= \sum_{r_N'} U(J_{N-1} r_N L_N s_N J_{N-1}'; J_N r_N') (\tilde{A}_{J_{N-1}} \times (\tilde{A}_{r_N}, A_{s_N}^\dagger)_{r_N'})_{L_N} \\ &+ \sum_{L_{N-1}} (-1)^{J_{N-1} + L_N - J_N - L_{N-1}} U(J_{N-1} r_N s_N L_N; J_N L_{N-1}) \\ &\quad \times ((\tilde{A}_{J_{N-1}}, A_{s_N}^\dagger)_{L_{N-1}} \times \tilde{A}_{r_N})_{L_N} \end{aligned} \quad (4.34)$$

我们定义

$$\begin{aligned} Q_k(s_N) &\equiv (-1)^{J_{k-1} + L_k - J_k - L_{k-1}} U(J_{k-1} r_k s_N L_k; J_k L_{k-1}) \\ M_k(t) &\equiv U(J_{k-1} r_k L_k s_N; J_k t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

根据公式（4.22），我们可以得到

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_{r_k}, A_{s_N}^\dagger]_t &= 2\delta_{t0} \delta_{r_k s_N} \hat{s}_N \sum_{ab} y(abr_k) y(abs_N) \\ &\quad - 4\hat{r}_k \hat{s}_N \sum_{abd} y(abr_k) y(bds_N) \begin{Bmatrix} r_k & s_N & t \\ d & a & b \end{Bmatrix} (d^+ \times \tilde{a})^t, \end{aligned} \quad (4.36)$$

以及

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{r_k}, Q^t)^{r_k'} &= \sum_{da} y'(dar_k) (\tilde{d} \times \tilde{a})^{r_k'}, \\ (\tilde{j}, Q^t)^{j'} &= (-1)^{j+j'-t} q(jj't) \frac{\hat{t}}{\hat{j}'} \tilde{j}' \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中

$$\begin{aligned} y'(dar_k) &= z(dar_k) - (-1)^{d+a+r_k} z(adr_k), \\ z(dar_k) &= \hat{r}_k \hat{t} \sum_b y(abr_k) q(bdt) \begin{Bmatrix} r_k & t & r'_k \\ d & a & b \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

把公式 (4.35-4.38) 代入公式 (4.33), 我们得到

$$\begin{aligned} \langle A_{J_N M_N} A_{J_N M_N}^\dagger \rangle &= (-1)^{J'_{N-1} + s_N - J_N} \hat{J}_N^{-1} \hat{J}_{N-1} \sum_{kL_k \cdots L_{N-1}} Q_N(s_N) \cdots Q_{k+1}(s_N) \\ &\times \delta_{r_k s_N} \psi \langle jr_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_N; J_1 \cdots J_{k-1} L_k \cdots L_{N-1} J'_{N-1} | \\ &\cdot |j' s_1 \cdots s_{N-1}; j' J'_1 \cdots J'_{N-1} \rangle \\ &- (-1)^{J'_{N-1} + s_N - J_N} \hat{J}_N^{-1} \hat{J}_{N-1} \sum_{iL_i \cdots L_{N-1}} Q_N(s_N) \cdots Q_{k+1}(s_N) M_k(r'_k) \\ &Q_{i+1}(t) \cdots Q_{k-1}(t) M_k(r'_i) \\ &\langle jr_1 \cdots r'_i r_{i+1} \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_N; J_1 \cdots J_{i-1} L_i \cdots L_{N-1} J'_{N-1} | \\ &\cdot |j' s_1 \cdots s_{N-1}; j' J'_1 \cdots J'_{N-1} \rangle, \end{aligned} \quad (4.39)$$

这里

$$\begin{aligned} y(dar'_i) &= z(dar'_i) - (-1)^{d+a+r'_i} z(adr'_i), \\ z(dar'_i) &= 4\hat{r}_k \hat{s}_N \hat{r}_i \hat{t} \sum_{bb_1} y(abr_k) y(db_1 r_k) y(b_1 b s_N) \begin{Bmatrix} r_i & t & r'_i \\ d & a & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_k & s_N & t \\ b & d & b_1 \end{Bmatrix}, \\ \tilde{j}' &= (-1)^{j+j'-t} 4\hat{r}_k \hat{s}_N \sum_b y(j' b r_k) y(b j s_N) \begin{Bmatrix} r_k & s_N & t \\ j & j' & b \end{Bmatrix} \tilde{j}', \\ \psi &= 2(-1)^{J_{k-1} + r_k - J_k} \hat{J}_k \hat{J}_{k-1}^{-1} \sum_{ab} y(abr_k) y(abs_N), \end{aligned}$$

4.4.4 两体相互作用 $(Q \times Q)^0$

根据公式 (4.22),

$$(\tilde{A}^{J_N}, (Q^t \times Q^t)^0)^{J_N} = \sum_{k=N}^0 ((\tilde{A}^{J_{k-1}} \times [\tilde{A}^{r_k}, (Q^t \times Q^t)^0]^{r_k})^{J_k} \times \cdots \times \tilde{A}^{r_N})^{J_N} \quad (4.40)$$

同样根据公式 (4.22)

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}^{r_k}, (Q_1^t \times Q_2^t)^0)^{r_k} &= \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} [Q_1^t \times (\tilde{A}^{r_k}, Q_2^t)^{r'_k}]^{r_k} + \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} [Q_2^t \times (\tilde{A}^{r_k}, Q_1^t)^{r'_k}]^{r_k} \\
&+ \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} (-1)^{r_k+t-r'_k} [(\tilde{A}^{r_k}, Q_1^t)^{r'_k}, Q_2^t]^{r_k}. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

最终我们得到

$$\begin{aligned}
&(\tilde{A}^{J_N}, (Q_1^t \times Q_2^t)^0)^{r_k} \\
&= \sum_{k=N}^0 \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} \sum_{i=k-1}^0 \sum_{r'_i L_i \dots L_{k-1}} U(J_{k-1} t J_k r'_k; L_{k-1} r_k) Q_{k-1} \dots Q_{i+1} M_i() \\
&\times (((\dots (\tilde{A}^{J_{i-1}} \times \tilde{A}^{r'_i}(Q_1))^{L_i} \dots)^{L_{k-1}} \times \tilde{A}^{r'_k}(Q_2))^{J_k} \times \dots)^{J_N} \\
&+ \sum_{k=N}^0 \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} \sum_{i=k-1}^0 \sum_{r'_i L_i \dots L_{k-1}} U(J_{k-1} t J_k r'_k; L_{k-1} r_k) Q_{k-1} \dots Q_{i+1} M_i() \\
&\times (((\dots (\tilde{A}^{J_{i-1}} \times \tilde{A}^{r'_i}(Q_2))^{L_i} \dots)^{L_{k-1}} \times \tilde{A}^{r'_k}(Q_1))^{J_k} \times \dots)^{J_N} \\
&+ \sum_{k=N}^0 \sum_{r'_k} \frac{\hat{r}'_k}{\hat{r}'_k \hat{t}} (-1)^{r_k+t-r'_k} | \dots r'_k(y'') \dots, J \dots J \rangle.
\end{aligned}$$

使用单体-两体相互作用时, 不需要这一项. 但是使用“对力+多极-多极力”(Pairing+Multipole-multipole)时, 用这一项计算多极-多极力, 会很方便.

4.4.5 两体相互作用 $(Q_\nu^t Q_\pi^t)^0$

根据公式 (A.3)

$$\begin{aligned}
&\langle J'_\nu J'_\pi; JM | (Q_\nu^t Q_\pi^t)^0 | J_\nu J_\pi; JM \rangle \\
&= \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi / \hat{t} (-1)^{J'_\nu + J + J_\nu + t} \begin{Bmatrix} J_\nu & J_\pi & J \\ J'_\pi & J'_\nu & t \end{Bmatrix} \langle J'_\nu || Q_\nu^t || J_\nu \rangle \langle J'_\pi || Q_\pi^t || J_\pi \rangle. \quad (4.42)
\end{aligned}$$

将公式 (4.42) 代入公式 (4.20), 得到

$$\begin{aligned}
&\langle J'_\nu J'_\pi; JM' | H_{np} | J_\nu J_\pi; JM' \rangle \\
&= \sum_{abcdL} \kappa_L(abcd) \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi (-1)^{J'_\nu + J + J_\nu + t} \begin{Bmatrix} J_\nu & J_\pi & J \\ J'_\pi & J'_\nu & t \end{Bmatrix} \\
&\times \langle J'_\nu || Q_\nu^t(ac) || J_\nu \rangle \langle J'_\pi || Q_\pi^t(bd) || J_\pi \rangle.
\end{aligned}$$

4.4.6 两体相互作用矩阵元 $\sum_m A_m^{s+} A_m^s = \hat{s}(A^{s+} \times A^s)^0$

这样的相互作用即广义的“对力”（对的角动量 s 可以不为零）。根据公式 (4.22)，有

$$(\tilde{b}, (c^+ \times d^+)^f)^g = -\frac{\hat{f}}{\hat{c}} \delta_{bd} \delta_{cg} c^+ + (-1)^{c+d+f} \frac{\hat{f}}{\hat{d}} \delta_{bc} \delta_{dg} d^+ \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} [(\tilde{a} \times \tilde{b})^e, (c^+ \times d^+)^f]^t &= -\delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{t0} \delta_{ef} \hat{f} \\ &+ (-1)^{c+d+f} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{t0} \delta_{ef} \hat{f} \\ &+ (-1)^{a+c+t} \frac{\hat{f}}{\hat{c}} \delta_{bd} U(abt f; ec) (c^+ \times \tilde{a})^t \\ &+ (-1)^{a+c+f+t} \frac{\hat{f}}{\hat{d}} \delta_{bc} U(abt f; ed) (d^+ \times \tilde{a})^t \\ &+ (-1)^{a+c+e+t} \frac{\hat{f}}{\hat{c}} \delta_{ad} U(abft; ec) (c^+ \times \tilde{b})^t \\ &- (-1)^{e+f+t} \frac{\hat{f}}{\hat{d}} \delta_{ac} U(abft; ed) (d^+ \times \tilde{b})^t \quad (4.44) \end{aligned}$$

所以有

$$[\tilde{C}_j, A^{s+}]^{j'} = -2 \sum_j \frac{\hat{s}}{\hat{j}} y(j' j s) j'^+$$

对于集体对，可以预设其对结构系数反对称化，即 $y(abr) = -(-1)^{a+b+r} y(bar)$ 。则有

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_{r_k}, A_s^+]_t &= \sum_{ab} 2y(abr_k) y(abs) \delta_{t0} \delta_{r_k s} \hat{s} \\ &- \sum_{abc} 4y(abr_k) y(bcs) \hat{r}_k \hat{s} \begin{Bmatrix} r_k & s & t \\ c & a & b \end{Bmatrix} (c^+ \times \tilde{a})^t. \end{aligned}$$

我们定义

$$p(dat) \equiv 4\hat{r}_k \hat{s} \sum_b y(abr_k) y(bds) \begin{Bmatrix} r_k & s & t \\ d & a & b \end{Bmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} &[\tilde{A}^{r_k}, (A_1^{s+} \times \tilde{A}_2^s)^0]^{r_k} \\ &= \frac{2}{\hat{s}} \delta_{r_k s} \sum_{ab} y(abr_k) y_1(abs) \tilde{A}_2^{r_k} - \sum_t (-1)^{s+r_k-t} \frac{\hat{t}}{\hat{s} \hat{r}_k} \sum_{ac} p(cat) ((c^+ \times \tilde{a})^t \times \tilde{A}_2^s)^{r_k}. \end{aligned}$$

