

申请上海交通大学博士学位论文

重味强子弱衰变及非微扰方法在其中的应用

论文作者: 施瑀基
学 号: 0140729024
导 师: 王 伟
专 业: 粒子物理与核物理
答辩日期: 2019 年 6 月

Submitted in total fulfillment of the requirements for the degree of Doctor
in Theoretical Particle Physics

Heavy Hadron Weak Decays with Non-perturbative Approaches

YUJI SHI

Advisor

Prof. WEI WANG

SCHOOL OF PHYSICS AND ASTRONOMY

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

SHANGHAI, P.R.CHINA

June, 2019

上海交通大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日期：_____年____月____日

上海交通大学 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

保 密 ，在 _____ 年解密后适用本授权书。

不保密 。

(请在以上方框内打 ✓)

学位论文作者签名： _____

指导教师签名： _____

日 期： _____年 ____月 ____日

日 期： _____年 ____月 ____日

重味强子弱衰变及非微扰方法在其中的应用

摘要

在粒子物理中，重味强子弱衰变是精确检验标准模型、理解 CP 破坏乃至寻找新物理的一个理想平台。在不同的重味强子弱衰变中，半轻的树图弱衰变可以被用来精确测量 CKM 矩阵元，而底味强子的味道改变中性流过程则可以用来探寻新物理效应。通过理论和实验上对衰变分支比、衰变末态粒子的角分布、前反对称性、极化或自旋等物理量的计算和测量，人们可以定量地确定实验结果和标准模型预言的偏离程度，并根据这一偏离给出对新物理存在范围的限制。

理论上重味物理研究的核心在于计算强子跃迁矩阵元，由于强子部分涉及低能标度，QCD 的色禁闭效应使得微扰论在强子能标附近不再适用。理论上人们通常采用因子化方法分离衰变振幅中的高能可微扰计算部分和低能非微扰强子部分。一方面目前只有少部分的衰变过程已被证明是可因子化的，另一方面因子化在现阶段的证明只停留在幂次展开的领头阶，对于更高阶的证明目前还难以做到。除了因子化，人们在重味物理的研究中开发出了一些有效的非微扰方法，其中包括了光锥 QCD 求和规则、手征微扰论、味道 SU(3) 对称性分析、光前夸克模型以及格点 QCD。

本论文首先用手征微扰论系统地研究了两介子的标量、矢量和张量形状因子，同时采用么正化的方法将形状因子的适用范围延拓到较高的能量区域。之后结合光锥 QCD 求和规则，本论文研究了一些由 S-波共振态主导的重味介子弱衰变过程，其中分别对粲介子半轻衰变 $D \rightarrow \pi\pi l\bar{\nu}$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-l\nu$ ，以及味道改变中性流引发的半轻过程 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-l^+l^-(\nu\bar{\nu})$ 进行了详细计算和分析。为了分离不同标度的物理，本文采用了光锥 QCD 求和方法计算初态强子跃迁到标量共振态粒子的矩阵元，并用介子标量形状因子描述末态两介子的相互作用。对于半轻衰变 $D \rightarrow \pi\pi l\bar{\nu}$ 本文给出了一个普适的并且包含任意 $\pi\pi$ 分波成分的角分布，也给出了分支比、前反对称性和一些其他的可观测量的计算结果。其中 P-波的贡献由 ρ^0 共振态主导，而 S-波 $f_0(980)$ 的贡献则是通过么正化的手征微扰论进行分析。对于 B_s 的味道改变中性流过程和半轻衰变 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-l\nu$ ，本文利用经过标量形状因子归一化的 S-波 $\pi^+\pi^-$ 光锥分布振幅计算了强子跃迁形状因子。通过比较用么正化的手征微扰论结果与用 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 数据进行拟合得到的标量形状因子，我们发现两者的形状是相似的。在唯象上我们预言了相关衰变道的微分衰变宽度，结果和实验基本符合。我们期望在未来 BES-III, LHCb

和 Super-B 工厂能够提供更多的实验数据来精确地检验我们的结果。

利用味道 SU(3) 对称性和光锥 QCD 求和规则等方法, 本文还分析了双重味重子的弱衰变过程。通过味道 SU(3) 分析, 我们预言了不同双重半轻衰变宽度之间的关系, 并针对双重味重子衰变到反三重态重子 Λ_Q 的过程做了详细的研究。首先我们论证了在重夸克极限下底味和粲味末态重子可以由同一套光锥分布振幅来描述, 然后采用光锥 QCD 求和规则计算了双重味跃迁到单重味重子的形状因子, 数值结果显示形状因子 f_1 和 g_1 在最大反冲时的数值大小相近, 这意味着在双重味重子的衰变过程中可能仍然存在重夸克对称性。另外, 本文对双重半轻过程的衰变宽度和分支比的计算结果和以往文献中给出的是基本一致的。我们期望这些唯象结果可以通过未来的 LHCb 以及其他实验进行验证, 同时也相信光锥 QCD 求和规则对于双重形状因子的研究将有助于检验并且理解重子的光锥分布振幅。

在不久的将来, LHCb, BES-III 以及其他实验组将提供更多更精确的测量结果, 为标准模型的验证、强子谱的研究乃至新物理的寻找指引方向。在理论上人们不仅需要提高计算精度, 更需要发展新的理论方法, 包括新的有效理论或者非微扰方法, 从而进一步理解强子结构以及 QCD 低能动力学机制。因此可以预期重味物理对于人们理解基本粒子及其相互作用仍将起着至关重要的作用。

关键词: 重味强子, 弱衰变, 非微扰 QCD, 求和规则, 手征微扰论, 味道 SU(3) 对称性

HEAVY HADRON WEAK DECAYS WITH NON-PERTURBATIVE APPROACHES

ABSTRACT

In particle physics, weak decays of heavy hadrons provide an ideal platform for precisely testing the Standard Model, understanding the CP asymmetries and searching for new physics. The semileptonic W -emission decay of heavy hadrons can be used to extract the CKM matrix elements: $V_{cb}, V_{ub}, V_{cs}, V_{cd}$, while the flavor-changing-neutral-current induced decays of bottom hadrons are valuable to constrain the new physics. By exploring the decay branching ratios, final state angular distribution, forward–backward asymmetry and spin polarization on both experimental and theoretical side, one can quantify the consistency between experimental results and the standard model predictions, which gives important constraints on new physics effects.

Theoretically, the main difficulty in the study of heavy meson decays is to reliably calculate the hadron transition matrix element. At the hadronic scale, the coupling constant of strong interactions is large which prohibits the use of perturbative expansions in α_s . In some processes factorization scheme might be adopted to separate the short-distance and long-distance degrees of freedom, but until now only a few of decay processes have been proved to be factorizable. In addition, such proof is only conducted at the leading power expansion in $1/Q$ with Q being the hard-scattering energy. In practice, there are a few non-perturbative approaches to handle weak decays of heavy flavored hadrons. These include light-cone QCD sum rules, chiral perturbation theory, flavor SU(3) symmetry analysis, light-front quark model as well as lattice QCD.

In this thesis, we will systematically explore scalar, vector and tensor form factors of two light mesons within the chiral perturbation theory (χ PT). We first calculate these form factors at the one-loop accuracy within χ PT and extend the applicable region up to 1 GeV using the unitarized approach. With these form factors at hand, we study several multi-body decays of heavy mesons including the $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$, $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\nu$ and $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-/\bar{\nu}\nu$. All these decays contain contribution of an mediate S-wave two-light-meson resonant. We calculate the hadronic transition matrix elements using light-cone QCD sum rules, while the

final interaction among the two mesons is described by scalar form factors. We derive a general angular distribution which can be used to extract branching ratios, forward–backward asymmetry and other physical observables. By comparing the scalar form factors derived from unitarized chiral perturbation theory with those fitted by $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ data, we find that the $\pi\pi$ mass distribution from these two approaches are consistent with each other. Predictions on differential decay widths are consistent with the current experimental measurements and could be examined more precisely at BES-III, LHCb and Super-B factory in the future.

Another part of this thesis is devoted to study weak decays of doubly heavy baryons. We use the flavor SU(3) symmetry to simplify the independent decay amplitudes and adopt the light-cone QCD sum rules to calculate the individual form factors. Through the SU(3) analysis, we derive a number of relations between the decay widths for various channels. In the light-cone sum rules calculation, we concentrate on the doubly-heavy baryons decays into $\Lambda_{b,c}$ baryons. We compute the baryon transition form factors, and find that the f_1 and g_1 are at the same order of magnitude. Our predictions of decay widths and branching ratios are consistent with those given in the literatures, and are waiting for examination at future experiments.

Without any doubt, heavy flavor physics will still play an important role in particle physics in the next few decades. We expect in the future the experimental facilities at the LHC, BEPC and Super-B will perform more analyses of weak decays of heavy hadrons. On the theoretical side, it is demanded to simultaneously improve the precision of calculation and develop new effective tools.

KEY WORDS: Heavy hadron, Weak decays, Non-perturbative QCD, Sum rules, Chiral perturbation theory, Flavor SU(3) symmetry

目 录

插图索引	XI
表格索引	XIV
第一章 绪论	1
第二章 重味物理中的非微扰理论方法	7
2.1 QCD 求和规则	7
2.1.1 SVZ 求和规则	7
2.1.2 光锥 QCD 求和规则	12
2.2 手征微扰论	15
2.2.1 有效场论	15
2.2.2 QCD 的手征破缺和强子谱	16
2.2.3 Goldstone 玻色子	18
2.2.4 手征有效拉氏量	20
2.3 味道 SU(3) 对称性	22
2.3.1 强子多重态	22
2.3.2 有效哈密顿量的不可约表示	23
2.3.3 有效哈密顿量的拓扑图表示	25
第三章 用手征微扰论计算低能介子形状因子	29
3.1 手征微扰论及其么正化方法	30
3.1.1 幂次估计和重整化	30
3.1.2 双介子系统的同位旋本征态	32
3.1.3 介子-介子散射振幅	34
3.1.4 么正化方法	35
3.2 介子低能形状因子	37
3.2.1 标量形状因子	37
3.2.2 矢量形状因子	40
3.2.3 张量形状因子	42
3.3 本章总结	45

第四章	多体半轻 $D(D_s), B_s$ 衰变中的手征动力学和 S-波贡献	47
4.1	共振态近似方法计算 $D \rightarrow \pi\pi$ 矩阵元	48
4.1.1	LCSR 框架下的 $D \rightarrow f_0$ 形状因子计算	48
4.1.2	手征动力学对共振态近似的修正	53
4.1.3	$D \rightarrow \rho$ 形状因子	56
4.2	光锥分布振幅方法计算 $B_s \rightarrow \pi\pi$ 矩阵元	57
4.2.1	广义 LCDAs	57
4.2.2	标量 $\pi\pi$ 形状因子的 Breit-Wigner 描述	58
4.2.3	$B_s \rightarrow \pi\pi$ 形状因子	61
4.3	$D(D_s) \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的唯象分析	65
4.3.1	微分和积分衰变宽度	69
4.3.2	θ_{π^+} 角分布	71
4.3.3	θ_l 角分布和前反对称性	73
4.3.4	ϕ 角分布	74
4.4	$B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 半轻衰变唯象分析	76
4.4.1	$B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-$	76
4.4.2	$B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$	78
4.5	本章总结	79
第五章	双重味重子弱衰变的唯象研究	81
5.1	双重味重子弱衰变的 SU(3) 分析	82
5.1.1	粒子多重态的表示	82
5.1.2	双重味重子半轻衰变	84
5.1.3	黄金衰变道分析	88
5.2	用 LCSR 计算双重味重子衰到反三重态重子弱衰变	91
5.2.1	单重味重子的光锥分布振幅	91
5.2.2	$\Xi_{QQ'q} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ 形状因子定义	94
5.2.3	双重味重子衰变的 LCSR 方法	95
5.3	基于 SVZ 求和规则的计算	101
5.4	数值结果与唯象应用	101
5.4.1	形状因子数值结果	101
5.4.2	半轻衰变	106
5.5	本章总结	111

第六章 总结和展望	113
附录 A χ PT 介子-介子散射振幅表达式	115
附录 B χ PT 介子形状因子表达式	119
B.1 标量形状因子	119
B.2 矢量形状因子	120
B.3 张量形状因子	121
附录 C 螺旋度振幅方法	123
C.1 强子部分振幅	123
C.2 轻子部分振幅	124
参考文献	127
致 谢	137
攻读学位期间发表以及完成的学术论文	139

插图索引

1-1	左图展示了标准模型中的基本粒子，其中包括三代夸克和轻子，传递相互作用的规范玻色子以及给予基本粒子质量的希格斯玻色子。右图则展示了基本粒子之间的相互作用顶点，以及力是如何通过交换规范玻色子传递的。	1
1-2	左图展示了质子结构函数 F_2 在固定的 Bjorken 变量 x 处对 Q^2 的依赖性 ^[1] 。右图展示了强相互作用耦合常数随能量的变化关系，可以看出 QCD 具有渐进自由的特性 ^[2] 。	2
1-3	FCNC 过程 $B^0 \rightarrow K^* \phi$ ，其中 \bar{b} 夸克通过 W^+ 玻色子的圈图过程衰变为 \bar{s} 夸克。	3
2-1	在电子-电子散射过程中正反夸克对由一个虚光子产生然后湮灭。	8
2-2	用自由夸克胶子传播子计算两点关联函数。图 (a) 是领头阶贡献，图 (b), (c), (d) 是次领头阶贡献。	9
2-3	QCD 真空中的关联函数，其中黑点表示真空中的背景场。图 (a), (b), (c) 是胶子-胶子凝聚贡献，图 (d) 是夸克凝聚贡献，图 (e) 是夸克-胶子混合凝聚贡献，图 (f) 是四夸克凝聚贡献。	10
2-4	商群 G/H 和 Goldstone 玻色子场构成的空间同构，它们之间存在一个一到一的映射。	19
2-5	“树图”振幅的四种拓扑图，分别表示：颜色允许的“树图”(T)，颜色压低的树图 (C)，湮灭图 (A) 以及 W-交换图 (E)。	26
2-6	$B \rightarrow PP$ 过程需要额外考虑的六个拓扑图，其中交叉号顶点表示 $\bar{u}u$ 的湮灭并产生两个或多个胶子。	27
3-1	所有的 s-道散射振幅的重求和。	36
3-2	弹性散射区域内，形状因子的虚部由在壳的中间态粒子产生。	37
3-3	形状因子树图阶和单圈阶的费曼图。这里并未给出波函数重整化图。	39
4-1	$D \rightarrow \pi\pi\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 衰变的费曼图。其中轻子是电子或者缪子， $\ell = e, \mu$ 。对于不同的 D 介子，观察者夸克可以是 u 或 d 夸克。它们分别对应于 $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 和 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 。	49

4-2	么正化的手征微扰论计算得到的非奇异 $\pi\pi$ 标量形状因子。其中形状因子的模，实部和虚部分别在图中用实线，虚线和点线表示。	56
4-3	χ PT 预言的 $F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2)$ (虚线)，根据 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 数据拟合得到的形状因子 (实线对应于方法 I 而点线对应于方法 II)。两种拟合得到的结果在 1.2 GeV 是无法区分的。	59
4-4	在最大反冲区域 $q^2 = 0$, $\overline{F}_1(q^2 = 0) = \overline{F}_0(q^2 = 0)$ (左) 和 $\overline{F}_T(q^2 = 0)$ (右) 对 Borel 参数的依赖曲线。物理上要求形状因子对于 M^2 的变换足够平缓。	63
4-5	在最大反冲区域 $q^2 = 0$, 左图是 $\overline{F}_{1,0}$ 和 \overline{F}_T 对 Gegenbauer 矩 a_1 的依赖曲线, 虚线和实线分别表示 $\overline{F}_1(q^2 = 0) = \overline{F}_0(q^2 = 0)$ 和 $\overline{F}_T(q^2 = 0)$ 。右图是在 $a_1 = -0.6$ 时形状因子 q^2 的依赖性。实线, 点线和虚线分别表示 $\overline{F}_T(q^2)$, $\overline{F}_1(q^2)$ 和 $\overline{F}_0(q^2)$ 。	63
4-6	$D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 形状因子 $\overline{F}_i(0)$ 关于 M^2 (左) 和 Gegenbauer 矩 a_1 (右) 的依赖曲线。	64
4-7	$D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的运动学表示。 $\pi\pi$ 在 \overline{D} 的静止系中沿着 z 轴运动。 $\theta_\pi(\theta_\ell)$ 定义为 $\pi\pi$ (轻子对) 静止系中 π^+ (ℓ^-) 运动方向与 z 轴的夹角。极角 ϕ 是 $\pi\pi$ 运动平面和轻子对运动平面之间的夹角。	65
4-8	$D^- \rightarrow \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}_e$ 衰变的分支比与 $m_{\pi\pi}$ 的关系曲线。其中重到轻形状因子采用了 LCSR 的计算结果。	70
4-9	$D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ 的微分衰变宽度, 其中图 (a) 中 $\ell = e$ 而图 (b) 中 $\ell = \mu$ 。图 (c) 是公式(4-93)中的 $R_{\pi\pi}^{\mu/e}$ 对 q^2 的依赖曲线。图中虚线和点线分别是采用了 LFQM 和 LCSR 计算出的 $D \rightarrow \rho$ 形状因子而得到的曲线。误差来自于形状因子, 图 (c) 中大部分的误差都被抵消了。	71
4-10	$D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\nu$ 衰变的微分分支比。第一幅图表示 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, 点线和实线分别对应于 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu\nu$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e\nu$ 。第二幅图给出了公式(4-76)定义的 $R^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2)$ 。第三幅图给出了和实验数据 ^[49, 50] 的比较。	72
4-11	本图和图 4-9 类似, 但是描述的是 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 中 S-波的贡献 (图 (a)) 和 P-波纵向极化的贡献 (图 (b)), 以及前反对称性 $\overline{A_{FB}^\pi}$ (图 (c))。注意到对于 $\overline{A_{FB}^\pi}$, 有一个来自于 Watson 定理的不确定的正负号。这些结果都是关于末态为电子的情况, 末态为缪子的结果是类似的。	73
4-12	和图 4-9 类似, 但是这里给出的是 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 的不对称性 $\overline{A_{FB}^\ell}$ 关于 q^2 的变换曲线。	74

- 4-13 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ 过程的归一化的系数关于 ϕ 角的分布, 图 (a, c, e) 表示末态为电子的情况, 而图 (b, d, f) 表示末态为 μ 的情况。 75
- 4-14 微分分支比 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$: 图 (a, b) 属于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 衰变, 图 (c) 属于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ 衰变的。图 (b) 中, 实验数据已根据 (三角形标记) 分支比的中心值做了归一化处理: $\mathcal{B}(B_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-) = (8.6 \pm 1.5 \pm 0.7 \pm 0.7) \times 10^{-8}$ [85], 理论结果用矩形标记表示。 77
- 4-15 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ (实线) 和 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ (虚线) 的微分分支比, 单位是 $10^{-8}/\text{GeV}^2$ 。 78
- 4-16 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$ 微分分支比: 左图是 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, 右图是 $d\mathcal{B}/dq^2$ 。 79
- 5-1 夸克模型预言的重子态: 最顶端的三个粒子由两个粲夸克以及一个轻夸克构成, 其中 $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ 最近已在实验上被发现[96]。 81
- 5-2 含有一个粲夸克和两个轻夸克的粲重子反三重态 (图 (a)) 和六重态 (图 (b))。 83
- 5-3 半轻衰变 Ξ_{cc} 或 Ω_{cc} (左) 和半轻衰变 Ξ_{bb} 或 Ω_{bb} (右) 的费曼图。 85
- 5-4 两体双粲重子衰变费曼图, 这里只展示一种企鹅图。 C, C', B, E 图是被 $1/N_c$ 压低的。 88
- 5-5 QCD 层面的关联函数的费曼图表示。绿色部分表示 $\Lambda_{Q'}$ 重子, 其四速度为 v 。左侧黑点表示 $V-A$, 右侧黑点表示双重味重子流。左侧夸克线表示 $\Lambda_{Q'}$ 中的一个轻夸克, 其动量为 $\bar{u}\omega v$, \bar{u} 是其相对于双轻夸克对的动量分数。 98
- 5-6 第一行: 跃迁形状因子的微扰图贡献, 双线表示重夸克, 普通实线表示轻夸克。第二行: 轻夸克凝聚图, 重夸克没有真空凝聚, 因此只有两条轻夸克传播子和真空相互作用。第三行: 夸克胶子混合凝聚图。 102
- 5-7 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ 形状因子对 q^2 的依赖关系。第一行是 $\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c$ 形状因子, 第二行是 $\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b$, 第三行是 $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c$, 第四行是 $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b$ 。 105
- 5-8 半轻过程 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'}l\nu_l$ 的衰变宽度随 q^2 的变换曲线。蓝带表示 Γ_L , 红带表示 Γ_T 。虚线和点线表示中心值, 带宽则反映了误差的大小。 . . 109