定义

$$\phi_0 = \frac{2}{\hat{s}} \sum_{ab} y(abr_k) y_1(abs),$$

则有

$$\begin{aligned} [\tilde{j}, (A_1^{s+} \times \tilde{A}_2^s)^0]^j &= - \sum_f \frac{\hat{f}}{\hat{s}\hat{j}} [(A^{s+}, \tilde{j})^f \times \tilde{A}^s]^j \\ (\tilde{A}^{r_k}, (A_1^{s+} \times \tilde{A}_2^s)^0)^{r_k} &= \delta_{r_k s} \phi_0 \tilde{A}_2^s - \sum_t (-1)^{s+r_k-t} \frac{\hat{t}}{\hat{s}\hat{r}_k} \sum_{ac} p(cat) ((c^+ \times \tilde{a})^t \times \tilde{A}_2^s)^{r_k}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{s} \langle J_N M_N (\tilde{A}^s \times A^{s+})^0 J_N M_N \rangle &= \hat{s} (\tilde{A}^{J_N}, (\tilde{A}^s \times A^{s+})^0)_{M_N}^{J_N} A_{M_N}^{J_N+} \\ &= \sum_{k=N}^1 \delta_{r_k s_1} \hat{s} \phi_0 \langle j \dots s_2(k) \dots; j \dots J r \dots; J_N M_N | s \dots; J s \dots; J_N M_N \rangle \\ &\quad - \sum_{k=N}^1 \sum_{i=k-1}^0 \sum_{tr'_i L_i \dots L_{k-1}} (-1)^{s+r_k-t} \frac{\hat{t}}{\hat{r}_k} U(J_{k-1} t J_k s; L_{k-1} r_k) Q_{k-1} \dots Q_{i+1} \bar{M}_i(tr'_i) \\ &\quad \times \langle j \dots r_{i-1} r'_i r_{i+1} \dots r_{k-1} s_2 r_{k+1} \dots r_N; \dots J_{i-1} L_i \dots L_{k-1} J_k \dots; J_N M_N | \\ &\quad \cdot | j' \dots; \dots J'_i \dots; J_N M_N \rangle \end{aligned}$$

4.4.7 偶偶核伽莫夫-泰勒跃迁矩阵元

我们定义单体跃迁算符为

$$Q_\beta^L = \sum_{ab} \beta(abL) [a^\dagger \times \tilde{b}]^L, \quad (4.45)$$

其中, L 为跃迁算符的角动量, a, b 为轨道序数, a^\dagger, \tilde{b} 为不同种类核子的算符. 对于费米跃迁

$$\beta^F(abL) = -\delta_{ab} \hat{j}_a, \quad (4.46)$$

对于伽莫夫-泰勒跃迁

$$\beta^{GT}(abL) = -\sqrt{2} \delta_{n_a n_b} \delta_{l_a l_b} \hat{j}_a \hat{j}_b (-1)^{l_a + j_b + 3/2} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & l \\ j_b & j_a & l_a \end{Bmatrix}. \quad (4.47)$$

跃迁的强度为

$$B_F(i \rightarrow f) = \frac{g_V^2}{2J_i + 1} |\langle f || Q_\beta^L || i \rangle|^2, \quad (4.48)$$

$$B_{GT}(i \rightarrow f) = \frac{g_A^2}{2J_i + 1} |\langle f || Q_\beta^L || i \rangle|^2, \quad (4.49)$$

其中 $g_V = 1.0$ 是矢量耦合常数, $g_A = 1.26$ 是轴向矢量耦合常数.

我们定义初态波函数为

$$|JM\rangle = \sum_k C_k(J_\nu J_\pi JM) |J_\nu J_\pi; JM\rangle_k, \quad (4.50)$$

末态波函数为

$$|J'M'\rangle = \sum_k D_k(J'_\nu J'_\pi J'M') |J'_\nu J'_\pi; J'M'\rangle_k, \quad (4.51)$$

总的跃迁矩阵元为

$$\langle J' || Q_\beta^L || J \rangle = \sum_{kl} C_k(J_\nu J_\pi JM) D_l^*(J'_\nu J'_\pi J'M') \langle J'_\nu J'_\pi J' || Q_\beta^L || J_\nu J_\pi J \rangle_{kl}. \quad (4.52)$$

容易证明, 在约化矩阵元约定 $\langle J'M'|t\tau|JM\rangle = C_{JM,t\tau}^{J'M'} \langle J'|t||J\rangle$ 下,

$$\langle A^{J'} || Q^L || A^{J\dagger} \rangle = (-1)^{L+J-J'} \langle A_{M'}^{J'} [Q^L, A^{J\dagger}]_{M'}^{J'} \rangle \quad (4.53)$$

根据公式 (4.22)

$$\begin{aligned} [Q^L, A^{J\dagger}]^{J'} &= -(-1)^{J_\nu+J_\pi+L-J'} \left\{ \sum_{L'} U(J_\pi J_\nu J' L; JL') [A^{J_\pi\dagger} \times (A^{J_\nu\dagger}, Q^L)^{L'}]_{M'}^{J'} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{L'} U(J_\pi J_\nu L J'; JL') (-1)^{J_\pi+J'-J-L'} [[A^{J_\nu\dagger}, Q^L]^{L'} \times A^{J_\pi\dagger}]_{M'}^{J'} \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

经过一系列角动量重新耦合, 得到

$$\begin{aligned}
(J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta-}^L || J_\nu J_\pi J) &= -2(-1)^{J_\nu+J_\pi+J'_\nu+J'_\pi-J-J'} \hat{J} \hat{L} \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi \sum_{pnn'} \beta(pnL) \\
&\times \left\{ \begin{array}{ccc} J_\pi & J_\nu & J \\ j_p & j_n & L \\ L_{N_p} & L_{N_n} & J' \end{array} \right\} \sum_{k,L_1 \cdots L_{N_p-1}} y(nn'; r_k) \hat{r}_k / \hat{j}'_n Q_N(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
&\times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-1} J'_\pi \rangle \\
&\times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_p-2}} \tilde{Q}'_{N_n}(j_n) \cdots \tilde{Q}'_{k+1}(j_n) \tilde{M}'_k(j_n j'_n) Q'_{k-1}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
&\times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r'_{k-1}, r'_{k+1} \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-2} J'_\nu \rangle,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

这里

$$Q_k(j_p) = (-1)^{J_{k-1}+L_k-J_k-L_{k-1}} U(r_k L_k J_{k-1} j_p; L_{k-1} J_k), \tag{4.56}$$

$$\tilde{M}'_k(j_p j'_p) = U(r_k j_p J_{k-1} L'_{k-1}; j'_p J_k), \tag{4.57}$$

$$\tilde{Q}'_k(j_p) = (-1)^{J_{k-1}+L'_{k-1}-J_k-L'_{k-2}} U(r_k L'_{k-1} J_{k-1} j_p; L'_{k-2} J_k), \tag{4.58}$$

$Q'_i(j_n)$ 的定义与 $Q_i(j_n)$ 类似, 只需做转换 $L_i \rightarrow L'_i, L_{i-1} \rightarrow L'_{i-1}$.

$$\begin{aligned}
(J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta+}^L || J_\nu J_\pi J) &= -2 \hat{J} \hat{L} \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi \sum_{pp'n} \beta(npL) \left\{ \begin{array}{ccc} J_\nu & J_\pi & J \\ j_n & j_p & L \\ J'_\nu & J'_\pi & J' \end{array} \right\} \sum_{k,L_1 \cdots L_{N_p-2}} y(pp'; r_k) \hat{r}_k / \hat{j}'_p \\
&\times \tilde{Q}_N(j_p) \cdots \tilde{Q}_{k+1}(j_p) \tilde{M}_k(j_p j'_p) Q_{k-1}(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
&\times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-2} J'_\pi \rangle \\
&\times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_n-1}} Q'_{N_n}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
&\times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-1} J'_\nu \rangle
\end{aligned} \tag{4.59}$$

如果中子质子都在空穴表象 (hole) 下, 公式 (4.55, 4.59) 前面都需要加上相因子 $(-1)^{L+1}$. 如果质子在空穴表象, 而中子在粒子表象, 则有

$$\begin{aligned}
& (J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta-}^L || J_\nu J_\pi J) = -4(-1)^{J_\nu+J_\pi+J'_\nu+J'_\pi-J-J'} \hat{J} \hat{L} \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi \sum_{pp'nn'} \beta(pnL) \\
& \times \left\{ \begin{array}{ccc} J_\pi & J_\nu & J \\ j_p & j_n & L \\ J'_\pi & J'_\nu & J' \end{array} \right\} \sum_{k,k',L_1 \cdots L_{N_p-2}} y(nn'; r'_k) \hat{r}'_k / \hat{j}'_n y(pp', r_k) \hat{r}_k / \hat{j}'_p \\
& \times \tilde{Q}_{N_p}(j_p) \cdots \tilde{Q}_{k+1}(j_p) \tilde{M}_k(j_p j_{p'}) Q_{k-1}(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
& \times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-2} J'_\pi \rangle \\
& \times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_n-2}} \tilde{Q}'_{N_n}(j_n) \cdots \tilde{Q}'_{k'+1}(j_n) \tilde{M}'_{k'}(j_n j_{n'}) Q'_{k'-1}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
& \times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r_{k'-1}, r_{k'+1} \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-2} J'_\nu \rangle, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta+}^L || J_\nu J_\pi J) = -\hat{J} \hat{L} \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi \sum_{pn} \beta(npL) \left\{ \begin{array}{ccc} J_\nu & J_\pi & J \\ j_n & j_p & L \\ J'_\nu & J'_\pi & J' \end{array} \right\} \sum_{L_1 \cdots L_{N_p-2}} \\
& \times Q_{N_p}(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
& \times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-1} J'_\pi \rangle \\
& \times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_n-1}} Q'_{N_n}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
& \times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-1} J'_\nu \rangle \tag{4.61}
\end{aligned}$$

如果中子在空穴表象下，而质子在粒子表象下，则有

$$\begin{aligned}
& (J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta-}^L || J_\nu J_\pi J) \\
& = (-1)^{J_\nu+J_\pi+J'_\nu+J'_\pi-J-J'} \hat{J} \hat{L} \hat{J}'_\nu \hat{J}'_\pi \sum_{pn} \beta(pnL) \left\{ \begin{array}{ccc} J_\pi & J_\nu & J \\ j_p & j_n & L \\ J'_\pi & J'_\nu & J' \end{array} \right\} \sum_{L_1 \cdots L_{N_p-1}} \\
& \times Q_{N_p}(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
& \times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-1} J'_\pi \rangle \\
& \times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_n-1}} Q'_{N_n}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
& \times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-1} J'_\nu \rangle \tag{4.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(J'_\nu J'_\pi J' || Q_{\beta-}^L || J_\nu J_\pi J) &= 4\hat{J}\hat{L}\hat{J}'_\nu\hat{J}'_\pi \sum_{pn} \beta(npL) \\
&\times \left\{ \begin{array}{ccc} J_\nu & J_\pi & J \\ j_n & j_p & L \\ J'_\nu & J'_\pi & J' \end{array} \right\} \sum_{k,k',L_1 \cdots L_{N_p-2}} y(nn'; r'_k) r'_k / \hat{j}'_n y(pp', r_k) r_k / \hat{j}'_p \\
&\times \tilde{Q}_{N_p}(j_p) \cdots \tilde{Q}_{k+1}(j_p) \tilde{M}_k(j_p j_{p'}) Q_{k-1}(j_p) \cdots Q_1(j_p) \\
&\times \langle p', r'_1 \cdots r'_{N_p}; J'_1(p) \cdots J'_\pi | p, r_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_{N_p}; L_1 \cdots L_{N_p-2} J'_\pi \rangle \\
&\times \sum_{L'_1 \cdots L'_{N_n-2}} \tilde{Q}'_{N_n}(j_n) \cdots \tilde{Q}'_{k'+1}(j_n) \tilde{M}'_{k'}(j_n j_{n'}) Q'_{k'-1}(j_n) \cdots Q'_1(j_n) \\
&\times \langle n', r'_1 \cdots r'_{N_n}; J'_1(n) \cdots J'_\nu | n, r_1 \cdots r_{k'-1}, r_{k'+1} \cdots r_{N_n}; L'_1 \cdots L'_{N_n-2} J'_\nu \rangle,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

4.5 ^{48}Ca 两中微子双贝塔衰变

在所有核素中，有大约十个原子核适于研究两中微子双贝塔衰变 ($2\nu\beta\beta$) [127, 128]. 目前有两种模型可以用于计算两中微子双贝塔衰变跃迁矩阵元，一种是 QRPA (quasiparticle random phase approximation). QRPA 可以考虑多个大壳的激发，但 $2\nu\beta\beta$ 矩阵元 $M_{2\nu}$ 对于中子质子部分的粒子-粒子相互作用参数 g_{pp} 非常敏感 [128]. 另一种是壳模型，壳模型的计算受限于计算机的计算能力，因为空间维数随着粒子数的增加呈指数增长.

两中微子双贝塔衰变跃迁矩阵元为

$$M_{GT}^{2\nu}(J^+) = \frac{1}{\sqrt{J+1}} \sum_k \frac{\langle J_f^+ || \sigma\tau^- || 1_k^+ \rangle \langle 1_k^+ || \sigma\tau^- || 0_i^+ \rangle}{(E_k + E_J)^{J+1}}, \tag{4.64}$$

其中 $\sigma\tau$ 是伽莫夫-泰勒跃迁算符. 所以得到初态、末态分别与中间原子核的所有 1^+ 态之间的伽莫夫泰勒跃迁矩阵元，即可考虑所有虚过程. 相应的半衰期为

$$T_{1/2}^{-1} = G_J^{2\nu} |M_{GT}^{2\nu}(J)|^2, \tag{4.65}$$

其中 $G_J^{2\nu}$ 是两中微子双贝塔衰变的相位-空间系数，对于 ^{48}Ca 其值为 [129] $1.10 \times 10^{-17} \text{yr}^{-1} (\text{MeV})^2$.

^{48}Ca 是 pf 壳中的单满壳原子核，相对来说更容易进行计算. 另一方面， ^{48}Ca 的 $2\nu\beta\beta$ 跃迁矩阵元随着 ^{48}Sc 的 1^+ 态的能量先增加后减少，即有相位相

消的效应, 在其他原子核中, 尚未见到这个现象, 它属于 ^{48}Ca , ^{48}Sc , ^{48}Ti 这三个原子核的性质.

对于 ^{48}Ca 这个原子核, 已有一系列壳模型计算 [129-132]. 我们在配对截断的基矢空间下, 对 ^{48}Ca , ^{48}Sc , ^{48}Ti 三个原子核进行对角化, 得到波函数, 并计算 ^{48}Ca , ^{48}Ti 的 0^+ 态与 ^{48}Sc 的 1^+ 之间的伽莫夫-泰勒跃迁, 然后计算 $2\nu\beta\beta$ 过程的跃迁矩阵元 $M_{2\nu}$.

我们选取同类核子角动量为 0 的对 (S 对) 和同类核子角动量为 2 的对 (D 对). 由于小型工作站计算能力有限, 我们限制 D 对的个数为不大于 2. 我们使用 GAPF1A 相互作用. 在截断空间下, 我们需要使用更强的 quenching. 相比壳模型常用的 $qf=0.77(0.74)$, 我们选用 $qf=0.33$. 在图 4.1, 4.2 中, 我们展示 $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$, 以及 $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ 的伽莫夫泰勒跃迁强度. 这个截断空间的维数只有全空间的百分之一, 然而这两张图上的强度分布与参考文献 [130] 一致.

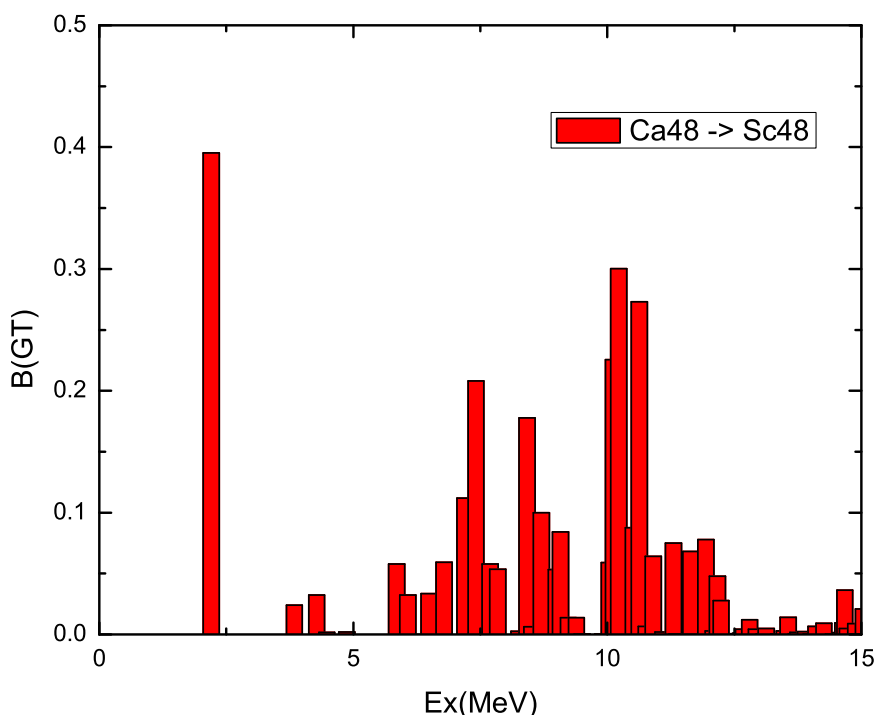


图 4.1 $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ 的伽莫夫-泰勒跃迁.

Fig 4.1 Gamow-Teller transitions of $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$. In the framework of the Nucleon Pair Approximation, we consider SD truncation, with the number of D pairs less than 2.

利用公式 4.3, 我们得到 ^{48}Ca 的两中微子双贝塔衰变跃迁矩阵元 $M_{2\nu} = 0.061 \text{ MeV}^{-1}$, 半衰期为 $T_{1/2} = 2.4 \times 10^{19} \text{ yr}$, 与参考文献 [129, 131, 132] 很接近.

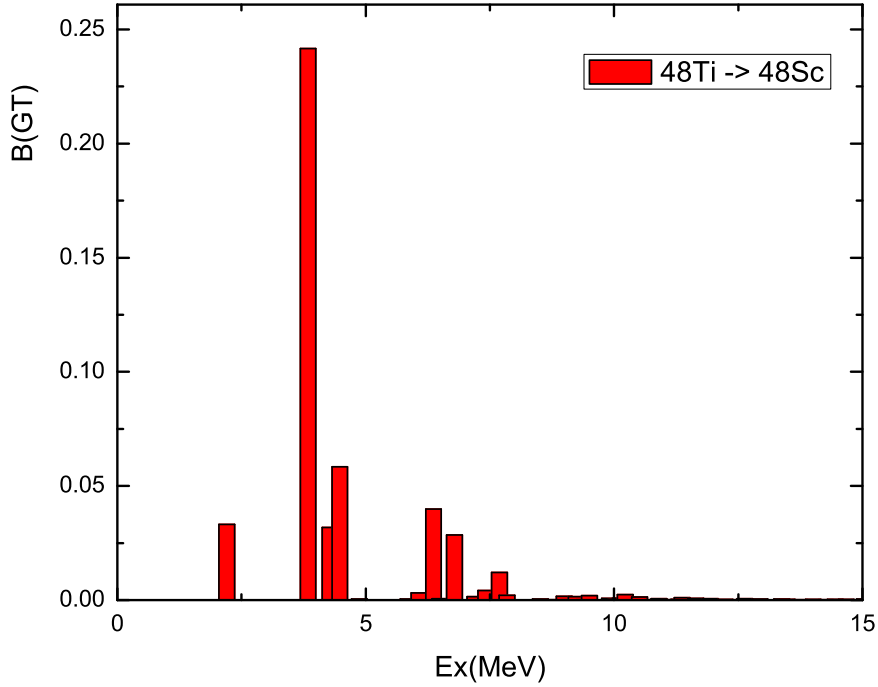


图 4.2 $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$ 的伽莫夫-泰勒跃迁.

Fig 4.2 Gamow-Teller transitions of $^{48}\text{Ti} \rightarrow ^{48}\text{Sc}$. In the framework of the Nucleon Pair Approximation, we consider SD truncation, with the number of D pairs less than 2.

如果没有相位相消, $M_{2\nu}$ 会一直增大, 得到错误的结果, 如图4.4所示.

4.6 单体跃迁的求和规则

根据含时微扰法, 得到费米黄金规则, 即跃迁几率的计算方法. 原子核中的电磁跃迁, 是由于电磁相互作用的微扰, 而伽莫夫-泰勒跃迁, 是由于弱相互作用的微扰. 不失一般性, 这里讨论单体跃迁算符的跃迁强度求和规则. 定义单体跃迁算符

$$F_M^K = \sum_{ab} F_{ab} \hat{K}^{-1} [a^\dagger \times \tilde{b}]_M^K. \quad (4.66)$$

这里时间反演算符 $\tilde{b}_\beta = (-1)^{b+\beta} b_{-\beta}$. $F_{ab} = \langle a || F || b \rangle$. 定义从初态 $|J_i\rangle$ 到末态 $|J_f\rangle$ 的跃迁概率为 $B(F)$, 在实验上, 初态原子核处于某一个 $|J_i M_i\rangle$ 态上, 实验所用的原子核的 M_i 值是一个随机个随机分布, 所以需要对其做平均. 而末态

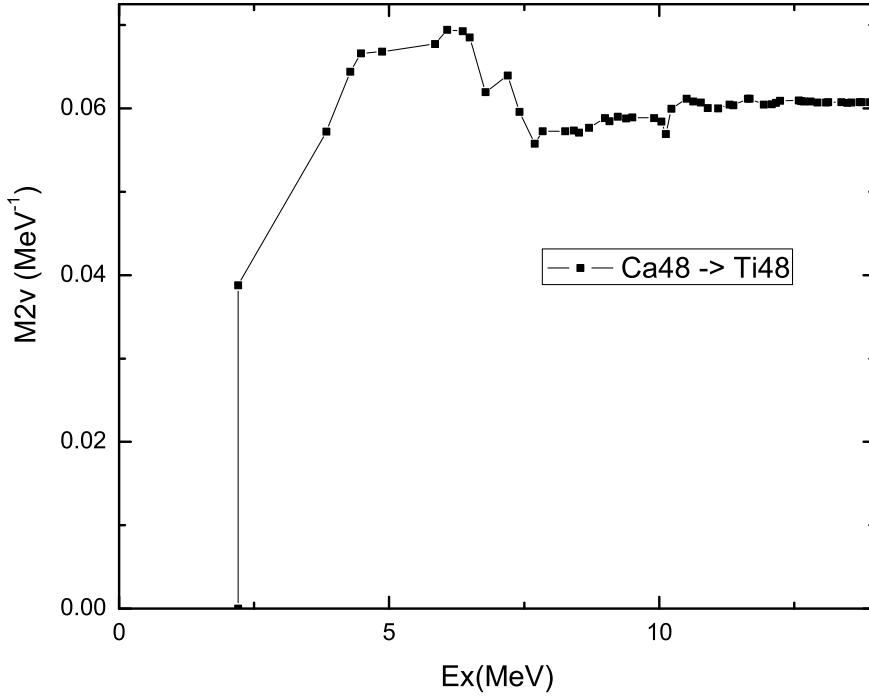


图 4.3 $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ 的两中微子双贝塔衰变跃迁矩阵元.

Fig 4.3 Transition matrix of 2 neutrino double beta decay of $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$. It is seen that, because of phase cancellation, $M_{2\nu}$ increases and then decreases as the running sum goes.

M_f 值可能是每一个可能的值. 所以需要求和 M_f .

$$\begin{aligned} B(F) &= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i M_f M} |\langle J_f M_f | F_M^K | J_i M_i \rangle|^2 \\ &= \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} |\langle J_f || F^K || J_i \rangle|^2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.6.1 跃迁强度求和规则

所以初态 $|J_i\rangle$ 确定的情况下, 在不同末态上的跃迁总强度为

$$S_0(E_i) = \sum_f B(F) = \langle J_i M_i | \sum_M F_M^{K\dagger} F_M^K | J_i M_i \rangle \quad (4.68)$$

所以, 我们需要将 $\sum_M F_M^{K\dagger} F_M^K$ 写作单体+两体算符的通用形式, 即可用任何壳模型程序计算任意初态 $|J_i M_i\rangle$ 的跃迁总强度.

$$\sum_M F_M^{K\dagger} F_M^K = \sum_M (-1)^M F_{-M}^K F_M^K = (-1)^K \hat{K} (F^K F^K)^0, \quad (4.69)$$

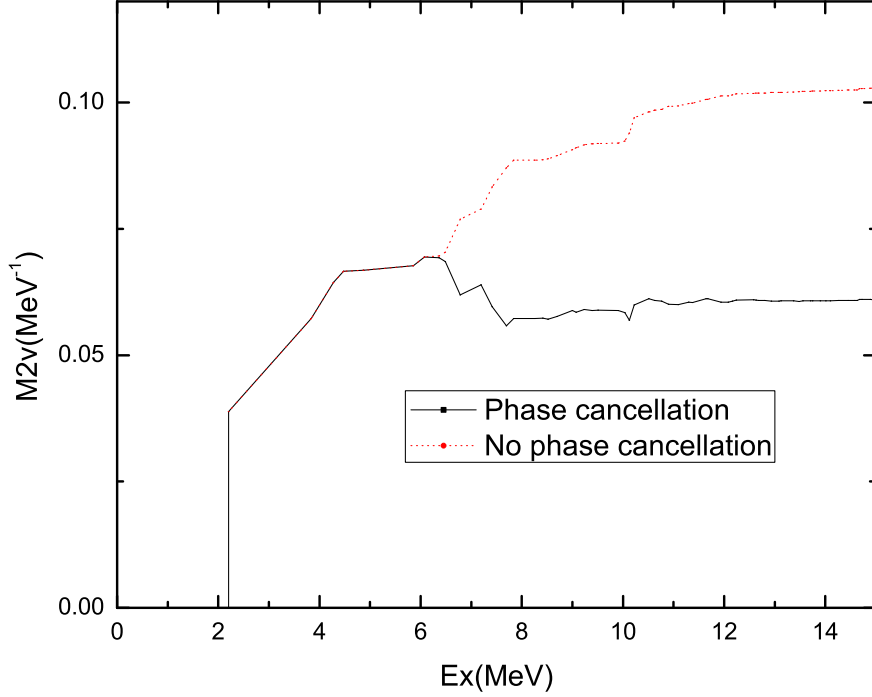


图 4.4 $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ $2\nu\beta\beta$ 跃迁中的相位相消效应.