表格索引

2-1	两体 $B \rightarrow PP$ 的衰变振幅，表中只展示了正比于 CKM 因子 $V_{ub}V_{uq}^*$ 的“树图”振幅。正比于 $V_{tb}V_{tq}^*$ 的“企鹅图”振幅可以通过公式 (2-81) 替换得到。	26
3-1	在能标 $\mu = m_\rho$ 处的低能常数 L_i^r (单位是 10^{-3})。	33
3-2	对应于张量外源 ^[38] 的手征拉氏量的低能常数。其中 Λ_2 的单位是 $10^{-3}b_0$ ，而其他量的单位是 $10^{-3}\text{GeV}^{-2}b_0$ ， $b_0 = 1.32\text{GeV}$ 。重整化标度假定为 $\mu = m_\rho$ (具体参见正文中的讨论)。	44
4-1	LCSR 计算得出的 $D \rightarrow f_0$ 形状因子， q^2 依赖由公式(4-28)拟合得到。 .	53
4-2	LFQM (左) ^[69] 和 LCSR (右) ^[70] 计算的 $D \rightarrow \rho$ 形状因子。	57
4-3	$B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 实验数据拟合得到的各部分贡献 ^[77] 。	60
4-4	LCSR 计算的 $B_s/D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 形状因子及拟合参数。	64
5-1	基态双重味重子的量子数：轻夸克 q 对应于 u, d 夸克； J^P 表示重子的总自旋和宇称； S_h^π 表示重夸克系统的自旋。	83
5-2	双重味重子 $\Xi_{cc}(\Xi_{bb})$ 和 $\Omega_{cc}(\Omega_{bb})$ 衰变到单重味重子的 SU(3) 振幅。 . . .	86
5-3	bcq 重子衰变振幅。	87
5-4	Cabibbo 角允许的 ccq 衰变，其典型的分支比在几个百分比的量级。 . .	89
5-5	衰变分支比在 10^{-3} 量级的双底重子衰变。	89
5-6	bcq 重子的衰变模式，其中粲夸克衰变的典型分支比在几个百分比量级，而底夸克衰变的分支比在 10^{-3} 量级。	90
5-7	双重味重子的质量，寿命和衰变常数。	103
5-8	$\Xi_{QQ'}$ 的阈值 s_{th} ，Borel 参数 M^2 和拟合形状因子的 q^2 区间。	104
5-9	双重味重子衰变形状因子： $F(0)$ ， m_{fit} 和 δ 对应于公式 (5-70) 或 (5-71) 中的三个拟合参数。没有打星号的结果由标准的公式 (5-70) 拟合得到，而打星号的结果通过公式 (5-71) 拟合得到。	104
5-10	Ξ_{cc} 衰变形状因子的 LCSR 结果与 QCD 求和规则 (QCDSR) ^[129] ，光前夸克模型 (LFQM) ^[97] ，相对论夸克模型 (NRQM) 和 MIT 袋模型 (MBM) ^[137] 的结果比较。	106

5-11 Ξ_{bb}, Ξ_{bc} 衰变形状因子的 LCSR 结果和文献 QCD 求和规则 (QCDSR) ^[129] , 光前夸克模型 (LFQM) ^[97] 的结果比较。	107
5-12 半轻过程 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu_l$ 的衰变宽度和分支比, 其中 $l = e/\mu$ 。	110
5-13 QCD 求和规则 (QCDSR) ^[129] , 光前夸克模型 (LFQM) ^[97] , 重夸克自旋对称性 (HQSS) ^[139] , 非相对论夸克模型 (NRQM) ^[137] 和 MIT 袋模型 (MBM) ^[137] 计算结果之间的比较。	110

第一章 绪论

粒子物理是一门研究物质基本组分的性质及其相互作用的科学，其主要目标是寻找基本粒子并解释粒子之间的四种基本相互作用：电磁力、弱作用力、强作用力和引力。上世纪五十年代，杨-米尔斯非阿贝尔规范理论的提出为粒子物理标准模型的建立提供了数学基础。人们基于 $SU(2) \times U(1)$ 非阿贝尔规范场提出了电弱统一理论，通过引入希格斯机制解释了基本粒子的质量起源。另一方面，基于 $SU(3)$ 非阿贝尔规范场，人们建立了能够正确描述强相互作用的量子色动力学。目前，粒子物理标准模型能够描述除引力之外的所有相互作用。基本粒子分为构成物质的费米子和传递相互作用的规范玻色子，如图 1-1 所示。物质粒子包含三代夸克和轻子，它们之间通过交换 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 或者 $SU(3)_C$ 规范玻色子发生相互作用。

在过去几十年中，绝大多数的实验结果都显示粒子物理标准模型在目前实验上能达到的能量范围内是正确的。其中粲夸克，底夸克和顶夸克的发现证实了二代和三代夸克的存在； W 、 Z 玻色子的发现则证明了电弱理论是一个 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 的规范

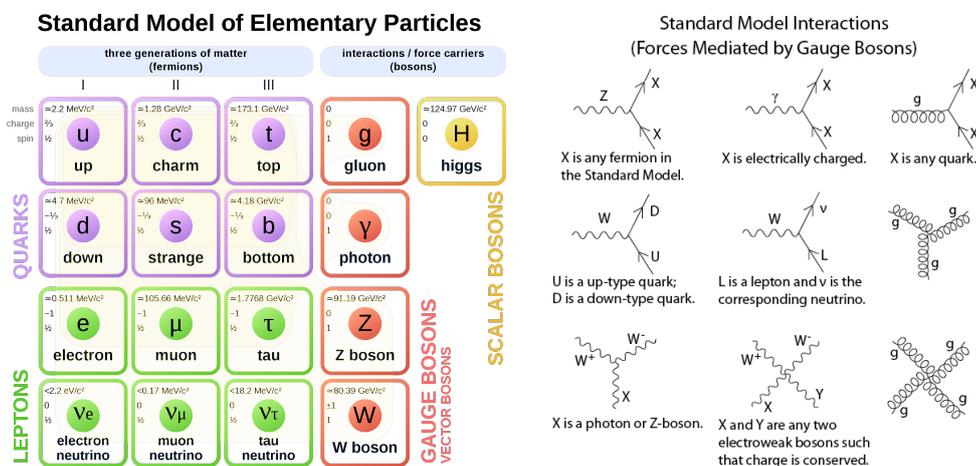


图 1-1 左图展示了标准模型中的基本粒子，其中包括三代夸克和轻子，传递相互作用的规范玻色子以及给予基本粒子质量的希格斯玻色子。右图则展示了基本粒子之间的相互作用顶点，以及力是如何通过交换规范玻色子传递的。

Figure 1-1 The left graph shows all the elementary particle described by the Standard Model. Which contains three generates of quarks and leptons, gauge bosons as well as Higgs. The right graph shows the interaction vertexes between the elementary particles and how the forces are mediated by gauge bosons.

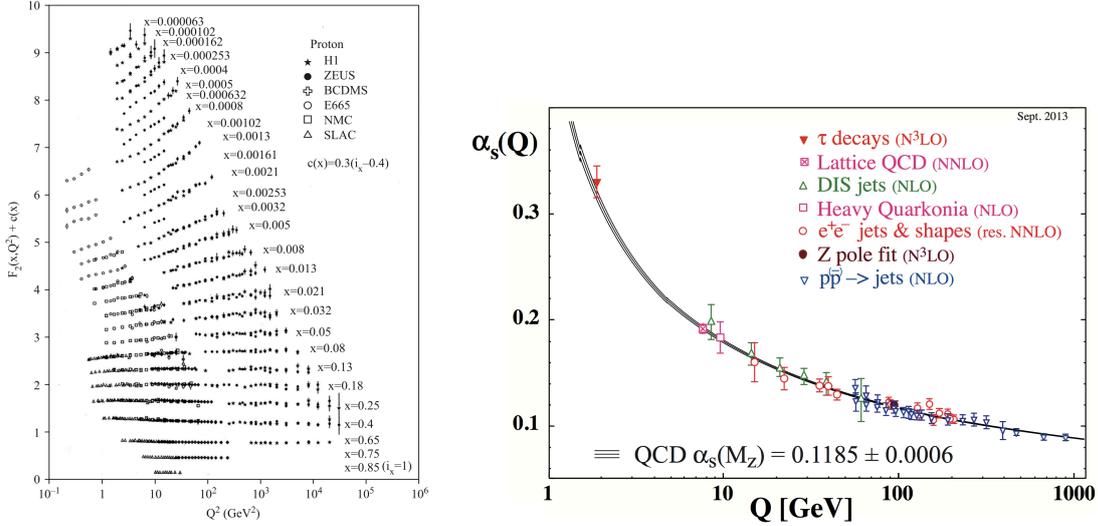


图 1-2 左图展示了质子结构函数 F_2 在固定的 Bjorken 变量 x 处对 Q^2 的依赖性^[1]。右图展示了强相互作用耦合常数随能量的变化关系，可以看出 QCD 具有渐进自由的特性^[2]。

Figure 1-2 Q^2 -dependence of the proton structure function F_2 for various fixed Bjorken variable x (left). Asymptotic freedom of QCD inferred from the energy dependence of the strong coupling^[2] (right).

场理论；在电子-质子的深度非弹性散射实验中，质子结构函数的标度无关性现象则预示了强相互作用的渐进自由特性，如图 1-2 所示^[1, 2]，更重要的是这解释了强相互作用需要用 $SU(3)_C$ 规范场描述的必要性；此外，希格斯粒子的发现更是弥补了标准模型最后的一块拼图。

尽管粒子物理标准模型在近年来取得了巨大的成功，它还远远不是一个完美的理论，仍有许多问题是标准模型所无法解决的。其中包括宇宙中正反物质数目不对称问题、暗物质和暗能量、QCD 的低能结构、Higgs 自能的二次发散、引力的量子化等。其中一些问题只能通过标准模型以外的理论来解决，可惜这些理论到目前为止都没有得到实验的证实。例如 Higgs 自能的二次发散可以通过引入超对称粒子的圈图贡献来消除，但实验上始终没有发现超对称粒子的迹象。弦理论被认为是一种可能的量子引力理论，然而其所在的普朗克能标是现今的实验装置所远远无法企及的，更谈不上能否检验其正确性。

宇宙中正反物质数目不对称现象需要用比较大的电荷宇称 (CP) 破坏来解释。在粒子物理标准模型中，CP 破坏来源于 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵元。CKM 矩阵元包含的弱相位在 CP 变换下会发生改变，同时在衰变过程中也存在 CP 变换下不变的强相位，两者的干涉会造成直接的 CP 破坏。但是，目前无论是标准模型的预言，还是实验上的测量结果，人们所能得到的 CP 破坏程度是非常小的，远远不足以

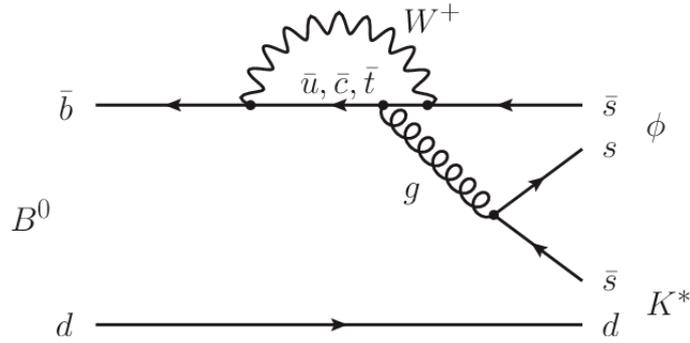


图 1-3 FCNC 过程 $B^0 \rightarrow K^*\phi$ ，其中 \bar{b} 夸克通过 W^+ 玻色子的圈图过程衰变为 \bar{s} 夸克。
Figure 1-3 FCNC process $B^0 \rightarrow K^*\phi$, where \bar{b} quark decays into \bar{s} quark by a W^+ boson loop.

解释宇宙中正反物质数目的不对称性。要弥补这一不足，人们猜测可能存在能产生足够程度 CP 破坏的新物理 (NP) 效应。重味强子弱衰变过程则提供了一个非常理想的用于检验标准模型和寻找新物理的平台。

顶夸克的质量太大且寿命极短，没有足够的时间构成强子态。因此在重味物理中，人们主要研究含有底夸克或者粲夸克的介子或重子的弱衰变过程。在底味强子的弱衰变中， b 夸克可以通过树图过程衰变到 c 夸克或 u 夸克。但是，树图阶的味道改变中性流 (FCNC) 过程是被 Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) 机制禁戒的。因此 b 夸克无法直接衰变到 d 夸克或 s 夸克，而这种过程只能通过圈图发生，也就是企鹅图过程。图 1-3 展示的是标准模型中一个典型的 FCNC 过程： $B^0 \rightarrow K^*\phi$ ，其中 \bar{b} 夸克通过一个 W^+ 玻色子的圈图过程衰变为 \bar{s} 夸克。这一圈图中传播的虚粒子是标准模型中的重粒子，这导致 FCNC 圈图过程的衰变振幅很小。如果存在新物理粒子，它们可能取代 W 玻色子以虚粒子的形式存在于圈图中，从而会显著地改变 FCNC 过程分支比的大小。由此我们可以利用底味强子的 FCNC 过程对新物理效应的高度敏感性来探测新物理的存在。通过理论和实验上对衰变末态粒子的角分布、前反对称性、极化或自旋等物理量的计算和测量，我们可以定量地确定实验结果和标准模型预言的偏离程度，并根据这一偏离给出对新物理存在范围的限制。此外，重味强子的半轻树图弱衰变过程则可以用来精确测量 CKM 矩阵元，比如 V_{ub} 、 V_{cd} ，这对于检验标准模型以及理解 CP 破坏都有非常重要的意义。

强子化的能标在 1 GeV 量级，底味强子质量在 2 - 5 GeV 左右，它们都远远低于 W 、 Z 玻色子的质量，所以为了描述标准模型的低能行为，我们需要将重粒子自由度积分掉从而得到标准模型的低能有效哈密顿量

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{CKM}^i C_i(\mu) \mathcal{O}_i(\mu), \quad (1-1)$$

其中 G_F 是费米常数, V_{CKM}^i 是相应过程的 CKM 矩阵元, Wilson 系数 $C_i(\mu)$ 包含了所有底夸克质量 m_b 之上的量子修正贡献。 $\mathcal{O}_i(\mu)$ 则是标准模型的低能有效算符, 描述了夸克自由度的跃迁过程。实验上我们无法观测到自由的夸克或胶子态, 由于 QCD 的色禁闭效应, 所有的夸克和胶子必定会束缚为各种强子态。色禁闭是 QCD 的低能非微扰的行为, 原则上通过对 QCD 场方程的严格求解我们可以从根本上理解其机制。不幸的是 QCD 场方程的非线性行为使得人们至今无法求得其严格的解。对此, 近些年来人们发展出了许多近似的理论方法来处理重味强子衰变过程中的低能强子部分。

重味强子的半轻衰变在重味物理研究中有着非常重要的意义。在实验上, 半轻衰变过程的信号更为干净, 有助于对末态粒子的重建。而在理论上, 半轻衰变振幅的轻子部分可以明确地计算出来, 所有的 QCD 非微扰效应都被包含在强子跃迁矩阵元中。对于半轻过程, 理论上广泛采用的一种方法是基于因子化的微扰 QCD^[3-11]。因子化的思想在于分离衰变振幅中的高能和低能自由度。高能部分的硬散射可以微扰计算, 低能自由度或者说长程相互作用的贡献则用一些普适的强子光锥分布振幅来描述, 衰变振幅因子化为硬散射核与光锥分布振幅的卷积。例如描述 $B \rightarrow \gamma l \bar{\nu}$ 衰变的形状因子可以表示为如下形式

$$G(q^2) = \phi(x) \otimes H(x, \eta), \quad (1-2)$$

其中 η 表示末态光子沿光锥方向的动量, x 表示 B 介子中轻夸克的动量分数, 符号 \otimes 表示对 x 的卷积, $\phi(x)$ 是 B 介子的光锥分布振幅, $H(x, \eta)$ 是硬散射核。

然而到目前为止能够被证明因子化的过程非常少。因子化的证明通常需要一个很大的能标做微扰展开, 这一展开称为幂次展开 (Power Expansion), 重味物理中展开参数为重夸克质量的倒数 $1/m_Q$ 。在现阶段人们只能证明幂次展开领头阶的因子化, 还难以做到对于更高阶展开的证明。

除了微扰 QCD, 重味物理研究中存在许多非常有效的非微扰方法, 包括 QCD 求和规则、手征微扰论、味道 SU(3) 对称性分析、光前夸克模型以及格点 QCD 等。QCD 求和规则分为早期的 SVZ 求和规则以及后来发展出的光锥 QCD 求和规则 (LCSR), 两者都是基于算符乘积展开将小尺度的量子涨落和长程非微扰效应分离开来, 它们区别在于 QCD 求和规则采用了定域的 OPE 并用真空凝聚参量作为非微扰输入, 而光锥求和规则是在光锥面上对算符乘积做非定域的部分展开, 并且用光锥分布振幅作为非微扰输入。光锥求和规则应用于重味物理的一大优势在于它能够描述小反冲情形下的强子跃迁行为, 需要指出的是在粲强子中 LCSR 适用的相空间较小。手征微扰论是 QCD 的低能有效理论, 它的计算框架和有效理论的框架相同, 需要通过幂次估计, 为了达到某一精度做有限阶的微扰计算并逐阶重整化。然而它是以强子为自由度的理论, 描述的是 QCD 的低能动力学行为。因此从这一角度来看, 手征微扰论是一种有效的非

微扰方法。味道 $SU(3)$ 对称性分析是一种十分强大的唯象分析强子弱衰变的手段。虽然它无法给出具体的动力学信息，但是我们可以利用 u, d, s 夸克的 $SU(3)$ 味道对称性得到大量关于不同衰变道振幅的信息。

本论文的主要目的是应用上述三种非微扰方法研究重味强子的弱衰变过程。在第二章中，我们将分别介绍三种在重味物理中常用的非微扰方法：求和规则，手征微扰论和味道 $SU(3)$ 对称性分析。第三章将系统地用手征微扰论计算两介子的标量，矢量和张量形状因子。在第四章中，我们将研究几种重味介子的弱衰变过程并讨论 S -波共振态在其中的贡献：采用光锥求和规则计算强子跃迁矩阵元，并采用在第三章中得到的介子标量形状因子描述末态介子的低能相互作用。第五章将用味道 $SU(3)$ 对称性分析双重味重子的三体和多体半轻衰变过程，之后用光锥求和规则计算双重味到反三重态重子的形状因子，并简要介绍 SVZ 求和规则对相同形状因子的计算，然后比较两种方法得出的结果，最后讨论唯象的应用。

第二章 重味物理中的非微扰理论方法

2.1 QCD 求和规则

QCD 求和规则最早是由 Shifman, Vainshtein 和 Zakharov (SVZ) 建立起来的一种能够广泛应用于强子物理唯像的非微扰方法, 也称为 SVZ 求和规则^[12]。之后人们在其基础上发展出了另一种求和规则方法, 称为光锥 QCD 求和规则 (LCSR)。QCD 求和规则最大的特点在于它是从 QCD 基本理论出发, 基于标准量子场论的一种理论方法, 而且它是模型无关的。按照 QCD 求和规则的思想, 强子可以用带有相同量子数的夸克流算符表征, 而强子参与的物理过程则用夸克流算符构成的关联函数描述。从 QCD 的拉氏量出发, 通过人为选取类空的大动量转移区域, 这一关联函数可以采用算符乘积展开 (OPE) 进行计算。根据 OPE 方法, 我们可以将关联函数中的短程和长程夸克胶子相互作用分离开来。短程部分可以用微扰 QCD 的方法进行计算, 而长程部分则参数化为一些普适的真空凝聚或者光锥分布振幅。在表示为色散关系积分的形式下, 关联函数的计算结果和在强子层面被求和的强子态贡献相匹配, 最终我们能够抽取出和强子相关的物理可观测量。

当然, QCD 求和规则的精度是有局限性的。这种局限性来自于两个方面: 一方面是在于采用 OPE 计算关联函数时, 我们只能保留有限的高量纲算符的贡献, 虽然理论上高量纲算符的贡献是被压低的, 但是这种展开的截断仍然会导致一定程度上的误差。另一方面在于强子部分的连续谱积分中所包含的许多未知且极其复杂的强子结构贡献, 这些结构只能通过夸克强子对偶来近似地处理。由于这两方面的原因, 在用求和规则做计算时我们必须极其小心地处理各种不确定性所产生的误差。这一节将介绍 QCD 求和规则的基本思想, 具体参考文献 [13]。

2.1.1 SVZ 求和规则

描述强子内部结构以及其衰变过程的理论是量子色动力学 (QCD), 在不考虑 θ 项时, QCD 拉氏量具有如下简单的形式

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_q \bar{\psi}_q (i \not{D} - m_q) \psi_q, \quad (2-1)$$

其中 $G_{\mu\nu}^a$ 是胶子场强张量, ψ_q 是带有不同味道的夸克场: $q = u, d, s, c, \dots$ 。虽然原则上 QCD 的拉氏量决定了所有强子的性质及强子过程, 但在实际上我们仅能使用公式 2-1 导出费曼规则做微扰计算。QCD 的渐进自由性质和色禁闭效应迫使我们只能在

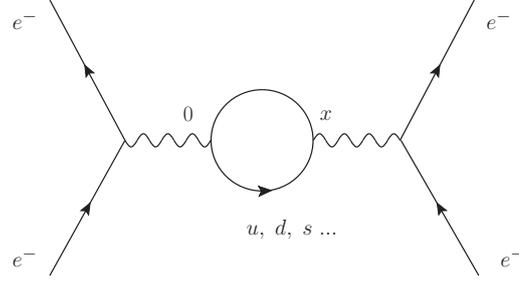


图 2-1 在电子-电子散射过程中正反夸克对由一个虚光子产生然后湮灭。

 Figure 2-1 Quark-antiquark creation and annihilation by the virtual photon in the e^-e^- scattering.

高能区域做微扰计算，而对于处于低能区域的强子态则无能为力。在任一强子过程中，至少存在一些高度离壳的夸克或胶子，这一部分的强耦合常数 $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ 足够小从而微扰论可以适用。一般来说要产生高度离壳的效应要求强子在散射过程中有极大动量的转移。尽管如此，即使对于这样的硬散射过程，只做微扰计算也是不够的，这是因为强子中的夸克胶子仍然是低能的，当然不是微扰方法能够处理的。因此，我们必须将微扰 QCD 计算部分和描述强子的波函数结合起来。

要得到强子中夸克分布的波函数，我们需要知道 QCD 在强子尺度下的长程动力学行为。为了避免夸克禁闭这一困难，我们可以考虑一种不包含初态和末态强子的过程，同时让所有夸克传播子远远离壳。例如图 2-1 所示的 $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (时间轴向上) t 道散射过程，其中正反夸克对由虚光子在非常短的距离内产生然后湮灭。正反夸克对的产生湮灭过程可以用一个关联函数描述

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi(q^2), \quad (2-2)$$

其中 q 是虚光子的四动量，并且满足 $q^2 < 0$ 。振幅 $\Pi_{\mu\nu}$ 表示一个两点夸克流算符关联函数。由于转移动量的平方很大 $Q^2 \equiv -q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ ，这一关联函数实际上描述的是四维时空中极其短的时空关联性，关于这一点下面将简要阐明其原因。注意到 Π_μ^μ 是一个洛伦兹不变量，它必定可以表示为

$$\langle 0 | T \{ j_\mu(x) j^\mu(0) \} | 0 \rangle = \int d\tau e^{i\tau x^2} f(\tau), \quad (2-3)$$

这里已经把关联函数表示为了傅里叶积分的形式。对公式 (2-2) 中的积分变量 x 做平移，我们就能得到

$$3q^2 \Pi(q^2) = -i \int d\tau \int d^4x e^{i\tau x^2} e^{iQ^2/4\tau} f(\tau). \quad (2-4)$$

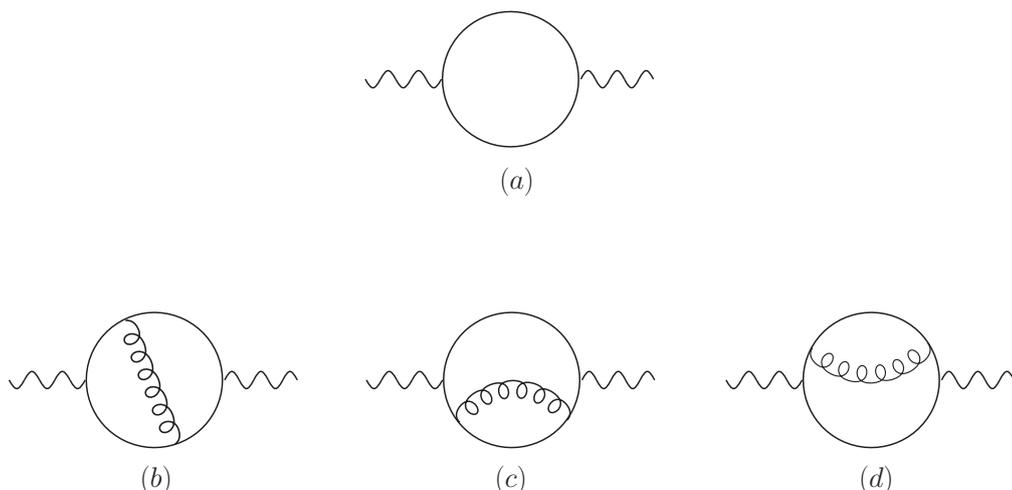


图 2-2 用自由夸克胶子传播子计算两点关联函数。图 (a) 是领头阶贡献，图 (b), (c), (d) 是次领头阶贡献。

Figure 2-2 Two-point correlation function calculated by free quark and gluon propagators. diagram (a) is the leading order contribution, while diagrams (b), (c), (d) are next-to-leading order contribution.

从上式的等号右边可以看出，为了避免 e 指数高度震荡导致的压低，指数上的因子必须在数值 1 附近，也就是 $\tau \sim 1/x^2$ 和 $\tau \sim Q^2$ 两者需要同时满足。因此必须要求 $x^2 \sim 1/Q^2$ 。当 $Q^2 \rightarrow \infty$ 时， $x^2 \rightarrow 0$ 表明关联函数描述处于光锥面上两点的关联性。要判断 x 的每个坐标分量是否也被压低，我们可以选取适当的坐标系使得 $q_0 = 0$, $\vec{q}^2 = Q^2$ 。这样关联函数 (2-2) 中的 e 指数等于 $\exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x})$ ，同样为了避免高度震荡的产生，必须要求 $|\vec{x}| \sim 1/\sqrt{Q^2}$ 。最终可以得到

$$|\vec{x}| \sim x_0 \sim 1/\sqrt{Q^2} \ll R_{hadron}. \quad (2-5)$$

其中 R_{hadron} 是强子的特征尺度。因此，在 $Q^2 \rightarrow \infty$ 时，图 2-1 中的正反夸克对实际上在非常小的时空区域内被产生然后湮灭。根据 QCD 的渐进自由性质，这时夸克胶子的相互作用是微扰的，从而在一阶近似下我们能够用自由的夸克胶子传播子计算关联函数，如图 5-6 所示。图 (a) 是领头阶贡献，图 (b), (c), (d) 是次领头阶贡献。

仅仅计算关联函数的微扰部分是不够的，我们还需要考虑软胶子和软夸克与 QCD 真空中相互作用的效应。QCD 的真空结构本身是十分复杂的，夸克胶子背景场具有复杂的涨落行为。这种复杂性来源于 QCD 拉氏量的非线性行为，目前人们还无法真正解析地求解 QCD 运动方程并理解其真空结构的完整图像。一些非微扰的方法诸如瞬子模型，格点 QCD 等都预言了真空场的涨落尺度在 $\Lambda_{vac} \sim \Lambda_{QCD}$ 左右。因此如果正反夸克对在某个时空点被流算符产生然后在另一时空点被流算符湮灭，那么在之间

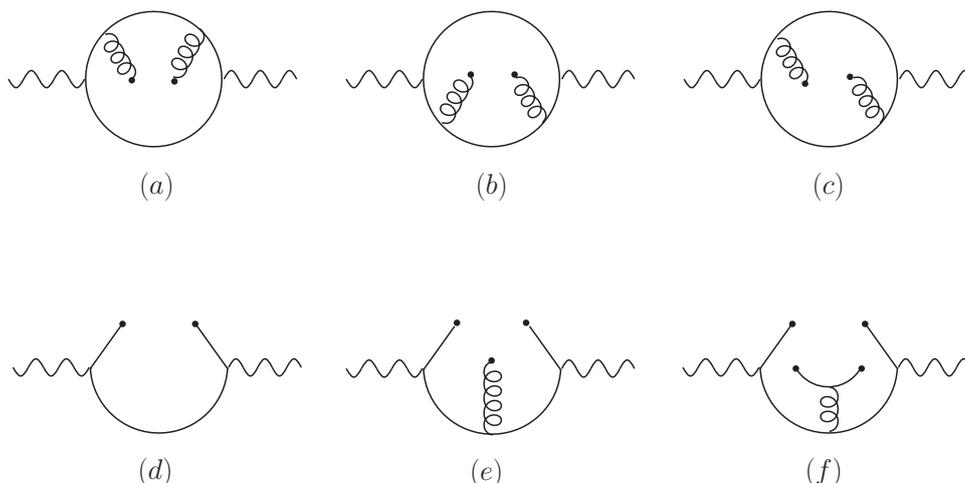


图 2-3 QCD 真空中的关联函数，其中黑点表示真空中的背景场。图 (a), (b), (c) 是胶子-胶子凝聚贡献，图 (d) 是夸克凝聚贡献，图 (e) 是夸克-胶子混合凝聚贡献，图 (f) 是四夸克凝聚贡献。

Figure 2-3 The correlation function in the QCD vacuum. The black dots denote background fields. Diagrams (a), (b), (c) are gluon-gluon condensates, diagram (d) is quark condensate, diagram (e) is quark-gluon condensate, and diagram (f) is four-quark condensate.

的过程中它们肯定会和真空场发生相互作用，而这种行为是微扰方法无法刻画的。

事实上在一些特定条件下对真空场的效应我们可以做近似处理。当 $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ 时，正反夸克对的产生点和湮灭点之间距离远远小于 QCD 真空的特征尺度，此时我们可以忽略背景场的涨落行为，并把背景场当做静态的场处理。同时在非常短的时间内正反夸克对对真空的扰动也可以忽略。通过这些近似，在 QCD 真空当中，关联函数的物理图像如图 2-3 所示，其中具有大动量 $\sim \sqrt{Q^2}$ 的夸克和静态的真空胶子或夸克场不断地发生散射，用数学来描述就是存在一系列的非定域算符，它们的真空期待值不为零，黑点表示真空中的背景场。图 (a), (b), (c) 是胶子-胶子凝聚贡献，图 (d) 是夸克凝聚贡献，图 (e) 是夸克-胶子混合凝聚贡献，图 (f) 是四夸克凝聚贡献。算符乘积展开 (OPE) 的方法可以处理这种背景场效应：

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} T \{ \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x), \bar{\psi}(0) \gamma_\nu \psi(0) \} = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \sum_d C_d(q^2) O_d,$$

$$\Pi(q^2) = \sum_d C_d(q^2) \langle 0 | O_d | 0 \rangle. \quad (2-6)$$

这里关联函数被展开为一系列定域算符矩阵元的求和，其中 O_d 表示量纲为 d 的定域算符，其真空期待值不为零，称作真空凝聚。真空凝聚作为 QCDSR 中的非微扰输入量，代表了强子跃迁过程中的非微扰效应。真空凝聚的数值大小原则上可以用格点

QCD 计算出来。关联函数 (2-2) 关于凝聚项的展开形式为

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = & -\frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) \ln \frac{-q^2}{4m^2} + \frac{2m\langle\bar{\psi}\psi\rangle}{q^4} + \frac{\alpha_s\langle G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}\rangle}{12\pi q^4} \\ & + \frac{m^3}{3q^8} \langle g_s \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^a}{2} G^{a\mu\nu} \psi \rangle + \frac{2\pi\alpha_s}{q^6} \left[\langle (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi) (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi) \rangle \right. \\ & \left. + \frac{2}{9} \langle (\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi) (\bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2-7)$$

另一方面，我们需要在强子层面处理关联函数。 $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$ 是关于 q^2 的解析函数，当 q^2 从很大的负值变为正值时，时空点 0 和 x 之间的距离增大，长程的夸克胶子相互作用变得更为重要，最终使得正反夸克对构成强子。为了严格处理强子层面的贡献，我们可以利用色散关系。关联函数在复平面上的虚部对应于强子态的贡献，其表示为

$$2\text{Im} \Pi_{\mu\nu}(q) = \sum_n \langle 0 | j_\mu | n \rangle \langle n | j_\nu | 0 \rangle d\tau_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_n), \quad (2-8)$$

这里已对所有可能的强子态求和。如果只考虑基态贡献，激发态归到连续谱里 $\rho^h(q^2)$ 里，并利用强子衰变常数的定义 $\langle V(q) | j_\mu | 0 \rangle = f_V m_V \epsilon_\mu^{(V)*}$ ，我们可以得到

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi(q^2) = f_V^2 \delta(q^2 - m_V^2) + \rho^h(q^2) \theta(q^2 - s_0^h). \quad (2-9)$$

表示成色散积分，结果为

$$\Pi(q^2) = \frac{q^2 f_V^2}{m_V^2(m_V^2 - q^2)} + q^2 \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{(s - q^2)}. \quad (2-10)$$

然而连续谱 $\rho^h(q^2)$ 的贡献是不清楚的，这一不确定性会引起非常大的误差。为了提高收敛性，我们对关联函数 (2-10) 做 Borel 变换

$$\Pi(M^2) = f_V^2 e^{-m_V^2/M^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \rho^h(s) e^{-s/M^2}. \quad (2-11)$$

其中 Borel 变换定义为

$$\Pi(M^2) \equiv \mathcal{B}_{M^2} \Pi(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n \rightarrow \infty \\ -q^2/n = M^2}} \frac{(-q^2)^{(n+1)}}{n!} \left(\frac{d}{dq^2} \right)^n \Pi(q^2). \quad (2-12)$$

相应地我们也需要把 OPE 计算得到的关联函数 (2-7) 写成色散积分的形式，然后利用全局的夸克强子对偶，将 2-11 中连续谱的积分等同于 (2-7) 中微扰部分的贡献

$$\int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{(s - q^2)} \simeq \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \Pi^{(pert)}(s)}{(s - q^2)}, \quad (2-13)$$

最终我们能够抽取出强子的衰变常数

$$f_\rho^2 = M^2 e^{m_\rho^2/M^2} \left[\frac{1}{4\pi^2} \left(1 - e^{-s_0^2/M^2} \right) \left(1 + \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \right) + \frac{(m_u + m_d) \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{M^4} + \frac{1}{12} \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle}{M^4} - \frac{112\pi \alpha_s \langle \bar{\psi} \psi \rangle^2}{81 M^6} \right], \quad (2-14)$$

2.1.2 光锥 QCD 求和规则

光锥 QCD 求和规则 (LCSR) 是在 QCDSR 的基础上发展出来的, 其计算方法与 QCDSR 有非常大的相似性。二者都是先根据特定的物理过程定义一个关联函数, 然后分别在强子层面和夸克层面计算此关联函数并分别做 Borel 变换, 最后运用夸克强子对偶将两者等同起来从而抽取仅与强子相关的非微扰物理量。LCSR 和 QCDSR 最大的区别在于后者在夸克胶子层面上是用定域的算符乘积展开处理的, 而在 LCSR 的框架中我们需要将算符乘积在光锥附近展开。换句话说, 我们只对其中部分的定域算符进行了求和, 这种处理方式的一个显著优点在于它避免了在三点求和规则中可能存在的截断的不可正规性。

下面我们将利用一个简单的物理过程 $\gamma^* \rho \rightarrow \pi^0$ 来介绍 LCSR 的思想。这里我们只着重阐述在夸克胶子层面上, LCSR 对于算符乘积的处理与 QCDSR 的不同之处。在 LCSR 中定义的关联函数是在真空态和一个在壳态之间插入算符乘积。能够描述 $\gamma^* \rho \rightarrow \pi^0$ 过程的 LCSR 关联函数为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p, q) &= i \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \pi^0(p) | T \{ j_\mu^{em}(x) j_\nu^{em}(0) \} | 0 \rangle \\ &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha q^\beta F(Q^2, (p-q)^2), \end{aligned} \quad (2-15)$$

其中 q 和 $p-q$ 是光子的动量, $Q^2 = -q^2 > 0$, j_μ^{em} 是夸克电磁流, F 是描述这一动力学过程的振幅, 它是洛伦兹不变量并且依赖于 Q^2 和 $(p-q)^2$ 。这里同样要求外线光子的动量是远远离壳的, 也就是 $Q^2, |(p-q)^2| \gg 1$ 都取很大的值。接下来需要分析关联函数 (2-15) 中时空间隔的大小。定义一个洛伦兹不变量 $\nu = q \cdot p = (q^2 - (p-q)^2)/2$, 其大小和 Q^2 在一个量级

$$|\nu| \sim |(p-q)^2| \sim Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2. \quad (2-16)$$

因此可以定义一个有限的比值 $\xi = 2\nu/Q^2$, 满足 $\xi \sim 1$ 。此外可以选取一个参考系使得三动量 \vec{p} 很小 $|\vec{p}| \sim \mu$, $|p_0| \sim \mu$ 且 $\mu^2 \ll Q^2, \nu$ 。在这个坐标系中, 有 $q_0 \sim Q^2 \xi / (4\mu) + O(\mu)$, 并且

$$q \cdot x = q_0 x_0 - q_3 x_3 \simeq \frac{Q^2 \xi}{4\mu} x_0 - x_3 \sqrt{\frac{Q^4 \xi^2}{16\mu^2} + Q^2} \simeq \frac{Q^2 \xi}{4\mu} (x_0 - x_3) - \frac{2\mu}{\xi} x_3. \quad (2-17)$$

为了避免积分的高度震荡，必须要求 $x_0 - x_3 \sim 4\mu/(Q^2\xi)$ ， $x_3 \sim \xi/(2\mu)$ 。因此我们可以得到

$$x_0^2 \simeq (x_3 + \frac{4\mu}{Q^2}\xi)^2 \simeq x_3^2 + \frac{4}{Q^2} + O\left(\frac{\mu^2}{Q^4}\right). \quad (2-18)$$

可见在 **LCSR** 关联函数中时空间隔的平方仍然满足 $x^2 \sim 1/Q^2 \rightarrow 0$ ，但是它的每个分量却是有限的 $x_0 \sim x_3 \sim \xi/(2\mu) \gg 1/\sqrt{Q^2}$ 。因此采用 **LCSR** 方法时我们无法在 $x = 0$ 位置附近将算符乘积展开为定域算符的求和。如果用自由夸克传播子计算关联函数 (2-15) 到领头阶，同时为简单起见只考虑 u 夸克电磁流算符，我们能够得到对一个非定域算符矩阵元积分的形式

$$F_{\mu\nu}(p, q) = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha\rho} \int d^4x \frac{x^\alpha}{\pi^2 x^4} e^{-iq \cdot x} \langle \pi^0(p) | \bar{u}(x) \gamma^\rho \gamma_5 u(0) | 0 \rangle, \quad (2-19)$$

然后将这个非定域算符在 $x = 0$ 附近展开：

$$\bar{u}(x) \gamma_\rho \gamma_5 u(0) = \sum_r \frac{1}{r!} \bar{u}(0) (\overleftarrow{D} \cdot x)^r \gamma_\rho \gamma_5 u(0). \quad (2-20)$$

其展开式中任意一项的矩阵元具有如下一般形式

$$\begin{aligned} & \langle \pi^0(p) | \bar{u} \overleftarrow{D}_{\alpha_1} \overleftarrow{D}_{\alpha_2} \dots \overleftarrow{D}_{\alpha_r} \gamma_\rho \gamma_5 u | 0 \rangle \\ &= (-i)^r p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \dots p_{\alpha_r} M_r + (-i)^r g_{\alpha_1 \alpha_2} p_{\alpha_3} \dots p_{\alpha_r} M'_r + \dots \end{aligned} \quad (2-21)$$