Fig 4.4 Two neutrino double beta decay transition matrix of $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$. It is seen that, because of phase cancellation, $M_{2\nu}$ increases and then decreases.

由于

$$F_M^K \equiv \hat{K}^{-1} \sum_{ab} F(ab)(a^+ \times \tilde{b})_M^K, \quad (4.70)$$

所以

$$F^\dagger \cdot F = (-1)^K \hat{K}^{-1} \sum_{abcd} F(ab)F(cd)[(a^+ \times \tilde{b})^K \times (c^+ \times \tilde{d})^K]^0.$$

由于 $\tilde{b}_\beta c_\gamma^+ = -c_\gamma^+ \tilde{b}_\beta + (\tilde{b}_\beta, c_\gamma^+)$, 公式分为两部分, 只需分别做角动量重新耦合.

$$\begin{aligned} F^\dagger \cdot F = & -(-1)^K \hat{K}^{-1} \sum_{abcd} F(ab)F(cd) \begin{bmatrix} a & b & K \\ c & d & K \\ L & L & 0 \end{bmatrix} [(a^+ \times c^+)^L \times (\tilde{b} \times \tilde{d})^L]^0 \\ & -(-1)^K \hat{K}^{-1} \sum_{abcd} F(ab)F(cd)(-1)^{c+d-K} \begin{bmatrix} a & b & K \\ d & c & K \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (a^+ \times \tilde{d})^0 \delta_{bc} \hat{b}, \end{aligned}$$

Racah 系数有如下性质

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & K \\ c & d & K \\ L & L & 0 \end{bmatrix} &= (2K+1)(2L+1) \frac{(-1)^{b+K+c+L}}{\hat{K}\hat{L}} \begin{Bmatrix} a & b & K \\ & d & c & L \end{Bmatrix} \\ &= (-1)^{b+c+K+L} \hat{K}\hat{L} \begin{Bmatrix} a & b & K \\ & d & c & L \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b & K \\ d & c & K \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= (2K+1) \frac{(-1)^{b+d+K}}{\hat{K}} \begin{Bmatrix} a & b & K \\ & c & d & 0 \end{Bmatrix} \\ &= (-1)^{b+d+K} \hat{K} \frac{(-1)^{a+b+K}}{\hat{a}\hat{b}} \delta_{ad} \delta_{bc} = \frac{\hat{K} \delta_{ad} \delta_{bc}}{\hat{a}\hat{b}} \end{aligned}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned} F^+ \cdot F &= - \sum_{abcd} (-1)^{b+c+L} \hat{L} F(ab) F(cd) \begin{Bmatrix} a & b & K \\ & d & c & L \end{Bmatrix} [(a^+ \times c^+)^L \times (\tilde{b} \times \tilde{d})^L]^0 \\ &\quad + \sum_{ab} \frac{(-1)^{a+b+1}}{\hat{a}} F(ab) F(ba) (a^+ \times \tilde{a})^0 \\ &= \sum_{abcd} (-1)^{b+c+L} F(ab) F(cd) \begin{Bmatrix} a & b & K \\ & d & c & L \end{Bmatrix} \sum_{\mu} A(ac)_{\mu}^L A(bd)_{\mu}^L \\ &\quad + \sum_{ab} \frac{1}{2a+1} F(ab) F^*(ab) \sum_m (a_m^+ a_m), \end{aligned} \quad (4.72)$$

最后一行用到了 $F^*(ab) = (-1)^{a+b+1} F(ba)$.

4.6.2 能量平均的跃迁求和规则

以末态初态能量差为权重的跃迁强度之和为

$$S_1(E_i) = \sum_f (E_f - E_i) B(F, i \rightarrow f)^2. \quad (4.73)$$

将公式 (4.67) 代入公式 (4.73), 得到

$$S_1 = \langle i, M_i | \frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H, F_M^K]] | i, M_i \rangle \quad (4.74)$$

所以我们需要把 $\frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H, F_M^K]]$ 写成单体+两体相互作用形式, 然后即可对任意初态 $|i, M_i\rangle$ 求得能量平均的跃迁强度之和.

根据公式 (4.22), 我们可以得到一系列有用的对易式. 这些对易式可以用来推导单体算符的跃迁求和规则.

$$[(a^\dagger \times b^\dagger)^I, (e^\dagger \times \tilde{f})^K]^{I'} = (1 + \mathcal{P}_{abI})(-1)^{e-f+K} \delta_{bf} \hat{K} \hat{I} \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} (e^\dagger \times a^\dagger)^{I'} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \{[(a^\dagger \times b^\dagger)^I, (e^\dagger \times \tilde{f})^K]^{I'}, (g^\dagger \times \tilde{h})^K\}^I &= (1 + \mathcal{P}_{abI})(-1)^{e+g-f-h} \delta_{bf} \hat{I} \hat{I}' (2K+1) \\ &\times \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} (1 + \mathcal{P}_{eaI'}) \delta_{ah} \begin{Bmatrix} e & a & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} (g^\dagger \times e^\dagger)^I \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$-[(\tilde{c} \times \tilde{d})^I, (e^\dagger \times \tilde{f})^K]^{I'} = (1 + \mathcal{P}_{cdI}) \delta_{de} \hat{K} \hat{I} \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} (\tilde{f} \times \tilde{c})^{I'}, \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} -\{[(\tilde{c} \times \tilde{d})^I, (e^\dagger \times \tilde{f})^K]^{I'}, (g^\dagger \times \tilde{h})^K\}^I &= -(1 + \mathcal{P}_{cdI}) \delta_{de} (2K+1) \hat{I} \hat{I}' \\ &\times \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} (1 + \mathcal{P}_{cfI'}) \delta_{cg} \begin{Bmatrix} f & c & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} (\tilde{h} \times \tilde{f})^I \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} [(a^\dagger \times \tilde{b})^I, (c^\dagger \times \tilde{d})^K]^{I'} &= (-1)^{a+b+I'} \delta_{bc} \hat{I} \hat{K} \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & d \end{Bmatrix} (a^\dagger \times \tilde{d})^{I'} \\ &- (-1)^{b+c+I+K} \delta_{da} \hat{I} \hat{K} \begin{Bmatrix} a & b & I \\ I' & K & c \end{Bmatrix} (c^\dagger \times \tilde{b})^{I'}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

这里 $\mathcal{P}_{abI} \equiv -(-1)^{j_a+j_b+I} P_{ab}$, P_{ab} 是置换算符, 表示交换 a 和 b .

4.6.2.1 能量跃迁求和规则

要想计算能量平均的跃迁强度之和, 需要计算

$$\frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H, F_M^K]] \quad (4.80)$$

这里 $F_M^K = \sum_{ab} F_{ab} \hat{K}^{-1} (a^\dagger \times \tilde{b})_M^K$. $H = H_1 + H_2$, H_1 表示单体作用算符, H_2 表示两体作用算符, 我们分开计算它们.

4.6.2.2 单体作用算符

$$H_1 = \sum_{ab} q_1(ab)(a^\dagger \times \tilde{b})^0.$$

利用公式 (4.22) 两次, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H_1, F_M^K]] &= \frac{1}{2} \sum_{ad} \frac{1}{(2j_a + 1)} \sum_{bc} \left\{ -\hat{a}^{-1} q_1(ac) F(cb) F^*(db) \right. \\ &+ \hat{b}^{-1} F(ac) q_1(cb) F^*(db) + \hat{c}^{-1} F^*(ca) q_1(cb) F(bd) - \hat{d}^{-1} F^*(ca) F(cb) q_1(bd) \left. \right\} \\ &\times \delta_{j_a j_d} \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

如果在 H_1 中只有单粒子能量, 没有单极项 (monopole parts), 即 $q_1(ab) \equiv \epsilon_a \hat{a} \delta_{ab}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H_1, F_M^K]] &= \frac{1}{2} \sum_{ad} \frac{1}{2j_a + 1} \sum_b (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_d) F(ab) F^*(db) \\ &\times \delta_{j_a j_d} \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

所以, 当计算所用空间中有角动量相同的不同轨道时 (例如 $0s_{1/2}$ 和 $2s_{1/2}$), 结果中会出现单极项.

如果对任意角动量值 j 只有一根轨道, 则有

$$g_a = \frac{1}{(2j_a + 1)} \sum_b F(ab) F^*(ab) (\epsilon_b - \epsilon_a). \quad (4.83)$$

4.6.2.3 两体相互作用

哈密顿量 H 中的两体部分为

$$H_2 = \sum_{abcdI} \frac{\hat{I}V(abcd; I) \sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}}{4} (A^{I\dagger}(ab) \tilde{A}^I(cd))^0, \quad (4.84)$$

这里 $A^{I\dagger}(ab) \equiv (a^\dagger \times b^\dagger)^I$, $\tilde{A}^I(cd) \equiv -(\tilde{c} \times \tilde{d})^I$.

运用公式 (4.22) 和公式 (4.75-4.79), 我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_M (-1)^M [F_{-M}^K, [H_2, F_M^K]] = \sum_{abcdI} -\frac{(-1)^K \hat{I}' V(abcd; I) \sqrt{1 + \delta_{ab}} \sqrt{1 + \delta_{cd}}}{8} \\
& \times \left\{ (-1)^{I'+K+I} [(A^{I\dagger}(ab) \times \tilde{\mathcal{A}}^I(cd))^0 + (\mathcal{A}^{I\dagger}(ab) \times \tilde{A}^I(cd))^0] \right. \\
& \left. + 2(A^{I'\dagger}(ab) \times \tilde{A}^{I'}(cd))^0 \right\}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

这里 $A^{I'\dagger}(ab) \equiv (A^{I\dagger}(ab), F^K)^{I'\dagger}$, $\mathcal{A}^{I\dagger}(ab) \equiv [(A^{I\dagger}(ab), F^K)^{I'}, F^K]^I$, $\tilde{A}^{I'}(cd) \equiv (\tilde{A}(cd), F^K)^{I'}$, $\tilde{\mathcal{A}}^I(cd) \equiv [(\tilde{A}^I(cd), F^K)^{I'}, F^K]^I$.