上式等号右边第一项是一个完全对称且无迹的张量，第二项完全对称且无迹的指标少了两个，其余的以此类推。其中 M_r 和 M'_r 是定域的算符矩阵元。将公式 (2-20) 代入公式 (2-19)，对 x 积分能够得到

$$F(Q^2, (p - q)^2) = \frac{1}{Q^2} \sum_{r=0}^{\infty} \xi^r M_r + \frac{4}{Q^4} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\xi^{r-2}}{r(r-1)} M'_r + \dots \quad (2-22)$$

公式 (2-22) 显示，由于 $\xi \sim 1$ 不是小量， F 对定域算符矩阵元的展开是无法做有限项的截断的。但是 M'_r 项的系数相比于 M_r 的系数是被 $1/Q^2$ 压低的。因此我们可以为 (2-20) 中的非定域算符定义一个物理量称作扭度 (**Twist**)，即算符的量纲减去自旋，扭度越大， $1/Q^2$ 压低越多。这些算符中扭度最低的是 2，它们只对 M_r 有贡献，而 M'_r 则来自于扭度为 4 的算符矩阵元的贡献。

对于公式 (2-19) 中的非定域算符，我们只能将其在光锥附近 $x^2 = 0$ 按照不同的扭度做展开。其中展开的领头阶矩阵元可以参数化为

$$\langle \pi^0(p) | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 u(0) | 0 \rangle_{x^2=0} = -ip_\mu \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 du e^{iup \cdot x} \varphi_\pi(u, \mu), \quad (2-23)$$

其中 $\varphi_\pi(u, \mu)$ 称作 π 介子的扭度为 2 的光锥分布振幅 (LCDA)。 μ 反映了其对重整化能标的依赖。 $\varphi_\pi(u, \mu)$ 是一种普适的非微扰物理量，它包含了 π 介子的长程的动力学行为，它在 LCSR 中扮演的角色相当于 QCDSR 中的真空凝聚。因此关联函数 (2-15) 可以用 π 介子的 LCDA 表示为

$$F^{(tw2)}(Q^2, (p-q)^2) = \frac{\sqrt{2}f_\pi}{3} \int_0^1 \frac{du \varphi_\pi(u, \mu)}{\bar{u}Q^2 - u(p-q)^2}, \quad (2-24)$$

在强子层面计算 LCSR 关联函数时，在两个电磁流之间插入的强子态完备集动量为 $p-q$ ，同样地我们只保留第一激发态 ρ^0 ，而更高的激发态合并到连续谱中

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p, q) &= 2 \frac{\langle \pi^0(p) | j_\mu^{em} | \rho^0(p-q) \rangle \langle \rho^0(p-q) | j_\nu^{em} | 0 \rangle}{m_\rho^2 - (p-q)^2} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{Im F_{\mu\nu}(Q^2, s)}{s - (p-q)^2}. \end{aligned} \quad (2-25)$$

利用 ρ^0 的衰变常数定义以及 $\gamma^* \rho \rightarrow \pi^0$ 过程的形状因子定义

$$\begin{aligned} \langle \rho^0(p-q) | j_\nu^{em} | 0 \rangle &= \frac{f_\rho}{\sqrt{2}} m_\rho \epsilon_\nu^{(\rho)*}, \\ \langle \pi^0(p) | j_\mu^{em} | \rho^0(p-q) \rangle &= F^{\rho\pi}(Q^2) m_\rho^{-1} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{(\rho)\nu} q^\alpha p^\beta, \end{aligned} \quad (2-26)$$

并根据夸克强子对偶的假定，且经过 Borel 变换，我们能够得到形状因子用光锥分布振幅的表示形式

$$F^{\rho\pi}(Q^2) = \frac{f_\pi}{3f_\rho} \int_{u_0^p}^1 \frac{du}{u} \varphi_\pi(u, \mu) \exp\left(-\frac{\bar{u}Q^2}{uM^2} + \frac{m_\rho^2}{M^2}\right). \quad (2-27)$$

这里我们用一个简单的物理过程介绍了光锥求和规则的基本思想，阐述了为什么在 LCSR 关联函数的计算中定域的 OPE 会失效，以及引入光锥分布振幅的原因。第四章将采用 LCSR 方法计算 D 介子衰变到一个标量粒子的过程，其中标量粒子 LCDAs 的定义形式和 π 介子相类似。在第五章我们将介绍如何采用 LCSR 方法处理更为复杂的双重味重子衰变问题，那时需要引入单重味重子的 LCDAs，虽然其定义形式更为复杂，但基本的计算框架仍然是相似的。

2.2 手征微扰论

2.2.1 有效场论

当一个特征能标在 Λ 附近的理论被用于更低能的物理区域时，它可以被近似为一个有效场论 (EFT)。EFT 最基本的思想在于，即使不知道在 Λ 能标之上存在怎样的基本理论，我们仍然能在感兴趣的能区用 EFT 给出准确的理论预言。

在有效理论中，人们采用适合低能区域物理的场自由度进行计算。比如在能量很低时我们可以忽略那些无法产生的非常重的粒子，从而使得计算得到简化。事实上，有效理论中的场自由度可以完全不同于基本理论的自由度。对于强子物理中的低能过程，我们用赝标八重态 (π, K, η) 和八重态自旋 1/2 的重子 (p, n, Σ, Λ) 作为场自由度，而不是 QCD 中的夸克和胶子场。

虽然采用了不同的自由度来描述物理，对同一可观测量的计算，分别用 EFT 和基本理论计算得到的结果需要在一定精度下相一致。要实现这一点，EFT 的拉氏量需要具有和相应完整理论相同的对称性。用这样的 EFT 拉氏量计算得到的 S-矩阵元能够满足解析性、微扰么正性、聚类分离性 (Cluster Decomposition) 以及理论本身的对称性。事实上根据对称性构造出的 EFT 拉氏量的项数是无限多的，每一项都带有一个独立的系数，称为低能常数 (LECs)。显然，在不做任何近似的前提下，直接用无穷多的拉氏量进行计算是完全不现实的。克服这一困难的途径在于两点：第一点，我们只要求计算结果达到有限的精度，也就是说 EFT 和完整理论给出的结果之间允许存在一定的差别。第二点，基于 EFT 的计算必须被限定在某一特定的能量范围，这意味着 EFT 的适用范围是有限的。基于这两点，用 EFT 对物理可观测量的计算需要对 p/Λ 做展开，其中 p 可以是远远小于特征能标 Λ 的能量，动量或者质量。在满足 $p \ll \Lambda$ 的物理区域，在达到某一精度时，我们只需要考虑 EFT 拉氏量中有限的项。

根据以上讨论，我们可以看出 EFT 的拉氏量是由相应完整理论的对称性所决定的。QCD 的对称性决定了在自发对称性破缺的情形下 Goldstone 玻色子之间的相互作用，也就是以 Goldstone 玻色子为自由度构造的 EFT 拉氏量的形式。然而仅仅根据对称性我们无法确定高阶有效拉氏量的 LECs，LECs 原则上只能通过和完整理论的匹配得到。但是在不知道完整理论或者知道完整理论但不知道如何求解它的时候，LECs 只能通过对实验数据拟合或者格点 QCD 计算得到。一旦 LECs 被确定，有效理论就有了预言能力。

事实上以传统的观点来看 EFT 是不可重整化的，随着精度要求的提高会有越来越多的高阶有效拉氏量需要引入。然而只要我们引入的有效拉氏量满足对称性，那么出现在某一阶计算中的发散可以通过对 EFT 中场和参数的重新定义来重整化掉。这一节将参考文献 [14] 介绍手征微扰论的基本思想。

2.2.2 QCD 的手征破缺和强子谱

在手征极限下, 所有轻夸克质量近似为零, QCD 拉氏量满足 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 对称性, 其中不包括 $U(1)_A$ 对称性, 这是量子反常效应造成的对称性破缺。事实上, 可以按照 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 群的不可约表示将强子近似地构成简并的多重态。 $U(1)_V$ 对称性对应于重子数守恒, 它使得我们可以将强子分类为 ($B = 0$) 的介子以及 ($B = 1$) 的重子。左手和右手守恒荷的线性组合 $Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a$ 和 $Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a$ 和自由的 QCD 哈密顿量 H_{QCD}^0 对易, 并且具有相反的宇称。对于宇称为正的态, 我们期望存在与其简并的负宇称的态。

如果 $|i, +\rangle$ 表示 H_{QCD}^0 的能量本征态, 本征值为 E_i , 其宇称为正, 则 $H_{\text{QCD}}^0|i, +\rangle = E_i|i, +\rangle$, $P|i, +\rangle = +|i, +\rangle$ 。 $|i, +\rangle$ 可以是基态的重子八重态。另外可以定义 $|\phi\rangle = Q_A^a|i, +\rangle$ 。由于 $[H_{\text{QCD}}^0, Q_A^a] = 0$, 所以有:

$$H_{\text{QCD}}^0|\phi\rangle = H_{\text{QCD}}^0Q_A^a|i, +\rangle = Q_A^aH_{\text{QCD}}^0|i, +\rangle = E_iQ_A^a|i, +\rangle = E_i|\phi\rangle. \quad (2-28)$$

可见 $|\phi\rangle$ 也是 H_{QCD}^0 的本征态, 并具有相同的本征值 E_i 和相反的宇称。 $|\phi\rangle$ 可以用简并的负宇称态来展开

$$P|\phi\rangle = PQ_A^aP^{-1}P|i, +\rangle = -Q_A^a(+|i, +\rangle) = -|\phi\rangle. \quad (2-29)$$

但是低能的重子谱中并不存在宇称为负的简并八重态重子。因此以上推导是不完备的, 事实上我们已假定, Q_A^a 会湮灭 QCD 的真空。可以用 a_i^\dagger 表示产生一个正宇称态 $|i, +\rangle$ 的算符, 而 b_i^\dagger 表示产生一个负宇称态 $|i, -\rangle$ 的算符。我们知道对于一个 $SU(3)$ 表示的场 Φ_i , 其满足和相应守恒荷的对易关系

$$[Q^a(t), \Phi_k(t, \vec{y})] = -t_{kj}^a \Phi_j(t, \vec{y}), \quad (2-30)$$

其中 t_{kj}^a 是 $SU(3)$ 生成元, 因此我们假定相应的产生算符也满足类似关系, 考虑到 Q_A^a 和 b_i^\dagger 的宇称为负, 可以推得

$$[Q_A^a, a_i^\dagger] = -t_{ij}^a b_j^\dagger. \quad (2-31)$$

而从另一方面, 如果认为 Q_A^a 能够湮灭真空, 我们能得到相同的结果

$$Q_A^a|i, +\rangle = Q_A^a a_i^\dagger|0\rangle = \left([Q_A^a, a_i^\dagger] + \underbrace{a_i^\dagger Q_A^a}_{\rightarrow 0} \right) |0\rangle = -t_{ij}^a b_j^\dagger|0\rangle. \quad (2-32)$$

如果以上论证是正确的, 那么就确实意味着存在有与正宇称相对应的负宇称的态, 这显然是跟实验观测不符的。因此我们不能认为 Q_A^a 能够湮灭真空。换句话说 QCD 的真空在 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 变化下无法保持不变, 也就是存在自发的对称性破

缺。这样强子态近似满足的对称性是 $SU(3)_V$ 而不是 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 。根据 Goldstone 定理，每一个自发破缺的对称自由度对应着一个零质量的 Goldstone 玻色子，由于赝标八重态介子相比于八重态矢量粒子质量要小的多，因此它们是 Goldstone 玻色子的候选者。

为了理解 $SU(3)$ 对称性的来源，我们考虑矢量荷 $Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a$ ，它们满足 $SU(3)$ 李代数的对易关系

$$[Q_R^a + Q_L^a, Q_R^b + Q_L^b] = [Q_R^a, Q_R^b] + [Q_L^a, Q_L^b] = if_{abc}Q_R^c + if_{abc}Q_L^c = if_{abc}Q_V^c. \quad (2-33)$$

在手征极限下 Vafa 和 Witten 首先证明了，基态必须在 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的变换下保持不变^[15]，因此八个矢量荷算符 Q_V^a 和重子数算符 $Q_V/3$ 能够湮灭真空态

$$Q_V^a|0\rangle = Q_V|0\rangle = 0. \quad (2-34)$$

根据 Coleman 定理^[16]，若真空在 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 变换下不变，则哈密顿量也必定有相同的对称性。而真空和哈密顿量的不变性意味着对应于 H_{QCD}^0 能量本征态的强子谱可以根据 $SU(3)_V \times U(1)_V$ 的不可约表示来构造。为了更清楚地理解这一点，我们考虑一个负宇称的态 $|\alpha, -\rangle$ ，作用一个矢量流算符

$$Q_V^a|\alpha, -\rangle = \sum_{\beta} |\beta, -\rangle \langle \beta, -|Q_V^a|\alpha, -\rangle = t_{\beta\alpha}^a|\beta, -\rangle, \quad (2-35)$$

其中因为矢量流算符算符满足和 $SU(3)$ 李代数相同的对易关系，我们将其在希尔伯特空间中的矩阵元定义为 $t_{\beta\alpha}^a$ ，它同样满足 $SU(3)$ 李代数的对易关系。这样我们有

$$t_{\alpha\beta}^a b_{\beta}^{\dagger}|0\rangle = t_{\alpha\beta}^a|\beta, -\rangle = Q_V^a b_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle = [Q_V^a, b_{\alpha}^{\dagger}]|0\rangle + b_{\alpha}^{\dagger}Q_V^a|0\rangle. \quad (2-36)$$

如果 $Q_V^a|0\rangle = 0$ ，那么

$$[Q_V^a, b_{\alpha}^{\dagger}] = t_{\alpha\beta}^a b_{\beta}^{\dagger}, \quad (2-37)$$

这个公式表示了赝标介子产生算符可以作为以 Q_V^a 为生成元的 $SU_V(3)$ 群的表示。而轴矢荷算符 $Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a$ 满足对易关系

$$[Q_A^a, Q_A^b] = if_{abc}Q_V^c, \quad [Q_V^a, Q_A^b] = if_{abc}Q_A^c. \quad (2-38)$$

注意到轴矢荷算符不满足封闭代数。由于 $Q_A^a|0\rangle \neq 0$ ，根据 Goldstone 定理，每一个轴矢量生成元都对应于一个零质量且自旋为零的 Goldstone 玻色子场 $\phi^a(x)$ 。这些 Goldstone 玻色子的宇称变换形式为

$$\phi^a(t, \vec{x}) \xrightarrow{P} -\phi^a(t, -\vec{x}), \quad (2-39)$$

它们在子群 $H = SU(3)_V$ 的变换下保持不变。从原来 $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称群的 $n_G = 16$ 个自由度破缺到 $n_H = 8$ 个自由度的 $H = SU(3)_V$ 对称群，我们期望存在有 8 个 Goldstone 玻色子场。

2.2.3 Goldstone 玻色子

考虑一个物理系统，其哈密顿量在紧致李群 G 的变换下不变，而它的基态仅仅在 G 的子群 H 的变换下不变，此时就存在 $n = n_G - n_H$ 个 **Goldstone** 玻色子。每一个玻色子可以表示为一个独立的场 ϕ_i ，这 n 个玻色子场构成一个矢量空间

$$M_1 \equiv \{\Phi : M^4 \rightarrow R^n | \phi_i : M^4 \rightarrow R \text{ continuous}\}. \quad (2-40)$$

我们需要找到一个关联 $(g, \Phi) \in G \times M_1$ 和 $\varphi(g, \Phi) \in M_1$ 的映射，满足以下性质

$$\varphi(e, \Phi) = \Phi \quad \forall \Phi \in M_1, \quad (2-41)$$

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall \Phi \in M_1. \quad (2-42)$$

这一映射定义了由 G 作用在 M_1 上的群。用 $\Phi = 0$ 标记 M_1 中的原点，它也对应于 **Goldstone** 玻色子场的基态构型。基态在 H 的作用下不变，因此对于任意 $h \in H$ 我们有 $\varphi(h, 0) = 0$ 。然后考虑由左陪集组成的商群 $G/H = \{gH | g \in G\}$ ，它满足两个性质：第一点是一个左陪集 gH 中每一个元素通过映射 φ 对原点 $\Phi = 0$ 的作用都相同，即

$$\varphi(gh, 0) = \varphi(g, \varphi(h, 0)) = \varphi(g, 0) \quad \forall g \in G \quad h \in H \quad (2-43)$$

第二点是如果两个群元分别属于不同左陪集，它们对原点 $\Phi = 0$ 的作用一定不同： $\varphi(g, 0) \neq \varphi(g', 0)$ 。因为 M_1 中任意一个矢量都可以表示为 $\Phi = \varphi(f, 0) = \varphi(\tilde{g}h, 0)$ ， $f = \tilde{g}h \in \tilde{g}H$ ，其中 f 是任以 G 中的元素同时也必定属于某一个左陪集，我们可以得出结论：商空间 G/H 和 **Goldstone** 玻色子场构成的空间 M_1 是同构的，如图 2-4 所示。而 Φ 在任意的 g 作用下变换为

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \varphi(g\tilde{g}h, 0) = \varphi(f', 0) = \Phi', \quad f' \in g(\tilde{g}H) \quad (2-44)$$

也就是说，在 M_1 空间中一个矢量 Φ 变换为 Φ' 时，在商空间中对应于左陪集左乘 g 。因此用 **Goldstone** 玻色子场参数化商群 G/H 时就能唯一确定其变化形式。

接下来我们讨论实际的物理问题。在手征对称性未破缺的情况下，**QCD** 理论由对称群 $G = \mathbf{SU}(N) \times \mathbf{SU}(N) = \{(L, R) | L \in \mathbf{SU}(N), R \in \mathbf{SU}(N)\}$ 描述，手征对称性破缺后对称群为 $H = \{(V, V) | V \in \mathbf{SU}(N)\}$ 。定义 $\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R}) \in G$ ，左陪集表示为 $\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V) | V \in \mathbf{SU}(N)\}$ 。由于

$$\tilde{g}H = (\tilde{L}V, \tilde{R}V) = (\tilde{L}V, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger\tilde{L}V) = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger) \underbrace{(\tilde{L}V, \tilde{L}V)}_{\in H} = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H, \quad (2-45)$$

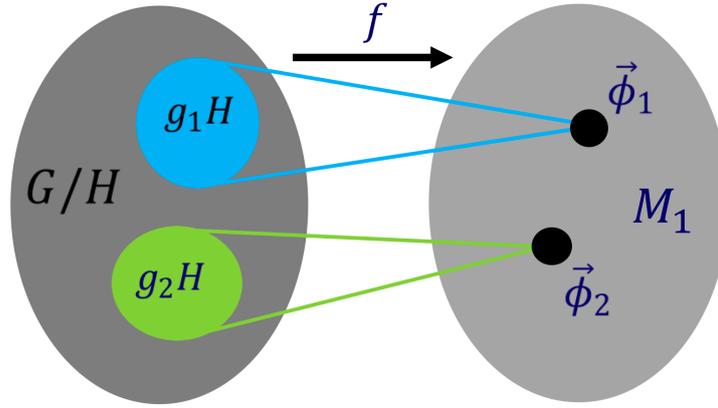


图 2-4 商群 G/H 和 Goldstone 玻色子场构成的空间同构，它们之间存在一个一到一的映射。

Figure 2-4 An isomorphic mapping f between the quotient G/H and the Goldstone boson fields.