根据公式 (4.75-4.79), 我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{I\dagger}(ab) & \equiv \{[(A^{I\dagger}(ab), F^K)^{I'}, F^K]^I\} \\
& = \sum_{eg} F^*(be) F^*(ag) \hat{I} \hat{I}' \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & a & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} (g^\dagger \times e^\dagger)^I \\
& + \sum_{eg} F(ea) F(gb) \hat{I} \hat{I}' \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} (e^\dagger \times g^\dagger)^I \\
& + \sum_{eg} F^*(be) F(ge) \hat{I} \hat{I}' \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} (a^\dagger \times g^\dagger)^I \\
& - \sum_{eg} F(ea) F^*(eg) \hat{I} \hat{I}' \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} (g^\dagger \times b^\dagger)^I
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}^I(cd) &\equiv \{[\tilde{A}^I(cd), F^K]^{I'}, F^K\}^I \\
&= -\sum_{fh} F(df)F(ch)\hat{I}\hat{I}' \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & c & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} (\tilde{h} \times \tilde{f})^I \\
&\quad -\sum_{fh} F^*(fc)F^*(hd)\hat{I}\hat{I}' \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & d & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} (\tilde{f} \times \tilde{h})^I \\
&\quad -\sum_{fh} F(df)F^*(hf)(-1)^{I+I'}\hat{I}\hat{I}' \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} (\tilde{c} \times \tilde{h})^I \\
&\quad +\sum_{fh} F^*(fc)F(fh)(-1)^{I+I'}\hat{I}\hat{I}' \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & f & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} (\tilde{h} \times \tilde{d})^I
\end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
A^{I'\dagger}(ab) &\equiv [A^{I\dagger}(ab), F^K]^{I'} \\
&= -\sum_e (-1)^{a+e+I'+K} F^*(be)\hat{I} \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} (a^\dagger \times e^\dagger)^{I'} \\
&\quad -\sum_e (-1)^{a+b+I+K} F^*(ae)\hat{I} \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} (e^\dagger \times b^\dagger)^{I'}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{I'}(cd) &\equiv [\tilde{A}^I(cd), F^K]^{I'} \\
&= -\sum_h (-1)^{c+h+I'} F(dh)\hat{I} \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} (\tilde{c} \times \tilde{h})^{I'} \\
&\quad -\sum_h (-1)^{c+d+I} F(ch)\hat{I} \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} (\tilde{h} \times \tilde{d})^{I'}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

将公式 (4.86-4.89) 代入公式 (4.85), 得到新的相互作用.

$$\begin{aligned}
V_1'(gecd; I) &= -1/2 \sum_{abI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}}{\sqrt{1+\delta_{eg}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(be)F^*(ag) \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & a & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} \quad (4.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2'(egcd; I) &= -1/2 \sum_{abI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}}{\sqrt{1+\delta_{eg}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(ea)F(gb) \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e & b & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} \quad (4.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3'(agcd; I) &= -1/2 \sum_{beI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}}{\sqrt{1+\delta_{ag}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(be)F(ge) \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} \quad (4.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4'(gbcd; I) &= 1/2 \sum_{aeI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}}{\sqrt{1+\delta_{bg}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(ea)F^*(eg) \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ K & I & g \end{Bmatrix} \quad (4.93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5'(abhf; I) &= -1/2 \sum_{cdI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{hf}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(df)F(ch) \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & c & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} \quad (4.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_6'(abfh; I) &= -1/2 \sum_{cdI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{hf}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(fc)F^*(hd) \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f & d & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} \quad (4.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_7'(abch; I) &= -1/2 \sum_{dfI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{ch}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(df)F^*(hf) \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} \quad (4.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_8'(abhd; I) &= 1/2 \sum_{cfI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{dh}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(fc)F(fh) \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & f & I' \\ K & I & h \end{Bmatrix} \quad (4.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_9'(aech; I') &= \sum_{bdI} (-1)^{a+b+c+d} \frac{(2I+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{ea}}\sqrt{1+\delta_{hc}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(eb)F^*(hd) \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} \quad (4.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10}'(ebch; I') &= \sum_{adI} (-1)^{a+b+c+d+I+I'} \frac{(2I+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{eb}}\sqrt{1+\delta_{hc}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(ae)F^*(hd) \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & d & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{11}'(aehd; I') &= \sum_{bcI} (-1)^{a+b+c+d+I+I'} \frac{(2I+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{ea}}\sqrt{1+\delta_{hd}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F(eb)F(ch) \begin{Bmatrix} a & b & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} \quad (4.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{12}'(ebhd; I') &= \sum_{acI} (-1)^{a+b+c+d} \frac{(2I+1)\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}}{\sqrt{1+\delta_{eb}}\sqrt{1+\delta_{hd}}} V(abcd; I) \\
&\quad \times F^*(ae)F(ch) \begin{Bmatrix} b & a & I \\ K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & c & I \\ K & I' & h \end{Bmatrix} \quad (4.101)
\end{aligned}$$

对于中间角动量 I' 应该注意：当 I' 为两个同类核子在同一根轨道的总角动量时， I' 应为偶数。两体相互作用哈密顿量与两个单体跃迁算符的对易子形式为 $[(abcd, ef), gh]$ 。所以这十二个方程代表不同的湮灭模式。例如，

$(a, h) = 0, (b, f) = 0$ 时, 便有 $V_1'(gecd)$. $[(abcd, ef), gh]$ 中的八个费米子算符可以是任何中子、质子算符的混合. 所以, 我们可以把原哈密顿量写作中子-质子模式 $H = H_1 + H_{nn} + H_{pp} + H_{np}$, 即单粒子能、中子中子相互作用、质子质子相互作用、中子质子相互作用, 然后分别计算 H_{nn}, H_{pp}, H_{np} .

4.6.2.4 对称性

为了看出新的两体相互作用 V' 的对称性, 我们整理如下.

$$V_1'(abcd; I) = -1/2 \sum_{efI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ef}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} V(efcd; I) \\ \times F^*(fb)F^*(ea) \begin{Bmatrix} e & f & I \\ & K & I' & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ & K & I & a \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

$$V_2'(abcd; I) = -1/2 \sum_{efI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ef}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} V(efcd; I) \\ \times F(ae)F(bf) \begin{Bmatrix} f & e & I \\ & K & I' & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & f & I' \\ & K & I & b \end{Bmatrix} \quad (4.103)$$

$$V_3'(abcd; I) = -1/2 \sum_{efI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{af}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} V(afcd; I) \\ \times F^*(fe)F(be) \begin{Bmatrix} a & f & I \\ & K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & e & I' \\ & K & I & b \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

$$V_4'(abcd; I) = 1/2 \sum_{efI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{bf}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}} V(fbcd; I) \\ \times F(ef)F^*(ea) \begin{Bmatrix} b & f & I \\ & K & I' & e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ & K & I & a \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

$$V_5'(abcd; I) = -1/2 \sum_{efI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ef}}}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(abef; I) \\ \times F(fd)F(ec) \begin{Bmatrix} e & f & I \\ & K & I' & d \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & e & I' \\ & K & I & c \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}
V'_6(abcd; I) &= -1/2 \sum_{efI'} \frac{(-1)^{I+I'}(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ef}}}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(abef; I) \\
&\quad \times F^*(ce)F^*(df) \begin{Bmatrix} f & e & I \\ K & I' & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & d \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
V'_7(abcd; I) &= -1/2 \sum_{efI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ce}}}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(abce; I) \\
&\quad \times F(ef)F^*(df) \begin{Bmatrix} c & e & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & d \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
V'_8(abcd; I) &= 1/2 \sum_{efI'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ed}}}{\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(abed; I) \\
&\quad \times F^*(fe)F(fc) \begin{Bmatrix} d & e & I \\ K & I' & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & f & I' \\ K & I & c \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
V'_9(abcd; I) &= \sum_{efI} (-1)^{a+b+c+d} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ae}}\sqrt{1+\delta_{cf}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(aecf; I') \\
&\quad \times F^*(eb)F(fd) \begin{Bmatrix} a & e & I' \\ K & I & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & d \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$\begin{aligned}
V'_{10}(abcd; I) &= \sum_{efI'} (-1)^{a+b+c+d+I+I'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{be}}\sqrt{1+\delta_{cf}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(ebcf; I') \\
&\quad \times F(ae)F(fd) \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ K & I & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c & f & I' \\ K & I & d \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
V'_{11}(abcd; I) &= \sum_{efI'} (-1)^{a+b+c+d+I+I'} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{ae}}\sqrt{1+\delta_{fd}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(aefd; I') \\
&\quad \times F^*(eb)F^*(cf) \begin{Bmatrix} a & e & I' \\ K & I & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & f & I' \\ K & I & c \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
V'_{12}(abcd; I) &= \sum_{efI'} (-1)^{a+b+c+d} \frac{(2I'+1)\sqrt{1+\delta_{eb}}\sqrt{1+\delta_{fd}}}{\sqrt{1+\delta_{ab}}\sqrt{1+\delta_{cd}}} V(efbd; I') \\
&\quad \times F(ae)F^*(cf) \begin{Bmatrix} b & e & I' \\ K & I & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & f & I' \\ K & I & c \end{Bmatrix} \quad (4.113)
\end{aligned}$$

从公式 (4.85) 中可以看到, $\mathcal{A}^{I\dagger}$ 与 $\tilde{\mathcal{A}}^I$, $A^{I\dagger}$ 与 \tilde{A}^I 位置对称, 这也可以从最终结果中看到. 把公式 $V(abcd; I) = V(cdab; I)$ 代入公式 (4.102-4.113), 我们有

$$P_{ac}P_{bd}V'_1(abcd; I) = V'_5(abcd; I)^*, \quad (4.114)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_2(abcd; I) = V'_6(abcd; I)^*, \quad (4.115)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_3(abcd; I) = V'_7(abcd; I)^*, \quad (4.116)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_4(abcd; I) = V'_8(abcd; I)^*, \quad (4.117)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_9(abcd; I) = V'_9(abcd; I)^*, \quad (4.118)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_{10}(abcd; I) = V'_{11}(abcd; I)^*, \quad (4.119)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'_{12}(abcd; I) = V'_{12}(abcd; I)^*, \quad (4.120)$$

这里 P_{ac} 是置换算符, 交换 a 和 c .

如果所有算符中只有一种核子 (中子或质子), 就会出现更多的对称性. 把 $\mathcal{P}_{abI}V(abcd; I) = V(bacd; I)$, $\mathcal{P}_{cdI}V(abcd; I) = V(abdc; I)$ ($\mathcal{P}_{cdI} = (-1)^{1+c+d+I}P_{cd}$) 代入公式 (4.102-4.113), 我们有

$$\mathcal{P}_{abI}V'_1(abcd; I) = V'_2(abcd; I), \quad (4.121)$$

$$\mathcal{P}_{abI}V'_3(abcd; I) = V'_4(abcd; I), \quad (4.122)$$

$$\mathcal{P}_{abI}V'_9(abcd; I) = V'_{10}(abcd; I), \quad (4.123)$$

$$\mathcal{P}_{cdI}V'_9(abcd; I) = V'_{11}(abcd; I), \quad (4.124)$$

$$\mathcal{P}_{abI}\mathcal{P}_{cdI}V'_9(abcd; I) = V'_{12}(abcd; I), \quad (4.125)$$

当然还有

$$\mathcal{P}_{cdI}V'_1(abcd; I) = V'_1(abcd; I), \quad (4.126)$$

$$\mathcal{P}_{cdI}V'_3(abcd; I) = V'_4(abcd; I). \quad (4.127)$$

从这些对称性，可以断定，只有一种核子的情况下， $V'(abcd; IT = 1)$ 的对称性自然地保留了：

$$\mathcal{P}_{abI}V'(abcd; I) = V'(abcd; I), \quad (4.128)$$

$$\mathcal{P}_{cdI}V'(abcd; I) = V'(abcd; I), \quad (4.129)$$

$$P_{ac}P_{bd}V'(abcd; I) = V'(abcd; I). \quad (4.130)$$

4.7 小结

我们第一次将配对近似方法应用到原子核伽莫夫-泰勒跃迁的计算. 本章介绍了程序的算法，以及初步的结果. 在 SD 截断下 ($n_D \leq 2$), 我们得到 48Ca 的两中微子双贝塔衰变的半衰期为 $T_{1/2} = 2.4 \times 10^{19}$ yr. 这一结果还需要进一步的验证，我们需要用完整的 SD 截断（没有对 n_D 的限制），不同的相互作用（例如 KB3），不同的 quenching factor 进行计算，才能得到最后的结论.

我推导了单体算符的能量平均求和规则解析公式. 有了这一公式，就能快速预测巨共振的峰位. 这对于壳模型中对星体环境中的大量跃迁强度的计算，具有应用价值，这一工作仍在进行之中.

第五章 总结与展望

我们从原子核质量和电荷半径，随机相互作用，壳模型配对近似三个方面讨论了原子核基态与低激发态的性质。

原子核质量和电荷半径是原子核基态的性质，能很好地反应原子核结构的演化。我们讨论了原子核质量和电荷半径的一系列局域关系式。对于原子核质量，我们指出同类核子的对关联强度受到中子-质子相互作用的影响，这一性质在质量模型的误差中显示出来，通过考虑与质量数的奇偶性相关的修正项，能提高原子核质量模型的精确度。对于原子核电荷半径，我们用简单的局域关系式描述现有实验数据，取得了远高于宏观公式的精确度。这些唯象的研究结果简洁直观，精确度高，为核物理微观计算模型提出挑战，并标示出具有特殊结构的原子核。

随机相互作用是一种研究模型依赖性质的方法。我们讨论了在随机相互作用下， sd 玻色子系统中低激发态能量值之间产生的一系列紧凑的线性关联，这些线性关联与 $U(5)$ 极限的预言高度一致。我们第一次推导了 d 玻色子系统基态自旋概率的严格解析公式。玻色子系统低激发态能级之间的关联还没有得到较好的解释。这一系列研究并没有结束。我们仍然需要更好地理解多体系统基态自旋宇称这一问题。

在壳模型配对近似的框架下，我开发了伽莫夫-泰勒跃迁程序。在重核区，由于空间维数太大，壳模型的计算受到限制。配对近似方法能考虑更多的轨道，尤其是自旋-轨道伴侣 (spin-orbit partners)，所以对于重核区低激发态的伽莫夫-泰勒跃迁具有应用前景。我们在 sd 壳和 pf 壳中的单满壳原子核进行了尝试性的计算，得到了较好的结果。在 sd 壳中，氧同位素的晕转态在截断空间的波函数与全空间的波函数重合高于百分之九十。在 pf 壳中，我们计算了 SD 截断下， ^{48}Ca 的两中微子双贝塔衰变寿命，与实验值接近。这些初步结果表明，配对近似方法能用于伽莫夫-泰勒跃迁的计算，并且对于两中微子双贝塔跃迁具有应用前景。

在下一步的工作中，我们将会系统地考察配对波函数与壳模型波函数的重合度，尤其是高阶的激发态（例如更高的 1^+ 态）。在截断空间下，我们的维数很小，会得到更少的激发态，所以相应地，我们需要考察伽莫夫-泰勒跃迁的 quenching 参数。在特定的核区，对于特定的空间截断，我们需要对 quenching

定标, 即定下统一的参数. 在 quenching 定标的基础上, 我们需要计算配对近似下的贝塔衰变值, 并与实验值进行一系列比照. 这样的工作可以积累计算经验, 并得到对于不同截断空间的好坏的判断.

最终我们会把这套程序应用到 $2\nu\beta\beta, 0\nu\beta\beta$ 的计算中, 尤其是重核区的核素, 例如 ^{136}Xe , ^{130}Te , ^{128}Te 等原子核. 这些原子核都是 50-82 壳中的质子-中子空穴原子核, 要想考虑 $g_{9/2}, h_{9/2}$ 轨道, 需要考虑粒子-空穴激发. 开发配对近似下的粒子-空穴激发矩阵元, 对于配对近似在重核区的应用, 具有非常积极的意义.

附录 A 角动量代数以及本论文所用约定

A.1 角动量重新耦合

三个算符 a, b, c 耦合总角动量 d ，角动量耦合顺序有多种，比如 $|((ab)^e c)^d\rangle$ ，在 e 取遍所有可能值时，构成完备基。在另一种耦合顺序下， $|a(bc)^f)^d\rangle$ 在 f 取遍所有可能值时，也构成完备基。 $|((ab)^e c)^d\rangle$ 和 $|a(bc)^f)^d\rangle$ 的重叠部分(overlap)为

$$U(abdc; ef) = \langle ((ab)^e c)^d | a(bc)^f)^d \rangle = (-1)^{a+b+c+d} \hat{e} \hat{f} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

其中 $\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{Bmatrix}$ 为6j系数， $f = 0$ 时，它等于

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{a+b+e} \frac{1}{\hat{a} \hat{b}} \delta_{ad} \delta_{bc}. \quad (\text{A.2})$$

四个算符 a, b, c, d 耦合总角动量 I ，角动量耦合顺序有多种，比如 $|((ab)^e (cd)^f)^I\rangle$ ，在 e, f 取遍所有可能值时，构成完备基。在另一种耦合顺序下， $|((ac)^g (bd)^h)^I\rangle$ 在 g, h 取遍所有可能值时，也构成完备基。 $|((ab)^e (cd)^f)^I\rangle$ 和 $|((ac)^g (bd)^h)^I\rangle$ 的重叠部分(overlap)为

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & I \end{bmatrix} = \langle ((ab)^e (cd)^f)^I | ((ac)^g (bd)^h)^I \rangle = \hat{e} \hat{f} \hat{g} \hat{h} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & I \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

其中 $\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & I \end{Bmatrix}$ 为9j系数，当 $I = 0$ 时，它等于

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{b+e+c+g}}{\hat{e} \hat{g}} \delta_{ef} \delta_{gh} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & g \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A.2 本论文中所用约定

时间反演算符

定义时间反演算符为

$$\tilde{C}_{a\alpha} = (-1)^{a+\alpha} C_{a-\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

由于 $(-1)^{a-\alpha} = \hat{a} C_{a\alpha, a-\alpha}^{00}$, 我们有

$$\begin{aligned} (c^+, \tilde{a})^{f\phi} &= \sum_{\alpha\gamma} C_{c\gamma, a\alpha}^{f\phi} (c_\gamma^+, (-1)^{a+\alpha} a_{-\alpha}) = \sum_{\alpha\gamma} C_{c\gamma, a\alpha}^{f\phi} (-1)^{a+\alpha} \delta_{\gamma, -\alpha} \delta_{ac} \\ &= \sum_{\alpha} C_{a-\alpha, a\alpha}^{00} (-1)^{a+\alpha} \delta_{ac} \delta_{f0} \delta_{\phi 0} = \hat{a} \delta_{ac} \delta_{f0} \delta_{\phi 0}. \end{aligned}$$

约化矩阵元

我们定义约化矩阵元为

$$\langle A_{M'}^{J'} Q_\tau^t A_M^J \rangle = C_{JM't\tau}^{J'M'} \langle A^{J'} \| Q^t \| A^J \rangle. \quad (\text{A.6})$$

多极算符

在Conden-Shortley 规范下, 多极算符中 $Q_\sigma^t = r^t \sum_i Y_{t\sigma}(\theta_i \phi_i)$,

$$q(abt) = (-1)^{a+b+1} q(bat) \quad (\text{A.7})$$

附录 B $j = 7/2$ 壳中四费米子系统基态自旋

文献 [119, 133]中给出了 $j = 7/2$ 壳四费米子系统各个态的能量。用第三章中介绍的方法，可以得到随机相互作用下，基态自旋的概率。我们用 $P(I)$ 表示基态自旋为 I 时的概率。

$$\begin{aligned}
 P(3/2) &= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 dy \int_{-\infty}^0 dz \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{2445}{4802}x^2 - \frac{473}{441}xy - \frac{41}{27}y^2 + \frac{61}{98}xz + \frac{4}{3}yz - \frac{3}{8}z^2 \right\} \\
 &+ \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{48101}{16562}x^2 - \frac{3245}{819}xy - \frac{41}{27}y^2 + \frac{289}{182}xz + \frac{4}{3}yz - \frac{3}{8}z^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \exp \left\{ -\frac{1807}{7203}x^2 + \frac{5}{147}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
 &\times (1 + \operatorname{erf}(\frac{183x + 392y}{147\sqrt{6}})) \\
 &+ \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \exp \left\{ -\frac{30391}{24843}x^2 - \frac{311}{273}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
 &\times (1 + \operatorname{erf}(\frac{867x + 728y}{273\sqrt{6}}))]. \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(5/2) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \exp \left\{ -\frac{97}{192}x^2 + \frac{7}{12}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
 &\times (1 + \operatorname{erf}(\frac{363x + 184y}{264\sqrt{6}})) \\
 &- \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \exp \left\{ -\frac{30391}{24843}x^2 - \frac{311}{273}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
 &\times (1 + \operatorname{erf}(\frac{9537x + 2093y}{3003\sqrt{6}})), \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(7/2) = & \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{2641}{9408}x^2 - \frac{17}{84}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{1749x + 3640y}{1848\sqrt{6}} \right) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{2641}{9408}x^2 + \frac{17}{84}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{583x + 728y}{616\sqrt{6}} \right) \\
& - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{1807}{7203}x^2 + \frac{5}{147}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{9251x + 10192y}{8624\sqrt{6}} \right) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{1807}{7203}x^2 + \frac{5}{147}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{183x + 392y}{147\sqrt{6}} \right) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{97}{192}x^2 - \frac{7}{12}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{363x + 520y}{264\sqrt{6}} \right) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{97}{192}x^2 + \frac{7}{12}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{363x + 184y}{264\sqrt{6}} \right) \\
& - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{30391}{24843}x^2 - \frac{311}{273}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{9537x + 2093y}{3003\sqrt{6}} \right) \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{30391}{24843}x^2 - \frac{14386}{13923}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
& \times \operatorname{erfc} \left(\frac{867x + 728y}{273\sqrt{6}} \right),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
P(9/2) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{2641}{9408}x^2 + \frac{17}{84}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
&\quad \times (1 + \operatorname{erf}(\frac{583x + 728y}{616\sqrt{6}})) \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{1807}{7203}x^2 - \frac{5}{147}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
&\quad \times (1 + \operatorname{erf}(\frac{671x - 637y}{539\sqrt{6}})),
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$P(11/2) = 0, \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
P(15/2) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{2641}{9408}x^2 - \frac{17}{84}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
&\quad \times (1 + \operatorname{erf}(\frac{1749x + 3640y}{1848\sqrt{6}})) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \exp \left\{ -\frac{97}{192}x^2 - \frac{7}{12}xy - \frac{1}{3}y^2 \right\} \\
&\quad \times (1 + \operatorname{erf}(\frac{363x + 520y}{264\sqrt{6}})).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

这里误差函数 $\operatorname{erf}(x)$ 的定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta, \tag{B.7}$$

余补误差函数 $\operatorname{erfc}(x)$ 的定义为

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\eta^2} d\eta. \tag{B.8}$$

参考文献

- [1] Audi G. and Wapstra A.H., “The 1995 update to the atomic mass evaluation”, Nuclear Physics A, 1995, **595**(4), 409–480.
- [2] Ozawa A., Kobayashi T., Suzuki T., *et al.*, “New magic number, N=16, near the neutron drip line”, Physical Review Letters, 2000, **84**, 5493.
- [3] Sorlin O. and *et al.*, “ $^{68}_{28}\text{Ni}_{40}$: Magicity versus Superfluidity”, Physical Review Letters, 2002, **88**, 092501.
- [4] Oganessian Y.T. and *et al.*, “Synthesis of superheavy nuclei in the $^{48}\text{Ca}+^{244}\text{Pu}$ ”, Physical Review Letters, 1999, **83**, 3154.
- [5] Oganessian Y.T. and *et al.*, “Synthesis of superheavy nuclei in the $^{48}\text{Ca}+^{244}\text{Pu}$ ”, Physical Review Letters, 1999, **83**, 3154.
- [6] Tanihata I. and *et al.*, “Measurements of interaction cross sections and nuclear charge radii in the light p-shell region”, Physical Review Letters, 1985, **55**, 2676.
- [7] Giovinazzo J. and *et al.*, “Two-proton radioactivity of ^{45}Fe ”, Physical Review Letters, 2002, **89**, 102501.
- [8] Michimasa S. and *et al.*, “Measurement of the $^{24}\text{Mg}(p,t)^{22}\text{Mg}$ reaction for the states near the $^{21}\text{Na} + p$ threshold”, European Physics of Journal A, 2002, **14**, 275–278.
- [9] Lunney D., Pearson J.M., and Thibault C., “Recent trends in the determination of nuclear masses”, Review of Modern Physics, 2003, **75**, 1021.
- [10] Mendoza-Temis J., Hirsch J.G., and Zuker A.P., “The anatomy of the simplest Duflo-Zuker mass formula”, Nuclear Physics A, 2010, **843**(14), 1–4.
- [11] Duflo J. and Zuker A.P., “Microscopic mass formulas”, Physical Review C, 1995, **52**, R23.