左陪集可以用一个 $SU(N)$ 矩阵 $U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger$ 来表示。根据之前的讨论，我们可以推断出 U 构成的空间同构于 Goldstone 玻色子场 Φ 所构成的空间 M_1 。 U 在 $g = (L, R) \in G$ 作用下的变换形式可以通过左陪集的变换来得到

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)(L, L)H = (1, R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger)H, \quad (2-46)$$

因此有

$$U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger \mapsto U' = R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger = RUL^\dagger. \quad (2-47)$$

Goldstone 玻色子场 Φ 所构成的空间 M_1 可以表示为厄米并且无迹的 $N \times N$ 矩阵空间 $\tilde{\mathcal{H}}(N)$

$$\tilde{\mathcal{H}}(N) \equiv \{A \in \mathfrak{gl}(N, C) | A^\dagger = A \wedge \text{Tr}(A) = 0\}.$$

$N = 3$ 时，任何一个属于 $\tilde{\mathcal{H}}(3)$ 的矩阵都可以用 Gell-Mann 矩阵 λ_a 表示为

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (2-48)$$

根据商空间和 Goldstone 玻色子场空间的同构关系，我们可以将代表商空间元素的 U 和 $\tilde{\mathcal{H}}(3)$ 矩阵空间中的元素 ϕ 关联起来。考虑到 U 是么正的，所以关联方式为

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right). \quad (2-49)$$

2.2.4 手征有效拉氏量

通过之前的讨论，我们可以构造出一个能够描述 QCD 低能行为并且是最一般的有效理论，它能够在自发对称性破缺的情形下描述 Goldstone 玻色子的动力学行为。在手征极限下，有效理论拉氏量应该拥有和真实 QCD 相同的手征对称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 。另外，因为 QCD 在低能时体现为强子之间的相互作用，所以有效理论的场自由度必须是八个赝标 Goldstone 玻色子。很自然地我们希望能够用 $U(x)$ 构造出有效的拉氏量。在全局的手征变换下， $U(x)$ 的变形式为：

$$\begin{aligned} U &\mapsto RUL^\dagger, \\ \partial_\mu U &\mapsto \partial_\mu(RUL^\dagger) = R\partial_\mu UL^\dagger, \end{aligned} \quad (2-50)$$

$$\begin{aligned} U^\dagger &\mapsto LU^\dagger R^\dagger, \\ \partial_\mu U^\dagger &\mapsto L\partial_\mu U^\dagger R^\dagger, \end{aligned} \quad (2-51)$$

因此最一般的且包含导数项最少的有效的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2-52)$$

到目前为止我们没有考虑实际的 Goldstone 玻色子的质量。QCD 本身的质量项为

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M^\dagger q_R, \quad M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (2-53)$$

尽管质量项破坏的手征对称性，但是如果质量矩阵在手征变换下具有如下变换行为

$$M \mapsto RML^\dagger. \quad (2-54)$$

则质量项拉氏量保持不变。因此自然地有效理论中包含质量矩阵的拉氏量部分也必须具有相同的性质。这样能够构造出最低阶的质量项有效拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(MU^\dagger + UM^\dagger). \quad (2-55)$$

接下来考虑 Goldstone 玻色子场和规范场的耦合，也就是要构造在定域手征变换下不变的手征拉氏量。在 QCD 中，左手和右手流和外源耦合的形式为

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = \bar{q}_R \gamma^\mu r_\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu l_\mu q_L. \quad (2-56)$$

右手外源和左手外源在手征变换下分别变为

$$r_\mu \rightarrow Rr_\mu R^\dagger + iR\partial_\mu R^\dagger,$$

$$l_\mu \rightarrow Lr_\mu L^\dagger + iL\partial_\mu L^\dagger. \quad (2-57)$$

由此可以构造协变导数

$$D_\mu U \equiv \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu. \quad (2-58)$$

可以证明在手征变换下, U 的协变导数变换形式和 U 相同

$$D_\mu U \rightarrow R(D_\mu U)L^\dagger. \quad (2-59)$$

这样我们就能得到最低阶的、具有定域不变性的手征拉氏量

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger). \quad (2-60)$$

如果将上述拉氏量展开并保留赝标八重态场的二次项, 就能用 u, d, s 夸克质量表示赝标八重态的质量

$$M_\pi^2 = 2B_0 m, \quad (2-61)$$

$$M_K^2 = B_0(m + m_s), \quad (2-62)$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(m + 2m_s), \quad (2-63)$$

其中 $m_u = m_d = m$, B_0 正比于 QCD 凝聚参数: $3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle$ 。原则上利用对称性, 我们可以构造出无穷多的更高阶的手征拉氏量。因此用传统的重整化观点来看, 手征微扰论是不可重整的。但是采用幂次估计 (Power Counting) 的思想, 我们可以对手征微扰论做逐阶的重整化。具体的重整化方法会在第三章的具体计算中进行阐述。

2.3 味道 SU(3) 对称性

重介子衰变中，理论上大多采用的计算方法是因子化。而在现有的因子化计算中，大多只给出了关于 $1/m_b$ 领头阶的结果。然而半轻或者辐射过程当中次领头阶的修正也是十分重要的，这也意味着基于因子化的方法对于重味强子衰变的理解仍有许多困难需要克服。除了因子化方法，基于强子 SU(3) 味道对称性的方法也是一种非常强大的工具，目前这一方法被广泛地应用于两体或三体重介子衰变过程当中。尽管 SU(3) 味道对称性只是一种近似，它仍然可以提供非常多的关于衰变的有用信息。采用 SU(3) 对称性的优势在于以下几个方面：第一，一旦测量出了某几个衰变道的分支比，SU(3) 对称性可以提供许多其他相关衰变道的信息。第二，研究相关联的衰变道能够帮助我们检验 CKM 矩阵元的么正性。第三，如果实验数据足够多，人们可以利用数据拟合出 SU(3) 不可约表示振幅。原则上这些振幅可以用不同的因子化方法得到，从而也能检验因子化方案本身是否正确。这一节我们通过 B 和 D 弱衰变过程来介绍 SU(3) 分析方法及在其中的应用^[17]。

2.3.1 强子多重态

我们考虑包含 b 和 c 夸克的重味强子 B 和 D 弱衰变，包括 $B \rightarrow PP$ 和 $D \rightarrow PP$ 过程， P 表示赝标介子。只含一个重夸克的介子构成味道 SU(3) 反三重态

$$(B_i) = (B^-(b\bar{u}), \bar{B}^0(b\bar{d}), \bar{B}_s^0(b\bar{s})), (D_i) = (D^0(c\bar{u}), D^+(c\bar{d}), D_s^+(c\bar{s})), \quad (2-64)$$

轻的赝标 P 介子是味道 SU(3) 八重态和单态的混合，它包含 9 个强子态

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} - \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} - 2\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (2-65)$$

η 和 η' 是 η_8 和 η_1 的混合，混合角为 θ

$$\eta = \cos \theta \eta_8 + \sin \theta \eta_1, \quad \eta' = -\sin \theta \eta_8 + \cos \theta \eta_1. \quad (2-66)$$

因为 η_8 和 η_1 不是物理态，我们总是可以选择 η_q 和 η_s 作为混合基矢，

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0 + \eta_q}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{-\pi^0 + \eta_q}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \eta_s \end{pmatrix}. \quad (2-67)$$

$$\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_q - \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_s, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_q + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_s. \quad (2-68)$$

2.3.2 有效哈密顿量的不可约表示

在 $SU(3)$ 对称性分析中, 描述弱衰变的振幅可以通过两种途径来构造。一种是将有效哈密顿量分解为不可约表示张量, 从而构造出 $SU(3)$ 不可约表示振幅 (IRA)^[18-22]。另一种是找出所有拓扑上不等价的拓扑图 (TDA)^[23-28], 每一幅图对应一个独立的振幅贡献。我们首先介绍 IRA 方法。

2.3.2.1 b 夸克衰变

在标准模型中, b 夸克衰变是由以下电弱有效哈密顿量产生的^[29-31]

$$\mathcal{H}_{eff}^b = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ V_{ub}V_{uq}^* [C_1 O_1 + C_2 O_2] - V_{tb}V_{tq}^* \sum_{i=3}^{10} C_i O_i \} + \text{h.c.} \quad (2-69)$$

其中 G_F 是费米常数, V_{uq} 和 V_{tq} 是 CKM 矩阵元。 O_i 是四夸克算符, 而 C_i 是 Wilson 系数。 O_i 具体的形式如下

$$\begin{aligned} O_1 &= (\bar{q}^i u^j)_{V-A} (\bar{u}^j b^i)_{V-A}, & O_2 &= (\bar{q} u)_{V-A} (\bar{u} b)_{V-A}, \\ O_3 &= (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V-A}, & O_4 &= (\bar{q}^i b^j)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'^j q'^i)_{V-A}, \\ O_5 &= (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V+A}, & O_6 &= (\bar{q}^i b^j)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'^j q'^i)_{V+A}, \\ O_7 &= \frac{3}{2} (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}' q')_{V+A}, & O_8 &= \frac{3}{2} (\bar{q}^i b^j)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}'^j q'^i)_{V+A}, \\ O_9 &= \frac{3}{2} (\bar{q} b)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}' q')_{V-A}, & O_{10} &= \frac{3}{2} (\bar{q}^i b^j)_{V-A} \sum_{q'} e_{q'} (\bar{q}'^j q'^i)_{V-A}. \end{aligned} \quad (2-70)$$

其中 $q = d, s$ 且 $q' = u, d, s$ 。 $V - A$ 和 $V + A$ 分别对应于一个左手流 $\gamma_\mu(1 - \gamma_5)$ 和一个右手流 $\gamma_\mu(1 + \gamma_5)$ 。

对于轻味道的 $SU(3)$ 群, 算符 $O_{1,2}$ 和电弱“企鹅图”算符 O_{7-10} 可以被分解为一个矢量 $H_{\mathbf{3}}^i$, 一个无迹的且上指标反对称的张量 $(H_{\mathbf{6}})_k^{[ij]}$ 和一个无迹的且上指标对称的张量 $(H_{\mathbf{15}})_k^{\{ij\}}$ 。对于 $\Delta S = 0 (b \rightarrow d)$ 的衰变, 有效哈密顿量表示张量中所有的非零分量为^[18, 21, 22]

$$\begin{aligned} (H_{\mathbf{3}})^2 &= 1, & (H_{\mathbf{6}})_1^{12} &= -(H_{\mathbf{6}})_1^{21} = (H_{\mathbf{6}})_3^{23} = -(H_{\mathbf{6}})_3^{32} = 1, \\ 2(H_{\mathbf{15}})_1^{12} &= 2(H_{\mathbf{15}})_1^{21} = -3(H_{\mathbf{15}})_2^{22} = -6(H_{\mathbf{15}})_3^{23} = -6(H_{\mathbf{15}})_3^{32} = 6. \end{aligned} \quad (2-71)$$

对于 $\Delta S = -1 (b \rightarrow s)$ 的衰变, 有效哈密顿量表示张量的非零分量可以从公式 (2-71) 中做对应于 $d \leftrightarrow s$ 互换的 $2 \leftrightarrow 3$ 互换。QCD“企鹅”算符 O_{3-6} 在 $SU(3)$ 变换下

的行为和 $\bar{\mathbf{3}}$ 表示相同。对于磁偶极算符，色磁偶极算符 $O_{8g} = (g_s m_b / 4\pi) \bar{s} \sigma^{\mu\nu} T^a G_{\mu\nu}^a (1 + \gamma_5) b$ 是一个 $\text{SU}(3)$ 三重态，而电磁磁偶极算符 $O_{7\gamma} = \frac{em_b}{4\pi} \bar{s} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) b$ 可以被有效地包含在 O_{7-10} 当中。因此它们都可以被包括在哈密顿量 (2-69) 当中，从而上述的有效哈密顿量表示的分解是完备的。

有效哈密顿量既有“树图”又有圈图的贡献。当我们同时考虑强相互作用“企鹅图”和电弱“企鹅图”时，“树图”和圈图都有 $\bar{\mathbf{3}}$, $\mathbf{6}$ 和 $\bar{\mathbf{15}}$ 表示，它们有相同数目的独立振幅。利用 **CKM** 矩阵的么正性 $V_{ub}V_{uq}^* + V_{cb}V_{cq}^* + V_{tb}V_{tq}^* = 0$ ，我们可以将 c 夸克圈贡献的“企鹅图”重新表示为正比于 $V_{ub}V_{uq}^*$ 和 $V_{tb}V_{tq}^*$ 的振幅

$$\mathcal{A} = V_{ub}V_{uq}^* \mathcal{A}_u + V_{tb}V_{tq}^* \mathcal{A}_t. \quad (2-72)$$

为了简单起见，我们将 \mathcal{A}_u 称为“树图”而将 \mathcal{A}_t 称为“企鹅图”。

2.3.2.2 c 夸克衰变

对于带有 c 夸克衰变的强子过程， $\Delta C = 1$ 的有效哈密顿量表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff}^c = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ & V_{cs}V_{ud}^* [C_1 O_1^{sd} + C_2 O_2^{sd}] + V_{cd}V_{ud}^* [C_1 O_1^{dd} + C_2 O_2^{dd}] \\ & + V_{cs}V_{us}^* [C_1 O_1^{ss} + C_2 O_2^{ss}] + V_{cd}V_{us}^* [C_1 O_1^{ds} + C_2 O_2^{ds}] \}, \end{aligned} \quad (2-73)$$

这里忽略了高度压低的“企鹅图”贡献。“树图”算符为

$$\begin{aligned} O_1^{sd} &= [\bar{s}^i \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c^j] [\bar{u}^i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d^j], \\ O_2^{sd} &= [\bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c] [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d], \end{aligned} \quad (2-74)$$

而其他算符可以通过替换 d, s 夸克场得到。“树图”算符在 $\text{SU}(3)$ 对称群下构成 $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$ 表示，它可以分解为四个不可约表示的直和： $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{15}}$ 。

对于 **Cabibbo** 角允许的过程 $c \rightarrow sud$ ，振幅正比于 $V_{cs}V_{ud}^*$ ，产生这一过程的不可约表示张量算符具有如下非零分量

$$(H_6)_2^{31} = -(H_6)_2^{13} = 1, \quad (H_{\bar{\mathbf{15}}})_2^{31} = (H_{\bar{\mathbf{15}}})_2^{13} = 1. \quad (2-75)$$

对于双重 **Cabbibo** 角压低的过程 $c \rightarrow du\bar{s}$ ，振幅正比于 $V_{cd}V_{us}^*$ 并且非零的不可约表示张量算符分量为

$$(H_6)_3^{21} = -(H_6)_3^{12} = 1, \quad (H_{\bar{\mathbf{15}}})_3^{21} = (H_{\bar{\mathbf{15}}})_3^{12} = 1. \quad (2-76)$$

对于正比于 $V_{cs}V_{us}^*$ 的单个 **Cabbibo** 角压低的衰变过程，我们有

$$(H_6)_3^{31} = -(H_6)_3^{13} = 1, \quad (H_{\bar{\mathbf{15}}})_3^{31} = (H_{\bar{\mathbf{15}}})_3^{13} = 1, \quad (2-77)$$

对于正比于 $V_{cd}V_{ud}^*$ 的单次 Cabbibo 角压低的衰变过程，我们有

$$(H_6)_2^{12} = -(H_6)_2^{21} = 1, \quad (H_{\bar{15}})_2^{12} = (H_{\bar{15}})_2^{21} = -1. \quad (2-78)$$

$c \rightarrow u\bar{d}d$ 和 $c \rightarrow u\bar{s}s$ 过程的振幅近似相等但是符号相反： $V_{cd}V_{ud}^* = -V_{cs}V_{us}^* - V_{cb}V_{ub}^* \approx -V_{cs}V_{us}^*$ (有 10^{-3} 的偏离)。因此 $\bar{3}$ 表示的贡献为零，并且非零的算符表示分量只来自于 6 和 $\bar{15}$ 表示。

接下来考虑一个简单的应用。对于 $B \rightarrow PP$ 衰变，最普适的振幅可以分解为

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= V_{ub}V_{uq}^* \mathcal{A}_u^{IRA} + V_{tb}V_{tq}^* \mathcal{A}_t^{IRA}, \\ \mathcal{A} &= V_{ub}V_{uq}^* \mathcal{A}_u^{TDA} + V_{tb}V_{tq}^* \mathcal{A}_t^{TDA}. \end{aligned} \quad (2-79)$$

利用之前给出的强子态和电弱有效哈密顿量在味道 SU(3) 对称群下的不可约表示，对于某一特定的弱衰变过程我们可以写出在强子层面上 SU(3) 不变的有效哈密顿量。对于 $B \rightarrow PP$ 衰变，有效哈密顿量表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u^{IRA} &= A_3^T B_i (H_3)^i P_k^j P_j^k + C_3^T B_i (H_3)^k P_j^i P_k^j + B_3^T B_i (H_3)^i P_k^k P_j^j + D_3^T B_i (H_3)^j P_j^i P_k^k \\ &+ A_6^T B_i (H_6)_k^{[ij]} P_j^l P_l^k + C_6^T B_i (H_6)_k^{[jl]} P_j^i P_l^k + B_6^T B_i (H_6)_k^{[ij]} P_j^k P_l^l \\ &+ A_{15}^T B_i (H_{\bar{15}})_k^{\{ij\}} P_j^l P_l^k + C_{15}^T B_i (H_{\bar{15}})_l^{\{jk\}} P_j^i P_k^l + B_{15}^T B_i (H_{\bar{15}})_k^{\{ij\}} P_j^k P_l^l. \end{aligned} \quad (2-80)$$

其中 A_i^T , B_i^T , C_i^T 是独立的不可约表示振幅 (IRA)。在 SU(3) 分析中，它们是待定系数，包含了所有的动力学的信息，只能通过实验数据拟合得到。通过对哈密顿量 (2-80) 做展开，我们就能得到如 Table 2-1 所示的不同衰变道的振幅。对于 \mathcal{A}_t 的分析是类似的，可以做如下替换得到

$$A_i^T \rightarrow A_i^P, \quad B_i^T \rightarrow B_i^P, \quad C_i^T \rightarrow C_i^P, \quad D_i^T \rightarrow D_i^P. \quad (2-81)$$

2.3.3 有效哈密顿量的拓扑图表示

接下来我们介绍 TDA 方法。一般拓扑图被分为以下几类，按不同的字母表示为

- (i) T ，表示颜色允许的 W 发射“树图”振幅；
- (ii) C ，表示颜色压低的“树图”；
- (iii) E ，表示 W 交换图；
- (iv) P ，表示 QCD“企鹅图”；
- (v) S ，表示味道单态 QCD“企鹅图”；
- (vi) P_{EW} ，表示电弱“企鹅图”。

表 2-1 两体 $B \rightarrow PP$ 的衰变振幅，表中只展示了正比于 CKM 因子 $V_{ub}V_{uq}^*$ 的“树图”振幅。正比于 $V_{tb}V_{tq}^*$ 的“企鹅图”振幅可以通过公式 (2-81) 替换得到。

Table 2-1 Decay amplitudes for two-body $B \rightarrow PP$ decays. Only the amplitudes with CKM factor $V_{ub}V_{uq}^*$ are shown in this table and the following ones. “Penguin” amplitudes with $V_{tb}V_{tq}^*$ can be obtained with the replacement Eq. (2-81).

$b \rightarrow d$	IRA	$b \rightarrow s$	IRA
$B^- \rightarrow \pi^0 \pi^-$	$4\sqrt{2}C_{15}^T$	$B^- \rightarrow \pi^0 K^-$	$(A_6^T + 3A_{15}^T + C_3^T - C_6^T + 7C_{15}^T)/\sqrt{2}$
$B^- \rightarrow \pi^- \eta_q$	$\sqrt{2}(A_6^T + 3A_{15}^T + B_6^T + 3B_{15}^T + C_3^T + 2C_{15}^T + D_3^T)$	$B^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$	$A_6^T + 3A_{15}^T + C_3^T - C_6^T - C_{15}^T$
$B^- \rightarrow \pi^- \eta_s$	$B_6^T + 3B_{15}^T + C_6^T - C_{15}^T + D_3^T$	$B^- \rightarrow K^- \eta_q$	$(A_6^T + 3A_{15}^T + 2B_6^T + 6B_{15}^T + C_3^T + C_6^T + 5C_{15}^T + 2D_3^T)/\sqrt{2}$
$B^- \rightarrow K^0 K^-$	$A_6^T + 3A_{15}^T + C_3^T - C_6^T - C_{15}^T$	$B^- \rightarrow K^- \eta_s$	$A_6^T + 3A_{15}^T + B_6^T + 3B_{15}^T + C_3^T - 2C_{15}^T + D_3^T$
$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$2A_3^T - A_6^T + A_{15}^T + C_3^T + C_6^T + 3C_{15}^T$	$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ K^-$	$-A_6^T - A_{15}^T + C_3^T + C_6^T + 3C_{15}^T$
$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$2A_3^T - A_6^T + A_{15}^T + C_3^T + C_6^T - 5C_{15}^T$	$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$	$(A_6^T + A_{15}^T - C_3^T - C_6^T + 5C_{15}^T)/\sqrt{2}$
$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \eta_q$	$-A_6^T + 5A_{15}^T - B_6^T + 5B_{15}^T - C_3^T + 2C_{15}^T - D_3^T$	$\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \eta_q$	$-(A_6^T + A_{15}^T + 2B_6^T + 2B_{15}^T - C_3^T + C_6^T - C_{15}^T - 2D_3^T)/\sqrt{2}$
$\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \eta_s$	$-(B_6^T - 5B_{15}^T + C_6^T - C_{15}^T + D_3^T)/\sqrt{2}$	$\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \eta_s$	$-A_6^T - A_{15}^T - B_6^T - B_{15}^T + C_3^T - 2C_{15}^T + D_3^T$
$\bar{B}^0 \rightarrow K^+ K^-$	$2(A_3^T + A_{15}^T)$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$2(A_3^T + A_{15}^T)$
$\bar{B}^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$2A_3^T + A_6^T - 3A_{15}^T + C_3^T - C_6^T - C_{15}^T$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$2(A_3^T + A_{15}^T)$
$\bar{B}^0 \rightarrow \eta_q \eta_q$	$2A_3^T - A_6^T + A_{15}^T + 4B_3^T - 2B_6^T + 2B_{15}^T + C_3^T - C_6^T + C_{15}^T + 2D_3^T$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^0 \eta_q$	$-2(A_6^T - 2A_{15}^T + B_6^T - 2B_{15}^T)$
$\bar{B}^0 \rightarrow \eta_q \eta_s$	$(4B_3^T + B_6^T - B_{15}^T + C_6^T - C_{15}^T + D_3^T)/\sqrt{2}$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^0 \eta_s$	$-\sqrt{2}(B_6^T - 2B_{15}^T + C_6^T - 2C_{15}^T)$
$\bar{B}^0 \rightarrow \eta_s \eta_s$	$2(A_3^T + A_6^T - A_{15}^T + B_3^T + B_6^T - B_{15}^T)$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow K^+ K^-$	$2A_3^T - A_6^T + A_{15}^T + C_3^T + C_6^T + 3C_{15}^T$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^0 K^0$	$(A_6^T + A_{15}^T - C_3^T - C_6^T + 5C_{15}^T)/\sqrt{2}$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0$	$2A_3^T + A_6^T - 3A_{15}^T + C_3^T - C_6^T - C_{15}^T$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \pi^- K^+$	$-A_6^T - A_{15}^T + C_3^T + C_6^T + 3C_{15}^T$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \eta_q \eta_q$	$2(A_3^T + A_{15}^T + 2(B_3^T + B_{15}^T))$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K^0 \eta_q$	$-(A_6^T + A_{15}^T + 2B_6^T + 2B_{15}^T - C_3^T + C_6^T - C_{15}^T - 2D_3^T)/\sqrt{2}$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \eta_q \eta_s$	$\sqrt{2}(2B_3^T - B_{15}^T + C_{15}^T + D_3^T)$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K^0 \eta_s$	$-A_6^T - A_{15}^T - B_6^T - B_{15}^T + C_3^T - 2C_{15}^T + D_3^T$	$\bar{B}_s^0 \rightarrow \eta_s \eta_s$	$A_3^T - 2A_{15}^T + B_3^T - 2B_{15}^T + C_3^T - 2C_{15}^T + D_3^T$

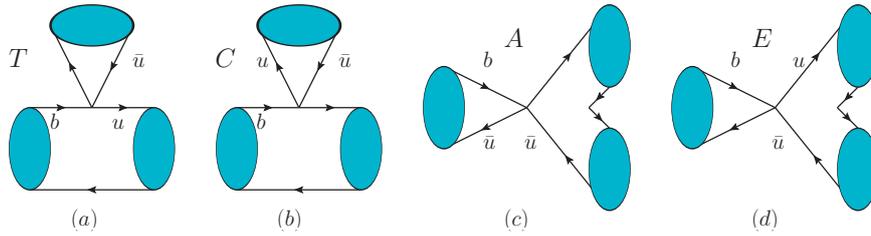


图 2-5 “树图”振幅的四种拓扑图，分别表示：颜色允许的“树图”(T)，颜色压低的树图(C)，湮灭图(A) 以及 W-交换图(E)。

Figure 2-5 Topological diagrams induced by tree amplitudes. The four panels denote: the color-allowed tree amplitude (T), color-suppressed tree amplitude (C), annihilation (A) and W-exchange (E).

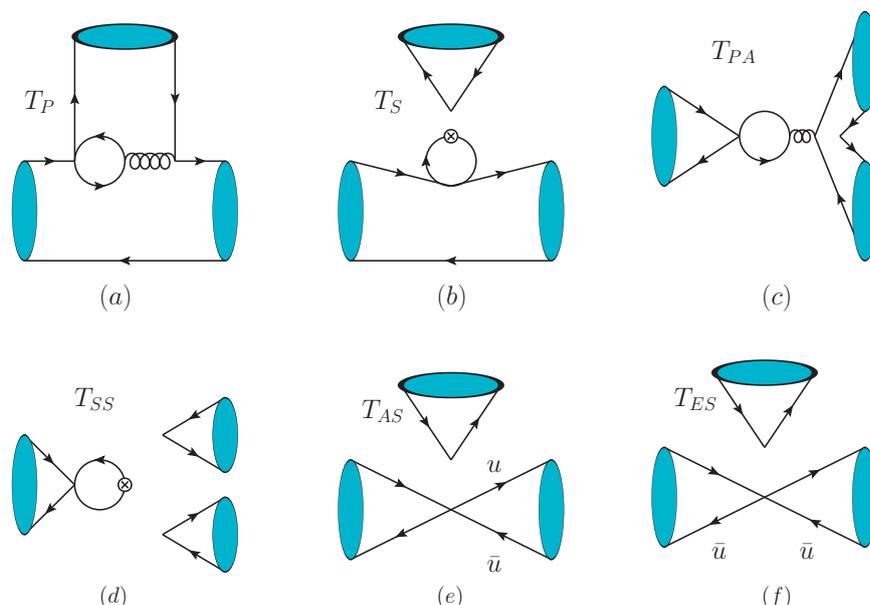


图 2-6 $B \rightarrow PP$ 过程需要额外考虑的六个拓扑图，其中交叉号顶点表示 $\bar{u}u$ 的湮灭并产生两个或多个胶子。

Figure 2-6 Typical diagrams for the newly introduced amplitudes of $B \rightarrow PP$ in Eq. (2-84). The crossed vertex denotes the $\bar{u}u$ annihilation and the creation of two or more gluons.

图 2-5 中仅给出了“树图”振幅，对应于“企鹅图”算符的拓扑图可以类似的得到。另外，电弱“企鹅图”包含了颜色允许的贡献 P_{EW} 以及颜色压低的贡献 P_{EW}^C ，可以表示为

$$\bar{q}b \sum_{q'} e_{q'} \bar{q}' q' = \bar{q}b\bar{u}u - \frac{1}{3} \bar{q}b \sum_{q'} \bar{q}' q', \quad (2-82)$$

其中第二个部分可以被包含在 $\bar{3}$ 表示当中。而 $\bar{q}b\bar{u}u$ 的贡献和“树图”算符是类似的。因此我们用记号 P_T 和 P_C 来表示电弱“企鹅图”的贡献。 $\bar{q}b \sum_{q'} \bar{q}' q'$ 是一个味道三重态，并表示为 P' 。在 $SU(3)$ 对称性下，它可以被吸收到“企鹅图”的贡献中

$$P_{EW} = P_T - \frac{1}{3}P', \quad P_{EW}^C = P_C - \frac{1}{3}P'^C. \quad (2-83)$$

三种“企鹅图”振幅 P , P' 和 P'^C 可以归为一类。可以重新定义 P 为 $P + P' + P'^C$ 。

事实上，拓扑图振幅可以用和推导不可约表示振幅类似的方法得到。我们将 $\bar{q}u\bar{b}$ 过程表示为一个算符 \bar{H}_k^{ij} 。对于 $\Delta S = 0$ ，其非零的分量为 $\bar{H}_1^{12} = 1$ 。对于 $\Delta S = -1$ ， $\bar{H}_1^{13} = 1$ 。企鹅图贡献（包括 P , P' 和 P'^C ）是 $SU(3)$ 三重态 \bar{H}^i ， $b \rightarrow d$ 的非零分量是 $\bar{H}^2 = 1$ 而 $b \rightarrow s$ 的非零分量是 \bar{H}^3 。公式 (2-82) 意味着圈图诱导的正比于 $V_{tq}^* V_{tb}$ 的部分同时包含了 \bar{H}_k^{ij} 和 \bar{H}^i 。

$B \rightarrow PP$ 衰变的“树图”振幅表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t^{TDA} = & T B_i(M)_j^i \bar{H}_k^{jl}(M)_l^k + C B_i(M)_j^i \bar{H}_k^{lj}(M)_l^k + A B_i \bar{H}_j^{il}(M)_k^j (M)_l^k \\
& + E B_i \bar{H}_j^{li}(M)_k^j (M)_l^k + T_S B_i(M)_j^i \bar{H}_l^{lj}(M)_k^k + T_P B_i(M)_j^i (M)_k^j \bar{H}_l^{lk} \\
& + T_{PA} B_i \bar{H}_l^{li}(M)_k^j (M)_j^k + T_{SS} B_i \bar{H}_l^{li}(M)_j^j (M)_k^k + T_{AS} B_i \bar{H}_l^{ji}(M)_j^l (M)_k^k \\
& + T_{ES} B_i \bar{H}_l^{ij}(M)_j^l (M)_k^k, \tag{2-84}
\end{aligned}$$

除了图 2-5 中的四个振幅，还有图 2-6 中六个图的贡献。另外，“企鹅图”振幅具有相同的结构，这里不再具体给出。

本节介绍了味道 $SU(3)$ 对称性分析方法。我们先将所有参与衰变过程的强子用 $SU(3)$ 不可约表示张量表示出来，然后结合弱相互作用有效哈密顿量的 $SU(3)$ 表示张量，构造出 $SU(3)$ 不变的强子层面有效哈密顿量。其中每一项独立的哈密顿量都带有一个独立系数，用来反映所有的动力学信息。原则上，它们可以通过对实验数据拟合得到。在第五章中，我们将用味道 $SU(3)$ 对称性分析双重味重子的半轻弱衰变过程，并做出一些唯象上的预言。

第三章 用手征微扰论计算低能介子形状因子

在所有的重介子衰变模式中，半轻衰变是一类在理论和实验上都非常值得研究的衰变过程。这不仅是因为半轻衰变在实验上具有非常干净的信号，更是因为其中所有 QCD 的非微扰效应都能被包含在强子跃迁矩阵元中，因此研究半轻过程有助于我们理解 QCD 的低能动力学。一般来说，强子跃迁矩阵元描述的是一个强子经过一个夸克流算符的作用变为另一个强子的过程，对于这样的矩阵元有许多计算方法，比如上一章介绍的 SVZ 或光锥 QCD 求和规则。然而在许多情况下，末态的强子是一个非常不稳定的共振态粒子，它被产生后会很快衰变为两个更轻的强子。比如 $B_s \rightarrow f_0(980)(\rightarrow \pi^+\pi^-)\mu^+\mu^-$ 过程，其中 $f_0(980)$ 是一个 S-波共振态，它会进一步衰变为 $\pi^+\pi^-$ 。因为 $f_0(980)$ 接近 $K\bar{K}$ 阈值，所以窄宽度近似是失效，我们必须考虑末态 $\pi^+\pi^-$ 低能相互作用对强子跃迁矩阵元 $B_s \rightarrow f_0(980)$ 的修正。实际上除了上面提到的诸如 $B_s \rightarrow f_0(980)(\rightarrow \pi^+\pi^-)\mu^+\mu^-$ 的共振态主导的过程， $e^+e^- \rightarrow MM$ ，味道改变过程 $K \rightarrow \pi$ 和 $\tau \rightarrow M_1M_2\nu$ 的计算都中都需要考虑末态轻介子的相互作用。这种相互作用通常可以用介子形状因子来描述，其形式如下

$$\langle M_1M_2|\bar{q}(x)\Gamma q(0)|0\rangle, \quad (3-1)$$

其中 Γ 是一个狄拉克矩阵，它可以是 $\Gamma = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$ 。 $|M_1M_2\rangle$ 是两个轻介子组成的带有确定总轨道角动量的态。这些非定域的算符矩阵元可以归一化为标量，矢量和张量形状因子 $F_{M_1M_2}^\Gamma$ ，它们由以下矩阵元定义

$$B_0 F_{M_1M_2}^\Gamma(s) = \langle M_1M_2|\bar{q}\Gamma q|0\rangle, \quad (3-2)$$

其中 s 是两介子系统总动量平方： $s = (p_{M_1} + p_{M_2})^2$ 。

由于介子形状因子通常是作为一种普适的输入量出现在不同过程的计算之中，如何计算介子形状因子一直是一个重要的问题。这一问题涉及了轻强子的低能相互作用，所以我们无法用传统的微扰方法计算介子形状因子。本章将对两介子系统的标量、矢量和张量形状因子做一个系统的研究。我们采用手征微扰论计算精确到次领头阶的形状因子。考虑到手征有效理论只适用于低能区域，我们采用么正化的方法对形状因子进行延拓，使其能够适用于更高的能量范围，在 1GeV 左右。在第四章中我们会将本章所得到的介子形状因子应用于一些末态窄宽度近似失效的衰变过程。

3.1 手征微扰论及其么正化方法

3.1.1 幂次估计和重整化

手征微扰论 (χ PT) 提供了一种处理低能强相互作用的方法。第二章第二节介绍了如何通过 QCD 在手征极限下 (u, d, s 夸克质量趋于零) 的全局 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性到 $SU(3)_V$ 对称性的破缺推导出领头阶的手征拉氏量。我们论证了 QCD 的自发对称性破缺产生的八个 Goldstone 玻色子所构成的八维空间与商群 $SU(3)_L \times SU(3)_R / SU(3)_V$ 空间同构。因此这八个 Goldstone 玻色子场可以用来作为有效理论中 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 群表示的参量, 从而它们可以表示 χ PT 作为 QCD 低能有效理论时的场自由度。领头阶 (LO) 的手征拉氏量为

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U D^\mu U^\dagger] + \frac{f^2}{4} \text{Tr}[\chi U^\dagger + \chi^\dagger U], \quad (3-3)$$

其中 f 是在手征极限下 π 的衰变常数

$$\chi = 2B_0(\hat{M} + s), D_\mu U \equiv \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu. \quad (3-4)$$

s 是标量外源, 而 l_μ 和 r_μ 分别是左手和右手矢量源。场 U 表示为指数形式

$$U = \exp \left[\frac{i\sqrt{2}\phi}{f} \right], \quad (3-5)$$

ϕ 是赝标介子八重态表示矩阵, 对应于八个 Goldstone 玻色子

$$\phi = \begin{pmatrix} \pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \pi^0/\sqrt{2} + \eta/\sqrt{6} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\eta/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad (3-6)$$

根据对称性, 我们原则上可以构造出无穷多的手征拉氏量。在用 χ PT 做计算时我们需要找到一种系统的方法来估计每项拉氏量的重要性, 也就是做幂次估计 (Power Counting)。通过幂次估计的方法, 在某一有限的精度范围内, 我们对某一物理量计算时只需要考虑有限项 χ PT 拉氏量的贡献。

能够描述 Goldstone 玻色子相互作用的手征拉氏量具有如下一般形式

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \cdots, \quad (3-7)$$

其中下标表示动量或者夸克质量的阶数。例如第一项的下标 2 表示这一类拉氏量中每一项要么带有两个导数算符, 要么带有一个夸克质量项。从公式(2-61)到(2-63)可以

发现，一个夸克质量的阶数相当于介子质量的二次。 \mathcal{L}_4 和 \mathcal{L}_6 表示更为复杂的 $\mathcal{O}(p^4)$ 阶和 $\mathcal{O}(p^6)$ 阶的手征拉氏量，并分别带有 6 个导数算符或者 3 个夸克质量项。另外注意到手征拉氏量必须是偶数阶的 $\mathcal{O}(p^{2n})$ ，这是因为洛伦兹不变性要求导数算符必须是两两缩并的形式。

对于手征微扰论，我们采用温伯格幂次估计方案^[32]。当某一个费曼图中所有外线动量和轻夸克质量做尺度变换 $p_i \mapsto tp_i$ 和 $m_q \mapsto t^2 m_q$ 时，相应的振幅变换形式为

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q), \quad (3-8)$$

理论上，可以证明手征量纲 D 具有如下形式

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L, \quad (3-9)$$

其中 N_{2n} 表示来自于 \mathcal{L}_{2n} 的顶点个数， N_L 是独立的圈积分动量的个数。当外线动量以及轻夸克质量比较小时，我们有 $0 < t < 1$ 。因此，如果外线动量和轻夸克质量足够小，那么 $D = 2$ 和 $D = 4$ 的费曼图贡献才是主要的，它们分别对应于用 \mathcal{L}_2 计算到树图阶和单圈阶的贡献。

次领头阶 (NLO) 的手征拉氏量 \mathcal{L}_4 有 10 项， L_i 是待定耦合常数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 [\text{Tr}(D_\mu U D^\mu U^\dagger)]^2 + L_2 \text{Tr}[D_\mu U (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] \\ & + L_3 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}[\chi^\dagger U + U \chi^\dagger] \\ & + L_5 \text{Tr}[D_\mu U D^\mu U^\dagger (\chi^\dagger U + U \chi^\dagger)] + L_6 \text{Tr}[\chi^\dagger U + U \chi^\dagger]^2 \\ & + L_7 [\text{Tr}(\chi^\dagger U - U \chi^\dagger)]^2 + L_8 \text{Tr}[\chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger] \\ & - i L_9 \text{Tr}[R_{\mu\nu} D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] + L_{\mu\nu} (D^\mu U)^\dagger D^\nu U + L_{10} \text{Tr}[L_{\mu\nu} U R^{\mu\nu} U^\dagger], \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中 $L_{\mu\nu}$ 和 $R_{\mu\nu}$ 分别是张量外源

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu], \\ R_{\mu\nu} &= \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu]. \end{aligned} \quad (3-11)$$

通过适当的归一化，我们可以使得低能系数 (LECs) L_i 吸收掉所有用 \mathcal{L}_2 计算到次领头阶时出现的紫外发散，通过这种精确到次领头阶的计算所得的物理量是紫外有限的。重整化的低能系数 L_i^r 定义为

$$L_i^r = L_i - \Gamma_i \lambda, \quad (3-12)$$

其中的紫外发散部分为

$$\lambda = \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{2}{d-4} - \ln(4\pi) + \gamma - 1 \right], \quad (3-13)$$

Γ_i 是紫外发散部分的系数。通过单圈图的计算理论上，人们可以确定出 Γ_i

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{3}{32}, \quad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \\ \Gamma_6 &= \frac{11}{144}, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}, \quad \Gamma_9 = \frac{1}{4}, \quad \Gamma_{10} = -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3-14)$$

重整化的 LECs 对能标有如下的依赖关系

$$L_i^r(\mu_2) = L_i^r(\mu_1) + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (3-15)$$

表 3-1 列出了 L_i^r 在 $\mu = m_\rho$ 能标处的值。其中第一列对应于是用精确到 $\mathcal{O}(p^4)$ 的 χ PT 计算结果拟合实验数据得到的^[33, 34]。第二列是用精确到 $\mathcal{O}(p^6)$ 的 χ PT 计算结果拟合得到的结果^[35]。最后一列对应于用么正化的 χ PT 方法给出的理论计算对实验上散射相移数据进行拟合的结果^[36]。

3.1.2 双介子系统的同位旋本征态

这一节将讨论 SU(3) Goldstone 玻色子之间的 $2 \rightarrow 2$ 散射过程。因为同位旋可以被认为是一种很好地守恒量，它可以被用来构造具有确定同位旋量子数的多介子态。为简单起见，我们首先考虑单介子态，其同位旋本征态表示为 $|\phi, I, I_3\rangle$ 。通过适当选择相位因子，我们可以使同位旋本征态在升降算符的作用下满足

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |I, I_3\rangle &= \sqrt{(I - I_3)(I + I_3 + 1)} |I, I_3 + 1\rangle, \\ \hat{J}_- |I, I_3\rangle &= \sqrt{(I + I_3)(I - I_3 + 1)} |I, I_3 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (3-16)$$

对应于 π 介子三重态的同位旋本征态可以选为

$$|\pi, 1, +1\rangle = -|\pi^+\rangle, \quad |\pi, 1, 0\rangle = |\pi^0\rangle, \quad |\pi, 1, -1\rangle = |\pi^-\rangle \quad (3-17)$$

对应于 K^+, \bar{K}^0 的同位旋本征态可以选为

$$\left| \bar{K}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad \left| \bar{K}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -|K^-\rangle. \quad (3-18)$$

而对于同位旋单态 η ，其同位旋本征态为

$$|\eta, 0, 0\rangle = |\eta\rangle. \quad (3-19)$$

表 3-1 在能标 $\mu = m_\rho$ 处的低能常数 L_i^r (单位是 10^{-3})。

 Table 3-1 Low energy constants L_i^r (in units of 10^{-3}) at $\mu = m_\rho$.