- [12] Gao Z. and Chen Y.S., “Enhancement of the n-p interaction in odd-odd nuclei”, *Physical Review C*, 1999, **59**, 735.
- [13] Fu G.J., Lei Y., Jiang H., *et al.*, “Description and evaluation of nuclear masses based on residual proton-neutron interactions”, *Physical Review C*, 2011, **84**, 034311.
- [14] Fu G.J., Zhao Y.M., and Arima A., “Quartet structure in atomic nuclei”, *Physical Review C*, 2015, **91**, 054318.
- [15] Cederwall B., Moradi F.G., Bäck T., *et al.*, “Evidence for a spin-aligned neutron-proton paired phase from the level structure of ^{92}Pd ”, *Nature*, 2011, **469**(7328), 68.
- [16] Qi C., Blomqvist J., Bäck T., *et al.*, “Spin-aligned neutron-proton pair mode in atomic nuclei”, *Physical Review C*, 2011, **84**(2), 021301.
- [17] Xu Z., Qi C., Blomqvist J., *et al.*, “Multistep shell model description of spin-aligned neutron-proton pair coupling”, *Nuclear Physics A*, 2012, **877**, 51.
- [18] Fu G.J., Zhao Y.M., and Arima A., “Nucleon-pair approximation of low-lying states for $N = Z$ nuclei”, *Physical Review C*, 2014, **90**, 054333.
- [19] Lu Y., Zhao Y.M., and Arima A., “Simple corrections of nuclear mass models”, *Physical Review C*, 2014, **89**, 017301.
- [20] Heyde K. and Wood J.L., “Shape coexistence in atomic nuclei”, *Review of Modern Physics*, 2011, **83**, 1467.
- [21] Horowitz C.J. and Piekarewicz J., “Neutron star structure and the neutron radius of ^{208}Pb ”, *Physical Review Letters*, 2001, **86**, 5647.
- [22] Garvey G.T. and Kelson I., “New nuclidic mass relationship”, *Physical Review Letters*, 1966, **16**, 197.
- [23] Garvey G.T., Gerace W.J., Jaffe R.L., *et al.*, “Set of nuclear-mass relations and a resultant mass table”, *Review of Modern Physics*, 1969, **41**, S1.

- [24] Wang N. and Li T., “Shell and isospin effects in nuclear charge radii”, *Physical Review C*, 2013, **88**, 011301.
- [25] Angeli I. and Marinova K.P., “Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update”, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 2013, **99**(1), 69–95.
- [26] Sun B.H., Lu Y., Liu C.Y., *et al.*, “New charge radius relations for atomic nuclei”, *Physical Review C*, 2014, **90**, 054318.
- [27] Racah G., “Theory of complex spectra. II”, *Physical Review*, 1942, **62**, 438.
- [28] Racah G., “Theory of complex spectra. III”, *Physical Review*, 1943, **63**, 367.
- [29] Talmi I., *Simple models of complex nuclei*, Harwood, New York, 1993.
- [30] Mayer M.G. and Jensen J.H., *Elementary theory of nuclear shell structure*, John Wiley & Sons, Inc. Chapman & Hall, Ltd., 1955.
- [31] Bohr A., Mottelson B.R., and Pines D., “Possible analogy between the excitation spectra of nuclei and those of the superconducting metallic state”, *Physical Review*, 1958, **110**, 936.
- [32] Fortin M., Grill F., Margueron J., *et al.*, “Thermalization time and specific heat of the neutron stars crust”, *Physical Review C*, 2010, **82**, 065804.
- [33] Johnson C.W., Birtsch G.F., and Dean D.J., “Orderly Spectra from Random Interactions”, *Physical Review Letters*, 1998, **80**, 2749.
- [34] Zelevinsky V. and A. V., “Nuclear structure, random interactions and mesoscopic physics”, *Physical Reports*, 2004, **391**(3-6), 311–352.
- [35] Zhao Y.M., Arima A., and Yoshinaga N., “Regularities of many-body systems interacting by a two-body random ensemble”, *Physical Reports*, 2004, **400**(1), 1–66.

- [36] Weidenmueller H. and Mitchell G.E., “Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure”, *Review of Modern Physics*, 2009, **81**, 539.
- [37] Iachello F. and Arima A., *The interacting boson model*, Cambridge University, Cambridge, UK, 1987.
- [38] Casten R.F. and Warner D.D., “The interacting boson model”, *Review of modern physics*, 1988, **60**(2), 389.
- [39] Bijker R. and Frank A., “Band structure from random interactions”, *Physical Review Letters*, 2000, **84**, 420.
- [40] Bijker R. and Frank A., “Collective states in nuclei and many-body random interactions”, *Physical Review C*, 2000, **62**, 014303.
- [41] Bijker R. and Frank A., “Mean-field analysis of interacting boson models with random interactions”, *Physical Review C*, 2001, **64**, 061303(R).
- [42] Yoshida N., Zhao Y.M., and Arima A., “Proton-neutron interacting boson model under random two-body interactions”, *Physical Review C*, 2009, **80**, 064324.
- [43] Lei Y., Zhao Y.M., Yoshida N., *et al.*, “Correlations of excited states for *sd* bosons in the presence of random interactions”, *Physical Review C*, 2011, **83**, 044302.
- [44] Casten R.F., Zamfir N.V., and Brenner D.S., “Universal anharmonic vibrator description of nuclei and critical nuclear phase transitions”, *Physical Review Letters*, 1993, **71**, 227.
- [45] Zamfir N.V., Casten R.F., and Brenner D.S., “Evolution of precollective nuclei and a tripartite classification of nuclear structure”, *Physical Review Letters*, 1994, **72**, 3480.
- [46] Bijker R., Frank A., and Pittel S., “Transition from the seniority to the anharmonic vibrator regime in nuclei”, *Physical Review C*, 1997, **55**, R585.

- [47] Casten R.F., *Nuclear structure from a simple perspective*, Oxford University Press, 2005.
- [48] Chen J.Q., Chen B.Q., and Klein A., “Factorization of commutators: The wick theorem for coupled operators”, *Nuclear Physics A*, 1993, **554**(1), 61.
- [49] Chen J.Q., “The wick theorem for coupled fermion clusters”, *Nuclear Physics A*, 1993, **562**(2), 218.
- [50] Chen J.Q., “Nucleon-pair shell model: Formalism and special cases”, *Nuclear Physics A*, 1997, **626**(3), 686.
- [51] Zhao Y.M., Yoshinaga N., Yamaji S., *et al.*, “Nucleon-pair approximation of the shell model: Unified formalism for both odd and even systems”, *Physical Review C*, 2000, **62**(1), 014304.
- [52] Zhao Y.M. and Arima A., “Nucleon-pair approximation to the nuclear shell model”, *Physical Reports*, 2014, **545**(1), 1.
- [53] Fu G.J., Lei Y., Zhao Y.M., *et al.*, “Nucleon-pair approximation to the shell model with isospin symmetry”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 044310.
- [54] Fu G.J., Shen J.J., Zhao Y.M., *et al.*, “Spin-aligned isoscalar pair correlation in ^{96}Cd , ^{94}Ag , ^{92}Pd ”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 044312.
- [55] Fu G.J., Zhao Y.M., and Arima A., “Nucleon-pair approximation for low-lying states of even-even $N = Z$ nuclei”, *Physical Review C*, 2015, **91**, 054322.
- [56] Gamow G. and Teller, “Selection Rules for the β -Disintegration”, *Physical Review*, 1936, **49**(12), 895.
- [57] Puppe P. and *et al.*, “High-resolution ($^3\text{He}, t$) reaction on the double- β decaying nucleus ^{136}Xe ”, *Physical Review C*, 2011, **84**, 054305(R).
- [58] Caurier E., Martinez-Pinedo G., Nowacki F., *et al.*, “The shell model as a unified view of nuclear structure”, *Review of Modern Physics*, 2005, **77**, 427.

- [59] Brown B.A. and Wildenthal B.H., “Status of the Nuclear Shell Model”, Annual Review of Nuclear and Particle Science, 1988, **38**, 29–66.
- [60] Suhonen J. and Civitarese O., “Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay”, Physics Reports, 1998, **300**, 123.
- [61] Goriely S., Samyn M., and Pearson J.M., “Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. VII. Simultaneous fits to masses and fission barriers”, Physical Review C, 2007, **75**, 064312.
- [62] Goriely S., Chamel N., and Pearson J.M., “Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov nuclear mass formulas: crossing the 0.6 MeV accuracy threshold with microscopically deduced pairing”, Physical Review Letters, 2009, **102**, 152503.
- [63] Wang N., Liu M., and Wu X., “Modification of nuclear mass formula by considering isospin effects”, Physical Review C, 2010, **81**, 044322.
- [64] Wang N. and Liu M., “Nuclear mass predictions with a radial basis function approach”, Physical Review C, 2011, **84**, 051303.
- [65] Haustein P.E., “An overview of the 1986-1987 atomic mass predictions”, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1988, **39**(2), 185–200.
- [66] Moller P., Nix J.R., Myers W.D., *et al.*, “Nuclear ground-state masses and deformations”, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1995, **59**(2), 185.
- [67] Barea J., Frank A., Hirsch J.G., *et al.*, “Nuclear masses set bounds on quantum chaos”, Physical Review Letters, 2005, **94**, 102501.
- [68] Barea J., Frank A., Hirsch J.G., *et al.*, “Garvey-Kelson relations and the new nuclear mass tables”, Physical Review C, 2008, **77**, 041304.
- [69] Jiang H., Fu G.J., Sun B., *et al.*, “Predictions of unknown masses and their applications”, Physical Review C, 2012, **85**, 054303.
- [70] Blaum K., “High-accuracy mass spectrometry with stored ions”, Physics Reports, 2006, **425**(1), 1–78.

- [71] Niu Z.M., Zhu Z.L., Niu Y.F., *et al.*, “Radial basis function approach in nuclear mass predictions”, *Physical Review C*, 2013, **88**, 024325.
- [72] Lu Y., Zhao Y.M., and Arima A., “Simple correction of nuclear mass models”, *Physical Review C*, 2014, **89**, 017301.
- [73] Wang M., Audi G., Wapstra A.H., *et al.*, “The AME2012 atomic mass evaluation”, *Chinese Physics C*, 2014, **36**(12), 1603–2014.
- [74] Friedman W.A. and Bertsch G.F., “Neutron-proton pairing reexamined”, *Physical Review C*, 2007, **76**, 057301.
- [75] Fu G.J., Shen J.J., and Arima A., “Regularities of proton-neutron interactions for nuclei in the sd shell”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 044309.
- [76] Fricke G. and *et al.*, “Nuclear ground state charge radii from electromagnetic interactions”, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 1995, **60**(2), 177.
- [77] Ozawa A., Suzuki T., and Tanihata I., “Nuclear size and related topics”, *Nuclear Physics A*, 2001, **693**(1-2), 32–62.
- [78] Cheal B. and Flanagan K.T., “Progress in laser spectroscopy at radioactive ion beam facilities”, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2010, **37**(11), 113101.
- [79] Blaum K., Dilling J., and N ortersh auser, “Precision atomic physics techniques for nuclear physics with radioactive beams”, *Physica Scripta*, 2013, **2013**, T152.
- [80] Yamaguchi T., Hachiuma I., Kitagawa A., *et al.*, “Scaling of charge-changing interaction cross sections and point-proton radii of neutron-rich carbon isotopes”, *Physical Review Letters*, 2011, **107**, 032502.
- [81] Ozawa A. and *et al.*, “Charge-changing cross sections of ^{30}Ne , $^{32,33}\text{Na}$ with a proton target”, *Physical Review C*, 2014, **89**, 044602.

- [82] Abrahamyan S. and *et al.*, “Measurement of the neutron radius of ^{208}Pb through parity violation in electron scattering”, *Physical Review Letters*, 2012, **108**, 112502.
- [83] Seliverstov M.D. and *et al.*, “Charge radii of odd-A $^{191-211}\text{Po}$ isotopes”, *Physical Letters B*, 2013, **719**, 362.
- [84] Flanagan K.T. and *et al.*, “Collinear resonance ionization spectroscopy of neutron-deficient francium isotopes”, *Physical Review Letters*, 2013, **111**, 212501.
- [85] Budincevic I. and *et al.*, “Laser spectroscopy of francium isotopes at the borders of the region of reflection symmetry”, *Physical Review C*, 2014, **90**, 014317.
- [86] Cejnar P., Jolie J., and Casten R.F., “Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei”, *Review of Modern Physics*, 2010, **82**, 2155.
- [87] Witte H.D. and *et al.*, “Nuclear charge radii of neutron-deficient lead isotopes beyond $N = 104$ midshell investigated by in-source laser spectroscopy”, *Physical Review Letters*, 2007, **98**, 112502.
- [88] Suda T. and *et al.*, “First demonstration of electron scattering using a novel target developed for short-lived nuclei”, *Physical Review Letters*, 2009, **102**, 102501.
- [89] Antonov A.N. and *et al.*, “The electron-ion scattering experiment ELISe at the International Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR)-A conceptual design study”, *Nuclear instruments and methods in physics research A*, 2011, **637**, 60–76.
- [90] Goriely S., Hilaire S., Girod M., *et al.*, “First Gogny-Hartree-Fock-Bogoliubov Nuclear Mass Model”, *Physical Review Letters*, 2009, **102**, 242501.
- [91] Goriely S., Chamel N., and Pearson J.M., “Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XII. Stiffness and stability of neutron-star matter”, *Physical Review C*, 2010, **82**, 035804.