L_i^r	$\mathcal{O}(p^4)^{[33, 34]}$	$\mathcal{O}(p^6)^{[35]}$	Unitarized ^[36]
L_1^r	0.4 ± 0.3	1.11 ± 0.10	0.56 ± 0.10
L_2^r	1.35 ± 0.3	1.05 ± 0.17	1.21 ± 0.10
L_3	-3.5 ± 1.1	-3.82 ± 0.30	-2.79 ± 0.24
L_4^r	-0.3 ± 0.5	1.87 ± 0.53	-0.36 ± 0.17
L_5^r	1.4 ± 0.5	1.22 ± 0.06	1.4 ± 0.5
L_6^r	-0.2 ± 0.3	1.46 ± 0.46	0.07 ± 0.08
L_7	-0.4 ± 0.2	-0.39 ± 0.08	0.44 ± 0.15
L_8^r	0.9 ± 0.3	0.65 ± 0.07	0.78 ± 0.18
L_9^r	6.9 ± 0.7	—	—
L_{10}^r	-5.5 ± 0.7	—	—

一般地，两粒子系统的同位旋本征态可以表示为 $|\phi\phi', I, I_3\rangle$ 。两粒子系统的同位旋本征态可以通过利用 **Clebsch-Gordon (CG)** 系数耦合两个单粒子同位旋本征态得到。然而对于处于同一个同位旋多重态的两个粒子，它们需要各自乘上因子 $1/\sqrt{2}$ 从而满足正确的归一化要求 $\sum_{I, I_3} |I, I_3\rangle \langle I, I_3| = 1$ 。这里给出本章需要用到的所有两粒子同位旋系统的本征态

$$\begin{aligned}
 |\pi\pi, 0, 0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{6}} [|\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle], \\
 |\pi\pi, 1, 0\rangle &= -\frac{1}{2} [|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle], \\
 |\pi\pi, 2, 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^+\pi^+\rangle, \\
 \left|K\pi, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &= -|K^+\pi^+\rangle, \\
 \left|K\pi, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |K^+\pi^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |K^0\pi^0\rangle, \\
 |K\bar{K}, 1, 0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{2}} |K^+K^-\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |K^0\bar{K}^0\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|K\bar{K}, 0, 0\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{2}}|K^+K^-\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|K^0\bar{K}^0\rangle, \\
\left|K\eta, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= |K^0\eta\rangle, \\
|\pi\eta, 1, 0\rangle &= |\pi_0\eta\rangle, \\
|\eta\eta\rangle &= \sqrt{2}|\eta\eta, 0, 0\rangle.
\end{aligned} \tag{3-20}$$

3.1.3 介子-介子散射振幅

根据交叉对称性 (Crossing Symmetry), 每一类双介子系统在其同位旋被确定时, 它们所有的散射振幅实际上只有一个独立的自由度, 我们可以选取以下八个独立的介子-介子散射振幅

$$\begin{aligned}
T_1(s, t, u) &\equiv T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(s, t, u), \quad T_2(s, t, u) \equiv T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(s, t, u), \\
T_3(s, t, u) &\equiv T_{K^+K^-\rightarrow K^+K^-}(s, t, u), \quad T_4(s, t, u) \equiv T_{K^0\bar{K}^0\rightarrow K^+K^-}(s, t, u), \\
T_5(s, t, u) &\equiv T_{K^0\eta\rightarrow K^0\eta}(s, t, u), \quad T_6(s, t, u) \equiv T_{K^0\pi^0\rightarrow K^0\eta}(s, t, u), \\
T_7(s, t, u) &\equiv T_{\pi^0\eta\rightarrow\pi^0\eta}(s, t, u), \quad T_8(s, t, u) \equiv T_{\eta\eta\rightarrow\eta\eta}(s, t, u).
\end{aligned} \tag{3-21}$$

所有其它的散射振幅都可以用这八个独立的振幅表示, 附录中给出了这八个独立散射道的精确到单圈的振幅表达式。 $I = 0$ 散射道的振幅为

$$\begin{aligned}
T_{\pi\pi\rightarrow\pi\pi}^{I=0}(s, t, u) &= \frac{1}{2} [3T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(s, t, u) + T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(t, s, u) + T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(u, t, s)], \\
T_{\pi\pi\rightarrow K\bar{K}}^{I=0}(s, t, u) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(u, s, t) + T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(t, s, u)], \\
T_{\pi\pi\rightarrow\eta\eta}^{I=0}(s, t, u) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} T_{\pi^0\eta\rightarrow\pi^0\eta}(t, s, u), \\
T_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}^{I=0}(s, t, u) &= T_{K^+K^-\rightarrow K^+K^-}(s, t, u) + T_{K^0\bar{K}^0\rightarrow K^+K^-}(s, t, u), \\
T_{K\bar{K}\rightarrow\eta\eta}^{I=0}(s, t, u) &= -T_{K^0\eta\rightarrow K^0\eta}(t, s, u), \\
T_{\eta\eta\rightarrow\eta\eta}^{I=0}(s, t, u) &= \frac{1}{2} T_{\eta\eta\rightarrow\eta\eta}(s, t, u).
\end{aligned} \tag{3-22}$$

$I = 1/2$ 散射道的振幅为

$$\begin{aligned}
T_{K\pi\rightarrow K\pi}^{I=1/2}(s, t, u) &= \frac{3}{2} T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(u, t, s) - \frac{1}{2} T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(s, t, u), \\
T_{K\pi\rightarrow K\eta}^{I=1/2}(s, t, u) &= -\sqrt{3} T_{K^0\pi^0\rightarrow K^0\eta}(s, t, u), \\
T_{K\eta\rightarrow K\eta}^{I=1/2}(s, t, u) &= T_{K^0\eta\rightarrow K^0\eta}(s, t, u).
\end{aligned} \tag{3-23}$$

$I = 1$ 散射道的振幅为

$$\begin{aligned}
 T_{\pi\pi\rightarrow\pi\pi}^{I=1}(s, t, u) &= \frac{1}{2}(T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(t, s, u) - T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(u, t, s)), \\
 T_{\pi\pi\rightarrow K\bar{K}}^{I=1}(s, t, u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(u, s, t) - T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(t, s, u)), \\
 T_{\pi\eta\rightarrow\pi\eta}^{I=1}(s, t, u) &= T_{\pi^0\eta\rightarrow\pi^0\eta}(s, t, u), \\
 T_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}^{I=1}(s, t, u) &= T_{K^+K^-\rightarrow K^+K^-}(s, t, u) - T_{K^0\bar{K}^0\rightarrow K^+K^-}(s, t, u), \\
 T_{K\bar{K}\rightarrow\pi\eta}^{I=1}(s, t, u) &= \sqrt{2}T_{K^0\pi^0\rightarrow K^0\eta}(t, s, u).
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

$I = 3/2$ 和 $I = 2$ 散射道的振幅分别为

$$\begin{aligned}
 T_{K\pi\rightarrow K\pi}^{I=3/2}(s, t, u) &= T_{K^+\pi^+\rightarrow K^+\pi^+}(s, t, u), \\
 T_{\pi\pi\rightarrow\pi\pi}^{I=2}(s, t, u) &= \frac{1}{2}(T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(t, s, u) - T_{\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^0\pi^0}(u, t, s)).
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

3.1.4 么正化方法

手征微扰论是按照 $p/(4\pi f_\pi)$ 的幂次做展开的，所以它只能适用于低能物理区域。为了描述更高能量的物理过程，我们需要对 χPT 的计算结果做延拓。延拓的途径并不唯一，这里我们采用么正化的方法。么正性是量子场论的一条基本的公理，它反映的是几率守恒。在理论上么正化方法相当于对高阶修正的重求和，这使得 χPT 的计算结果能够延拓到更高的能标，大约在 1GeV 左右。

么正化方法有两种，第一种称为多道逆振幅法 (IAM)^[36]，其具体的操作方法如下。任意一个满足么正性的散射振幅矩阵可以表示为

$$T_J = (\text{Re}[T_J^{-1}] - i\Sigma)^{-1}, \tag{3-26}$$

其中矩阵的每一个分量指标代表一个散射道。这实际上是一个恒等式，显然有 $\Sigma = -\text{Im}[T_J^{-1}]$ 。接下来需要计算 $\text{Re}[T_J^{-1}]$ ，首先对 T_J 做微扰展开并取逆

$$\begin{aligned}
 T_J &= T_J^{(2)} + T_J^{(4)} + \dots \\
 \implies T_J^{-1} &= \left(T_J^{(2)} + T_J^{(4)} + \dots\right)^{-1} \\
 &= \left(\left(1 + T_J^{(4)}T_J^{(2)-1} + \dots\right)T_J^{(2)}\right)^{-1} \\
 &= T_J^{(2)-1} \left(1 + T_J^{(4)}T_J^{(2)-1} + \dots\right)^{-1} \\
 &= T_J^{(2)-1} \left(1 - T_J^{(4)}T_J^{(2)-1} + \dots\right).
 \end{aligned} \tag{3-27}$$

考虑到树图振幅 $T_J^{(2)}$ 是个实矩阵，可以得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[T_J^{-1}] &= T_J^{(2)-1} \left(1 - \operatorname{Re}[T_J^{(4)}]T_J^{(2)-1} + \dots \right), \\ \operatorname{Im}[T_J^{-1}] &= T_J^{(2)-1} \left(-\operatorname{Im}[T_J^{(4)}]T_J^{(2)-1} + \dots \right).\end{aligned}\quad (3-28)$$

其中 $T_J^{(2)-1}$ 和 $\operatorname{Re}[T_J^{(4)}]$ 都可以用微扰方法计算出来。此外我们可以进一步简化其形式，将其带入公式 (3-26) 可以得到

$$\begin{aligned}T_J &= \left[T_J^{(2)-1} \left(1 - \operatorname{Re}[T_J^{(4)}]T_J^{(2)-1} + \dots \right) - i\Sigma \right]^{-1} \\ &= \left[T_J^{(2)-1} \left(T_J^{(2)} - \operatorname{Re}[T_J^{(4)}] - iT_J^{(2)}\Sigma T_J^{(2)} + \dots \right) T_J^{(2)-1} \right]^{-1} \\ &= T_J^{(2)} \left(T_J^{(2)} - \operatorname{Re}[T_J^{(4)}] - iT_J^{(2)}\Sigma T_J^{(2)} + \dots \right)^{-1} T_J^{(2)} \\ &= T_J^{(2)} \left(T_J^{(2)} - \operatorname{Re}[T_J^{(4)}] - i\operatorname{Im}[T_J^{(4)}] + \dots \right)^{-1} T_J^{(2)} \\ &= T_J^{(2)} \left(T_J^{(2)} - T_J^{(4)} + \dots \right)^{-1} T_J^{(2)} \\ &\approx T_J^{(2)} \left(T_J^{(2)} - T_J^{(4)} \right)^{-1} T_J^{(2)}.\end{aligned}\quad (3-29)$$

从上式可以看出，只需要用微扰论计算出 $T_J^{(2)}$ 和 $T_J^{(4)}$ ，并且对它们做所有阶的重求和就可以得到么正化的散射振幅矩阵。在重求和的操作当中，我们只需要对矩阵作取逆的操作，除了要对 $T_J^{(4)}$ 做单圈图计算，不需要做额外的更高阶圈图计算。

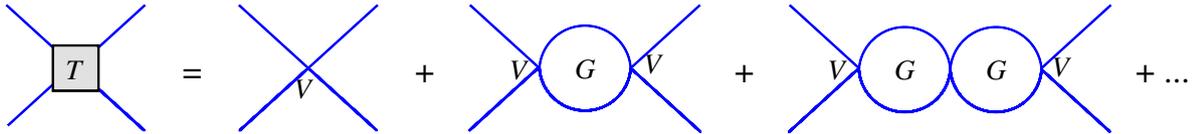


图 3-1 所有的 s-道散射振幅的重求和。

Figure 3-1 Resummation of all the s-channel scattering amplitudes.

上面提到的重求和的概念可以通过图 3-1 来理解，实际上这是得到么正化的散射振幅矩阵的第二种方法。其中我们将所有的 S 道 $O(p^4)$ 阶的修正图进行了求和，最终也能得到和 IAM 方法给出的相同的结果

$$\begin{aligned}T &= T^{(2)} + T^{(4)} + T^{(4)}(T^{(2)})^{-1}T^{(4)} + T^{(4)}(T^{(2)})^{-1}T^{(4)}(T^{(2)})^{-1}T^{(4)} + \dots \\ &= T^{(2)} + (1 + T^{(4)}(T^{(2)})^{-1} + T^{(4)}(T^{(2)})^{-1}T^{(4)}(T^{(2)})^{-1} + \dots)T^{(4)} \\ &= T^{(2)} + (1 - T^{(4)}(T^{(2)})^{-1})^{-1}T^{(4)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - T^{(4)}(T^{(2)})^{-1})^{-1}((1 - T^{(4)}(T^{(2)})^{-1})T^{(2)} + T^{(4)}) \\
 &= (1 - T^{(4)}(T^{(2)})^{-1})^{-1}T^{(2)} \\
 &= T^{(2)}(T^{(2)} - T^{(4)})^{-1}T^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

3.2 介子低能形状因子

3.2.1 标量形状因子

两介子系统的类时标量形状因子定义为

$$B_0 F_{S,i}^{\bar{q}q}(s) \equiv \langle a_i(p_{a_i}) b_i(p_{b_i}) | \bar{q}q | 0 \rangle, \tag{3-31}$$

下标 i 表示相互作用道的指标, $\{a_i, b_i\}$ 表示第 i 个道中的粒子, $s = (p_{a_i} + p_{b_i})^2$ 。标量形状因子的么正关系表示为

$$2\text{Im}F_{S,i}^{\bar{q}q}(s) = \sum_j \frac{|\vec{p}_j|}{4\pi\sqrt{s}} (T_0^*(s))_{ji} F_{S,j}^{\bar{q}q}(s), \tag{3-32}$$

其中分波振幅的下标 0 表示 $J = 0$ 的分量。

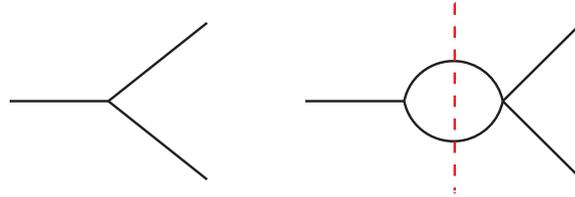


图 3-2 弹性散射区域内, 形状因子的虚部由在壳的中间态粒子产生。

Figure 3-2 In elastic region, the imaginary part of a form factor is caused by the on shell configuration of the intermediate states.

图 3-2 给出了头两项树图和单圈图修正的形状因子的虚部。另外 \mathbf{T} 时间反演不变性给出 $(T_0)_{ij} = (T_0)_{ji}$ 。这样我们可以把么正关系表示为如下矩阵形式

$$\text{Im}F_S^{\bar{q}q}(s) = T_0^*(s)\Sigma(s)F_S^{\bar{q}q}(s), \tag{3-33}$$

其中 $(\Sigma(s))_{ij} \equiv \delta_{ij} \frac{|\vec{p}_i|}{8\pi\sqrt{s}} \Theta(s - s_{\text{th}}^i)$, $s_{\text{th}}^i = (m_{a_i} + m_{b_i})^2$ 是 i 道中粒子的产生阈值。如果对 $F^{\bar{q}q}(s)$ 做逐阶展开

$$F_S = F_S^{(0)} + F_S^{(2)} + \dots, \tag{3-34}$$

再利用散射振幅矩阵的逐阶展开: $T_0 = T_0^{(2)} + T_0^{(4)} + \dots$, 可以得到微扰形式的标量形状因子满足的逐阶么正关系

$$\begin{aligned}\text{Im}F_S^{(0)} &= 0 \\ \text{Im}F_S^{(2)} &= T_0^{(2)}\Sigma F_S^{(0)} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{3-35}$$

接下来, 我们将用 χPT 计算精确到 $O(p^2)$ 阶的标量形状因子, 之后用 IAM 方法给出其么正化后的形式。因为 χPT 中的基本场自由度为赝标介子而不是夸克, 我们需要用赝标介子场表示 QCD 中的标量密度算符

$$S_{ij}(x) \equiv \bar{Q}_i(x)Q_j(x),\tag{3-36}$$

其中 $Q = (u, d, s)^T$ 。先来看如何从 QCD 拉氏量出发得到 QCD 中的标量流 \bar{Q}_iQ_j 。如果把 QCD 拉氏量中的质量矩阵 M 替换成一个任意的外源矩阵 X_q , 并对左右手夸克场做分离, QCD 拉氏量表示为

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_L i\not{D}Q_L + \bar{Q}_R i\not{D}Q_R - \bar{Q}_R X_q Q_L - \bar{Q}_L X_q^\dagger Q_R - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}.\tag{3-37}$$

然后将 QCD 拉氏量对 X_q 的矩阵元做偏导, 再把 X_q 取为质量矩阵 M , 我们就能得到 QCD 中的标量流

$$S_{ij} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (X_q)_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (X_q^\dagger)_{ij}} \right) \Big|_{X_q=M}.\tag{3-38}$$

作为 QCD 的低能有效理论, χPT 在低能区域能描述与 QCD 相同的物理。所以如果用同样的方法对 χPT 不同阶的拉氏量进行操作: 先对 X_q 的矩阵元做偏导, 之后再把 X_q 取为质量矩阵 M , 就能得到 χPT 理论中的标量场算符

$$\begin{aligned}S_{ij}^{(2)} &= -\frac{f^2 B_0}{2} [U^\dagger + U]_{ji}, \\ S_{ij}^{(4)} &= -2B_0 L_4 \text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)](U^\dagger + U)_{ji} - 2B_0 L_5 (U^\dagger(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger) + (\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)U)_{ji} \\ &\quad - 8B_0^2 L_6 \text{Tr}[MU^\dagger + UM^\dagger](U^\dagger + U)_{ji} - 8B_0^2 L_7 \text{Tr}[MU^\dagger - UM^\dagger](U^\dagger - U)_{ji} \\ &\quad - 8B_0^2 L_8 (UM^\dagger U + U^\dagger MU^\dagger)_{ji}.\end{aligned}\tag{3-39}$$

对 U 做指数展开就可以得到标量流 $S^{(2)}$ 用赝标介子表示的形式

$$\bar{u}u = B_0[-f^2 + K^+K^- + \frac{\pi_0\eta}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\pi_0^2 + \pi_+\pi_-] + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 \bar{d}d &= B_0[-f^2 + K^0\bar{K}^0 - \frac{\pi_0\eta}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\pi_0^2 + \pi_+\pi_-] + \dots, \\
 \bar{s}s &= B_0[-f^2 + K^0\bar{K}^0 + K^+K^- + \frac{2}{3}\eta^2] + \dots, \\
 \bar{u}d &= B_0[K^0K^- + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta\pi^-] + \dots, \\
 \bar{u}s &= B_0[\bar{K}^0\pi^- - \frac{K^-\eta}{\sqrt{6}} + \frac{K^-\pi_0}{\sqrt{2}}] + \dots, \\
 \bar{d}s &= B_0[-\frac{\bar{K}^0\eta}{\sqrt{6}} - \frac{\bar{K}^0\pi_0}{\sqrt{2}} + K^-\pi^+] + \dots.
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

通过计算公式 (3-39) 给出的流算符在两个介子态和真空态之间的矩阵元，并将计算精确到单圈阶如图 3-3 所示，我们可以得到标量形状因子的解析表达式。具体结果在附录中给出。

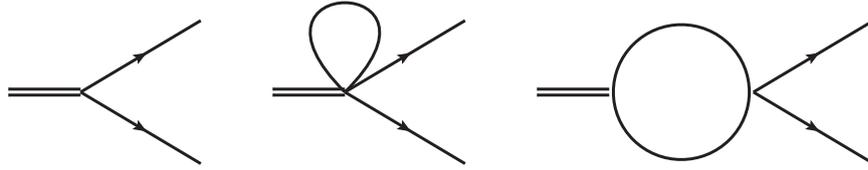


图 3-3 形状因子树图阶和单圈阶的费曼图。这里并未给出波函数重整化图。

Figure 3-3 Feynman diagrams for a generic form factor at tree-level and one-loop level. The wave function renormalization diagrams are not shown here.