- [92] Geng L.S., Toki H., Sugimoto S., *et al.*, “Relativistic mean field theory for deformed nuclei with pairing correlations”, *Progress of Theoretical Physics*, 2003, **110**(5), 921–936.
- [93] Zhao P.W., Li Z.P., Yao J.M., *et al.*, “New parametrization for the nuclear covariant energy density functional with a point-coupling interaction”, *Physical Review C*, 2010, **82**, 054319.
- [94] Qian Y., Ren Z., and Ni D., “Tentative probe into the nuclear charge radii of superheavy odd-mass and odd-odd nuclei”, *Physical Review C*, 2014, **89**, 024318.
- [95] Ni D., Ren Z., Dong T., *et al.*, “Nuclear charge radii of heavy and superheavy nuclei from the experimental α -decay energies and half-lives”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 024310.
- [96] Qian Y., Ren Z., and Ni D., “Attempts to probe nuclear charge radii by cluster and proton emissions”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 054323.
- [97] Piekarewicz J., Centelles M., Roca-Maza X., *et al.*, “Garvey-Kelson relations for nuclear charge radii”, *The European Physical Journal A*, 2010, **46**(3), 379–386.
- [98] Sheng Z.Q., Fan G.W., and Qian J.F., “Investigations on the nuclear charge radii”, *Physical Review C*, 2013, **88**, 011301.
- [99] Angeli I. and Marinova K.P., “”, Private Communications, 2014.
- [100] Cakirli R.B., Brenner D.S., Casten R.F., *et al.*, “Proton-Neutron Interactions and the New Atomic Masses”, *Physical Review Letters*, 2005, **94**, 092501.
- [101] Stoitsov M., Cakirli R.B., Casten R.F., *et al.*, “Empirical Proton-Neutron Interactions and Nuclear Density Functional Theory: Global, Regional, and Local Comparisons”, *Physical Review Letters*, 2007, **98**, 132502.
- [102] Chen L. and *et al.*, “Schottky Mass Measurement of the ^{208}Hg Isotope: Implication for the Proton-Neutron Interaction Strength around Doubly Magic ^{208}Pb ”, *Physical Review Letters*, 2009, **102**, 122503.

- [103] Angeli I., Gangrsky Y.P., Marinova K.P., *et al.*, “ N and Z dependence of nuclear charge radii”, *Journal of Physics G*, 2009, **36**, 085102.
- [104] Cakirli R.B., Casten R.F., and Blaum K., “Correlations of experimental isotope shifts with spectroscopic and mass observables”, *Physical Review C*, 2010, **82**, 061306.
- [105] Audi G., Kondev F.G., Wang M., *et al.*, “The Nubase2012 evaluation of nuclear properties”, *Chinese Physics C*, 2012, **36**, 1157.
- [106] Ulm G. and *et al.*, “Isotope shift of ^{182}Hg and an update of nuclear moments and charge radii in the isotope range ^{181}Hg - ^{206}Hg ”, *Zeitschrift f ur Physik A*, 1986, **325**(3), 247.
- [107] Schiffer J.P. and True W.W., “The effective interaction between nucleons deduced from nuclear spectra”, *Review of Modern Physics*, 1976, **48**, 191–217.
- [108] Warburton E.K. and Brown B.A., “Effective interactions for the $0p1s0d$ nuclear shell-model space”, *Physical Review C*, 1992, **46**(3), 923–944.
- [109] Hjorth-Jensen M., T. S. Kuo T., and Osnes E., “Realistic effective interactions for nuclear systems”, *Physical Reports*, 1995, **261**(3-4), 125–270.
- [110] Bijker R., Frank A., and Pittel S., “Dominance of $J^P = 0^+$ ground states in even-even nuclei from random two-body interactions”, *Physical Review C*, 1999, **60**, 021302(R).
- [111] Papenbrock T., Kaplan L., and Bertsch G.F., “Odd-even binding effect from random two-body interactions”, *Physical Review B*, 2002, **65**, 235120.
- [112] Satula W., Dobaczewski J., and Nazarewicz W., “Odd-even staggering of nuclear masses: pairing or shape effect?”, *Physical Review Letters*, 1998, **81**(17), 3599.
- [113] Horoi M., Brown B.A., and V. Z., “Random versus Realistic Interactions for Low-Lying Nuclear Spectra”, *Physical Review Letters*, 2001, **87**(6), 062501.

- [114] Kusnezov D., Zamfir N.V., and Casten R.F., “Robust nuclear observables and constraints on random interactions”, *Physical Review Letters*, 2000, **85**, 1396.
- [115] Johnson C.W. and Nam H.A., “New puzzle for many-body systems with random two-body interactions”, *Physical Review C*, 2007, **75**, 047305.
- [116] Lu Y., Zhao Y.M., Yoshida N., *et al.*, “Correlations between low-lying yrast states for sd bosons with random interactions”, *Physical Review C*, 2014, **90**, 064313.
- [117] Mallmann C.A., “Systems of levels in even-even nuclei”, *Physical Review Letters*, 1959, **2**, 507.
- [118] Fu G.J., Zhao Y.M., Ping J.L., *et al.*, “Excited states of many-body systems in the fermion dynamical symmetry model with random interactions”, *Physical Review C*, 2013, **88**, 037302.
- [119] Zhao Y.M., Arima A., and N. Y., “Many-body systems interacting via a two-body random ensemble. 1. Angular momentum distribution in the ground states”, *Physical Review C*, 2002, **66**, 064322.
- [120] Zhao Y.M., Arima A., and N. Y., “Simple approach to the angular momentum distribution in the ground states of many-body systems”, *Physical Review C*, 2002, **66**, 034302.
- [121] Papenbrock T. and Weidenmuller H.A., “Distribution of spectral widths and preponderance of spin-0 ground states in nuclei”, *Physical Review Letters*, 2004, **93**, 132503.
- [122] Hsu-Tai P.C., Frank A., Smirnova N.A., *et al.*, “Geometry of random interactions”, *Physical Review C*, 2002, **66**, 061302(R).
- [123] Brink D.M., deToledo Piza A.F.R., and Kerman A.K., “Interval rules and intensity ratios in vibrating spherical nuclei”, *Physical Letters*, 1965, **19**, 413.
- [124] Adelberger E.G. and *et al.*, “Solar fusion cross sections”, *Review of Modern Physics*, 1998, **70**(4), 1265.

- [125] Ejiri H., “Nuclear spin isospin responses for low-energy neutrinos”, *Physics Reports*, 2000, **338**, 265–351.
- [126] Scholberg K., “Supernova neutrino detection”, *Journal of Physics: Conference Series*, 2012, **375**, 042036.
- [127] Haxton W.C. and Stephenson G.J., “Double beta decay”, *Progress in Particle & Nuclear Physics*, 1984, **12**(11), 409–479.
- [128] Suhonen J. and Civitarese O., “Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay”, *Physics Reports*, 1998, **300**, 123.
- [129] Caurier E., Poves A., and Zuker A.P., “A full $0\hbar\omega$ description of the $2\nu\beta\beta$ decay of ^{48}Ca ”, *Physics Letters B*, 1990, **252**, 13.
- [130] Horoi M., Stoica S., and Brown B.A., “Shell model calculations of two-neutrino double-beta decay rates of ^{48}Ca with the GXPF1A interaction”, *Physical Review C*, 2007, **75**, 034303.
- [131] Zhao L., Brown B.A., and Richter W.A., “Shell-model calculation for two-neutrino double beta decay of ^{48}Ca ”, *Physical Review C*, 1990, **42**, 1120.
- [132] Horoi M., “Shell model analysis of competing contributions to the double-beta decay of ^{48}Ca ”, *Physical Review C*, 2013, **87**, 014320.
- [133] Lawson R.D., *Theory of the Nuclear Shell Model*, Clarendon Press Oxford, 1980.

简 历

基本情况

路毅，男，湖北仙桃人，1988年10月出生，未婚，上海交通大学物理系在读博士研究生。

联系方式

通讯地址：上海市闵行区东川路800号，上海交通大学物理系

邮编：200240

E-mail: luyi@sjtu.edu.cn

教育状况

2006年9月至2010年7月，上海交通大学，本科，物理学

2010年9月至2012年11月，上海交通大学，硕士，等离子体物理

2012年11月至2016年9月，上海交通大学，博士，原子核物理

研究兴趣

原子核质量、电荷半径局域关系

原子核随机相互作用

原子核配对近似，重核低激发态的弱相互作用过程

致 谢

首先我要感谢我的博士导师赵玉民教授. 令我印象最深的是他勤奋工作、积极进取的纯粹激情, 这种言传身教会令我受益终生. 三年多来, 他对我的生活和学业进行了很多谆谆教导, 为我创造机会出国交流, 对我的论文进行了悉心的指导. 他时刻为学生前途着想, 我在组里得到了各方面的成长, 我感到非常幸运.

其次我要感谢我的硕士导师钟晓霞教授. 她一直鼓励我从事科研, 做有意义的工作. 如果不是她的鼓励, 我可能不会走这条路. 她对我亦师亦友, 而我无以为报.

我还要感谢美国圣地亚哥州立大学的Calvin W. Johnson教授. 我有幸与他共事三个月, 受他很多关照, 向他学了很多东西. 感谢日本关西大学的Nobuaki Yoshida教授, 他为我提供了IBM-1模型的所有数值结果. 感谢Emanuel Ydrefors博士, 他在交大做博士后期间, 我们进行了很多讨论, 我从中受益. 感谢北京航空航天大学孙宝华教授, 我们在原子核电荷半径的问题上进行了较好的合作.

感谢董兵、王先智、顾卫华、沈文忠、孙弘、陈列文、朱卡的、王欣等等老师, 我通过与他们接触, 听他们的课程, 受到他们的启发和教导.

我感谢所有同学和朋友: 姜慧、雷扬、贾力源、鲍曼、闫婷婷、李永胜、付杨、郭刚、孙开佳等等, 尤其是傅冠健、程奕源和黄逊志. 谢谢你们的陪伴和鼓励.

感谢上海宝钢奖学金对我的学业的支持鼓励.

感谢交大校园的樟树们, 它们在风中发出的声音, 是我这十年回忆的底色.

最后, 但是最重要的, 我感谢父母的生养之恩, 感谢我的女朋友张滨郑的温情.

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] **Y. Lu**, Y. M. Zhao, and A. Arima, “Spin I ground state probabilities of integrable systems under random interactions” , Physical Review C 91, 027301 (2015).
- [2] **Y. Lu**, Y. M. Zhao, N. Yoshida, and A. Arima, “Correlations between low-lying yrast states for sd bosons with random interactions” , Physical Review C 90, 064313 (2014).
- [3] **Y. Lu**, Y. M. Zhao, and A. Arima, “Simple correction of nuclear mass models” , Physical Review C 89, 017301 (2014).
- [4] **Y. Lu**, S. F. Xu, X. X. Zhong, K. Ostrikov, U. Cvelbar and D. Mariotti, “Characterization of a DC-driven microplasma between a capillary tube and water surface” , Europhysics Letters 102, 15002 (2013).
- [5] B. H. Sun, **Y. Lu**, J. P. Peng, C. Y. Liu, and Y. M. Zhao, “New charge radius relations for atomic nuclei” , Physical Review C 90, 054318 (2014).
- [6] M. Bao, Z. He, **Y. Lu**, Y. M. Zhao, and A. Arima, “Generalized Garvey-Kelson mass relations” , Physical Review C 88, 064325 (2013).
- [7] X. Z. Huang, X. X. Zhong, **Y. Lu**, Y. S. Li, A. E. Rider, S. A. Furman and K. Ostrikov, “Plasmonic Ag nanoparticles via environment-benigh atmospheric microplasma electrochemistry” , Nanotechnology, 24, 095604 (2013).
- [8] T. T. Yan, X. X. Zhong, A. E. Rider, **Y. Lu**, S. A. Furman and K. Ostrikov, “Microplasma-chemical synthesis and tunable real-time plasmonic responses of alloyed Au(x)Ag(1-x) nanoparticles” , Chemical Communications 50, 3144-3147 (2014).