和介子-介子散射振幅的计算一样，我们也需要对形状因子做么正化处理。通过观察公式(3-33)，我们发现满足这一么正性的标量形状因子可以表示为

$$F_S = T_0 A, \tag{3-41}$$

其中 A 是一个任意的实矢量，其证明如下

$$T_0^* \Sigma F_S = T_0^* \Sigma T_0 A = (\text{Im} T_0) A = \text{Im} F_S, \tag{3-42}$$

其中第二步用到了 T_0 的么正性关系。因此需要在 $O(p^4)$ 阶构造出实矢量 A 。实际上 A 可以构造为

$$A = (T_0^{(2)})^{-1} (F_S^{(0)} + F_S^{(2)} - T_0^{(4)} (T_0^{(2)})^{-1} F_S^{(0)}). \tag{3-43}$$

这样我们就能到么正化的标量形状因子形式

$$F_S = F_S^{(0)} + T_0^{(2)} (T_0^{(2)} - T_0^{(4)})^{-1} F_S^{(2)}. \tag{3-44}$$

3.2.2 矢量形状因子

矢量流在两介子态和真空态之间的矩阵元可以参数化为两个矢量形状因子

$$\langle a_i(p_{a_i})b_i(p_{b_i})|\bar{q}'\gamma^\mu q|0\rangle \equiv F_{V_{+,i}}^{\bar{q}'q}(s)(p_{a_i} - p_{b_i})^\mu + F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}(s)(p_{a_i} + p_{b_i})^\mu. \quad (3-45)$$

实际上这两个形状因子之间不是互相独立的， $F_{V_{+,i}}$ 可以用 $F_{V_{-,i}}$ 和标量形状因子表示出来。利用运动方程

$$\partial_\mu(\bar{q}'\gamma^\mu q) = i(m_{q'} - m_q)\bar{q}'q, \quad (3-46)$$

我们可以得到 $F_{V_{+,i}}$ 和 $F_{V_{-,i}}$ 之间的关系

$$F_{V_{+,i}}^{\bar{q}'q}(s) = \frac{1}{s} \left[B_0(m_{q'} - m_q)F_{S,i}^{\bar{q}'q}(s) - (m_{a_i}^2 - m_{b_i}^2)F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}(s) \right]. \quad (3-47)$$

因此我们只需要计算 $F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}$ 。此外定义

$$\tilde{F}_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}(s) \equiv \mathbb{P}F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}(s), \quad (3-48)$$

其中 $\mathbb{P}_{ij} \equiv |\vec{p}_i|\delta_{ij}$ 。这个新定义的形状因子满足么正关系

$$\text{Im}\tilde{F}_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q} = T_1^*\Sigma\tilde{F}_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}. \quad (3-49)$$

注意到 \tilde{F} 对应于 $J = 1$ 的分波散射振幅。然而上式关系只在 s 处于最高阈值之上时才严格满足，其中 \mathbb{P} 的所有分量都是实的。当 s 处在最低和最高阈值之间时，严格的么正关系应该为

$$\text{Im}F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q} = (\mathbb{P}^{-1})^*T_1^*\Sigma\mathbb{P}F_{V_{-,i}}^{\bar{q}'q}, \quad (3-50)$$

其中等式右边用的是 $(\mathbb{P}^{-1})^*$ 而不是 \mathbb{P}^{-1} ，因此 T_1^* 在最高阈值之下的动力学虚部可以和 $(\mathbb{P}^{-1})^*$ 的虚部相抵消。

接下来将用 χPT 计算精确到 $O(p^2)$ 阶的矢量形状因子。根据 $SU(3)_V$ 与 $U(1)_B$ 对称性 (B 代表重子数)，存在两种矢量流，它们分别是 $SU(3)$ 八重态流 V_μ^a 和单态流 V_μ^0 ，它们分别定义为

$$V_\mu^a = \bar{Q}T^a\gamma_\mu Q, \quad V_\mu^0 = \bar{Q}\gamma_\mu Q. \quad (3-51)$$

从 QCD 拉氏量出发，得到这两个流最直接的方法是先把 $SU(3)_R \times SU(3)_L$ 和 $U(1)_B$ 全局对称性推广到定域对称性，这需要引入外部矢量场 l_μ ， r_μ 和 $v_\mu^{(s)}$ 和左右手 $SU(3)$ 八重态流以及单态流的耦合，然后将拉氏量对外场做偏导

$$V_\mu^0 = 3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^{(s)}}, \quad V_\mu^a = \left(\frac{\partial}{\partial r_\mu^a} + \frac{\partial}{\partial l_\mu^a} \right) \mathcal{L}. \quad (3-52)$$

通过对 U 场展开, 我们就可以得到 χPT 中的用赝标介子表示的矢量流算符。但是注意到因为介子的重子数为零, 所以有 $V_\mu^0 = 0$ 。另外, 由于事实上并没有外部矢量场和系统耦合, 在求完导数之后要把外部矢量场置零。这意味着展开的拉氏量中只有关于 l_μ 和 r_μ 的线性项才对矢量形状因子有贡献。八重态矢量流在 χPT 中领头阶 $\mathcal{O}(p^2)$ 和次领头阶 $\mathcal{O}(p^4)$ 的形式分别为

$$\begin{aligned}
 V_{a\mu}^{(2)} &= -\frac{if^2}{4}\text{Tr}[\lambda^a[U, \partial_\mu U^\dagger]], \\
 V_{a\mu}^{(4)} &= -2iL_1\text{Tr}[(\partial_\nu U)(\partial^\nu U^\dagger)]\text{Tr}[\lambda^a[U, \partial_\mu U^\dagger]] - iL_2\{\text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^\dagger)]\text{Tr}[\lambda^a[U, \partial^\nu U^\dagger]] \\
 &\quad + \text{Tr}[(\partial_\nu U)(\partial_\mu U^\dagger)]\text{Tr}[\lambda^a[U^\dagger, \partial^\nu U]]\} \\
 &\quad - iL_3\text{Tr}[(\lambda^a, U)\partial_\mu U^\dagger + \partial_\mu U[\lambda_a, U^\dagger]](\partial_\nu U)(\partial^\nu U^\dagger) \\
 &\quad - 2iB_0L_4\text{Tr}[\lambda^a[U, \partial_\mu U^\dagger]]\text{Tr}[MU^\dagger + UM^\dagger] \\
 &\quad - iB_0L_5\text{Tr}[(\lambda^a, U)\partial_\mu U^\dagger + \partial_\mu U[\lambda_a, U^\dagger]](MU^\dagger + UM^\dagger) \\
 &\quad + iL_9\text{Tr}[\lambda^a\partial_\nu((\partial^\nu U)(\partial_\mu U^\dagger) - (\partial_\mu U)(\partial^\nu U^\dagger))]. \tag{3-53}
 \end{aligned}$$

$V_{a\mu}^{(2)}$ 的赝标介子场表示形式为 ($V_\mu^0 = \bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d + \bar{s}\gamma_\mu s = 0$)

$$\begin{aligned}
 \bar{u}\gamma^\mu d &= V_1^\mu + iV_2^\mu \\
 &= -iK^0\overleftrightarrow{\partial}^\mu K^- + i\sqrt{2}\pi^0\overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^- + \dots, \\
 \bar{u}\gamma^\mu s &= V_4^\mu + iV_5^\mu \\
 &= i\pi^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{K}^0 - i\sqrt{\frac{3}{2}}K^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \eta - \frac{i}{\sqrt{2}}K^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^0 + \dots, \\
 \bar{d}\gamma^\mu s &= V_6^\mu + iV_7^\mu \\
 &= -iK^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^+ + i\sqrt{\frac{3}{2}}\eta\overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{K}^0 - \frac{i}{\sqrt{2}}\pi^0\overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{K}^0 + \dots, \\
 \bar{u}\gamma^\mu u &= \frac{1}{\sqrt{3}}V_8^\mu + V_3^\mu \\
 &= iK^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu K^+ + i\pi^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^+ + \dots, \\
 \bar{d}\gamma^\mu d &= \frac{1}{\sqrt{3}}V_8^\mu - V_3^\mu \\
 &= -iK^0\overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{K}^0 - i\pi^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu \pi^+ + \dots, \\
 \bar{s}\gamma^\mu s &= -\frac{2}{\sqrt{3}}V_8^\mu \\
 &= iK^0\overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{K}^0 - iK^-\overleftrightarrow{\partial}^\mu K^+ + \dots. \tag{3-54}
 \end{aligned}$$

最后将以上得到的矢量流算符作用在双介子态和真空态之间就能得到矢量形状因子，附录中给出了其解析表达式。

通过比较标量形状因子 F_S 和矢量形状因子的么正性关系，可以发现它们之间仅有的差别在于两点：(1) 分波的角动量不同。(2) 矢量形状因子么正性等式中出现的是 \tilde{F} 而不是 F 。因此我们只要在公式(3-44)中做替换 $T_0 \rightarrow T_1$ 和 $F_S \rightarrow \tilde{F}_{V-}$ ，就能得到么正化的矢量形状因子

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{V-} &= \tilde{F}_{V-}^{(0)} + T_1^{(2)}(T_1^{(2)} - T_1^{(4)})^{-1}\tilde{F}_{V-}^{(2)}, \\ \Rightarrow F_{V-} &= F_{V-}^{(0)} + \mathbb{P}^{-1}T_1^{(2)}(T_1^{(2)} - T_1^{(4)})^{-1}\mathbb{P}F_{V-}^{(2)}.\end{aligned}\quad (3-55)$$

3.2.3 张量形状因子

这一小节计算两粒子系统的张量形状因子，其定义形式为

$$\langle a_i(p_{a_i})b_i(p_{b_i})|\bar{q}'\sigma^{\mu\nu}q|0\rangle \equiv i\frac{\Lambda_2}{f_\pi^2}(p_{a_i}^\mu p_{b_i}^\nu - p_{a_i}^\nu p_{b_i}^\mu)F_{T,i}^{\bar{q}'q}(s), \quad (3-56)$$

其中 Λ_2 是在引入外部张量源时出现的一个低能系数 (LEC)。张量形状因子满足的么正关系和矢量形状因子 F_{V-} 类似

$$\text{Im}F_T^{\bar{q}'q} = (\mathbb{P}^{-1})^*T_1^*\Sigma\mathbb{P}F_T^{\bar{q}'q}. \quad (3-57)$$

同样，它和 $J = 1$ 的分波相关。

和标量或矢量的情况不同的是，用 χPT 推导张量流时需要引入的外部张量流在传统的手征拉氏量中是没有的。文献 [37] 首先给出了带张量流的手征拉氏量。夸克层面 P, T 宇称为偶的张量流算符定义为

$$\mathcal{L} = \bar{Q}\sigma^{\mu\nu}\bar{t}_{\mu\nu}Q \quad (3-58)$$

其中 $\bar{t}_{\mu\nu}$ 是厄米的张量流算符。在 χPT 中，我们能够构造出的和张量流相耦合的领头阶拉氏量是 $O(p^4)$ 阶的，其形式为

$$\mathcal{L}_T^{(4)} = -i\Lambda_2\text{Tr}[t_+^{\mu\nu}u_\mu u_\nu], \quad (3-59)$$

$$u_\mu = i\{u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger\}, \quad t_\pm^{\mu\nu} = u^\dagger t^{\mu\nu} u^\dagger \pm ut^{\mu\nu\dagger}u, \quad (3-60)$$

其中 $t^{\mu\nu}$ 和 $t^{\mu\nu\dagger}$ 表示为

$$\begin{aligned}t^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho})\bar{t}_{\lambda\rho}, \\ t^{\mu\nu\dagger} &= \frac{1}{4}(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho})\bar{t}_{\lambda\rho}.\end{aligned}\quad (3-61)$$

在 $O(p^6)$ 阶，对张量形状因子有贡献的拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T^{(6)} = & iC_{34} \text{Tr}(t_+^{\mu\nu} \{\chi_+, u_\mu u_\nu\}) + iC_{35} \text{Tr}(t_+^{\mu\nu} u_\mu \chi_+ u_\nu) + iC_{36} \text{Tr}(\chi_+) \text{Tr}(t_+^{\mu\nu} u_\mu u_\nu) \\ & + iC_{37} \text{Tr}(t_+^{\mu\nu}) \text{Tr}[\chi_+ u_\mu u_\nu] + iC_{88} i \text{Tr}(\nabla^\rho t_+^{\mu\nu} [h_{\mu\rho}, u_\nu]) + iC_{89} i \text{Tr}(\nabla_\mu t_+^{\mu\nu} [h_{\nu\rho}, u^\rho]) \\ & + C_{106} \text{Tr}(t_+^{\mu\nu} [\chi_{-\mu}, u_\nu]) + iC_{107} \text{Tr}(t_{+\mu\nu} h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha). \end{aligned} \quad (3-62)$$

这些拉氏量被用来抵消张量形状因子的单圈修正中的紫外发散。我们定义重整化的 LECs C_i^r 和发散系数 γ_i^T 为

$$C_i^r = C_i - \frac{\Lambda_2}{f^2} \lambda \gamma_i^T. \quad (3-63)$$

实际上要消除所有的发散我们不需要固定所有的 $\{\gamma_i^T\}$ ，只需要固定其中的一部分：

$$\begin{aligned} \gamma_{34}^T + \frac{1}{2}(\gamma_{89}^T + \gamma_{106}^T + \gamma_{107}^T) &= -\frac{1}{24}, \\ \gamma_{35}^T + \gamma_{89}^T + \gamma_{106}^T + \gamma_{107}^T &= -\frac{3}{4}, \\ \gamma_{36}^T &= -\frac{11}{18}, \quad \gamma_{37}^T = -\frac{1}{2}, \\ \gamma_{88}^T - \gamma_{89}^T - \gamma_{107}^T &= -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3-64)$$

要计算出张量形状因子我们需要知道 Λ_2 和 C_i^r 随重整化能标 μ 的演化。然而目前格点的计算并没有给出 LECs 值确切的能标演化行为。这里我们采用了文献^[38]中通过第一性原理估计有效作用量的方法给出的结果。虽然这种方法无法给出重整化的 LECs 是如何随能标演化的以至于无法确定如何将计算结果通过适当的减除方案和重整化的 LECs 匹配，但是我们可以假定文献^[38]中的 LECs 是定义在一个未知的能标 $\tilde{\mu}$ ，然后利用重整化群将其演化到能标 $\mu = m_\rho$

$$C_i^r(m_\rho) = C_i^r(\tilde{\mu}) - \frac{\gamma_i^T}{32\pi^2} \frac{\Lambda_2}{f^2} \ln \frac{m_\rho^2}{\tilde{\mu}^2}. \quad (3-65)$$

表 3-2 给出了我们需要的 LECs 值。

在 QCD 的夸克胶子层面上，张量流算符定义为

$$T_{ij}^{\mu\nu} \equiv \bar{q}_i \sigma^{\mu\nu} q_j. \quad (3-66)$$

类似于构造手征矢量流的方法，利用 $\mathcal{O}(p^4)$ (3-59) 和 $\mathcal{O}(p^6)$ (3-62) 的手征拉氏量，通过对张量外源做偏导我们可以得到张量流算符 $T_{\mu\nu}^{(4)}$ 和 $T_{\mu\nu}^{(6)}$ 的形式

$$T_{ij}^{(4)\mu\nu} = -\frac{i\Lambda_2}{4} [u^\dagger [u^\mu, u^\nu] u^\dagger - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} u^\dagger u_\lambda u_\rho u^\dagger + u [u^\mu, u^\nu] u + i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} u u_\lambda u_\rho u]_{ji},$$

表 3-2 对应于张量外源^[38] 的手征拉氏量的低能常数。其中 Λ_2 的单位是 $10^{-3}b_0$ ，而其他量的单位是 $10^{-3}\text{GeV}^{-2}b_0$ ， $b_0 = 1.32\text{GeV}$ 。重整化标度假定为 $\mu = m_\rho$ （具体参见正文中的讨论）。

Table 3-2 Low energy constants for Chiral Lagrangian with tensor sources derived from Ref.^[38]. Λ_2 is given in units of $10^{-3}b_0$ while the remainders are given in units of $10^{-3}\text{GeV}^{-2}b_0$ where $b_0 = 1.32\text{GeV}$. The renormalization scale is assumed to be $\mu = m_\rho$ (see the discussion in the text).

Λ_2	C_{34}^r	C_{35}^r	C_{88}^r	C_{89}^r	C_{106}^r	C_{107}^r
13.79	0.01	-4.14	-1.44	10.26	-9.04	-0.09

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(6)\mu\nu} = & \frac{i}{f^2} (\partial^{[\mu} \phi_a) (\partial^{\nu]} \phi_b) \left(C_{34} \{\chi, \lambda^a \lambda^b\} + C_{35} \lambda^a \chi \lambda^b + C_{36} \text{Tr}[\chi] \lambda^a \lambda^b \right. \\
 & \left. + C_{37} \text{Tr}[\chi \lambda^a \lambda^b] + \frac{1}{2} C_{106} [\{\chi, \lambda^a\}, \lambda^b] \right)_{ji} \\
 & + \frac{2i}{f^2} C_{107} (\partial^\alpha \partial^{[\mu} \phi_a) (\partial^{\nu]} \partial_\alpha \phi_b) (\lambda^a \lambda^b)_{ji} \\
 & - \frac{i}{f^2} [\lambda^a, \lambda^b]_{ji} [C_{88} \partial^\rho ((\partial^{[\mu} \partial_\rho \phi_a) \partial^{\nu]} \phi_b) + C_{89} \partial^{[\mu} ((\partial^{\nu]} \partial_\rho \phi_a) \partial^\rho \phi_b)] \\
 & + \mathcal{O}(\phi^3),
 \end{aligned} \tag{3-67}$$

其中 $A^{[\mu} B^{\nu]} \equiv A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu$. $T^{(4)\mu\nu}$ 的赝标介子表示形式为

$$\begin{aligned}
 \bar{u} \sigma^{\mu\nu} u &= \frac{i\Lambda_2}{f^2} (-\partial_\mu K^+ \partial_\nu K^- + \partial_\mu K^- \partial_\nu K^+ - \partial_\mu \pi^+ \partial_\nu \pi^- + \partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^+) + \dots, \\
 \bar{d} \sigma^{\mu\nu} d &= \frac{i\Lambda_2}{f^2} (\partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu K^0 - \partial_\mu K^0 \partial_\nu \bar{K}^0 + \partial_\mu \pi^+ \partial_\nu \pi^- - \partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^+) + \dots, \\
 \bar{s} \sigma^{\mu\nu} s &= \frac{i\Lambda_2}{f^2} (-\partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu K^0 + \partial_\mu K^0 \partial_\nu \bar{K}^0 + \partial_\mu K^+ \partial_\nu K^- - \partial_\mu K^- \partial_\nu K^+) + \dots, \\
 \bar{u} \sigma^{\mu\nu} d &= \frac{i\Lambda_2}{f^2} (\partial_\mu K^- \partial_\nu K^0 - \partial_\mu K^0 \partial_\nu K^- + \sqrt{2} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^- - \sqrt{2} \partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^0) + \dots, \\
 \bar{u} \sigma^{\mu\nu} s &= \frac{i\Lambda_2}{2f^2} (-2\partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu \pi^- + 2\partial_\mu \pi^- \partial_\nu \bar{K}^0 + \sqrt{6} \partial_\mu \eta \partial_\nu K^- + \sqrt{2} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu K^- \\
 & - \sqrt{6} \partial_\mu K^- \partial_\nu \eta - \sqrt{2} \partial_\mu K^- \partial_\nu \pi^0) + \dots, \\
 \bar{d} \sigma^{\mu\nu} s &= \frac{i\Lambda_2}{2f^2} (\sqrt{6} \partial_\mu \eta \partial_\nu \bar{K}^0 - \sqrt{2} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \bar{K}^0 - \sqrt{6} \partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu \eta + \sqrt{2} \partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu \pi^0 \\
 & + 2\partial_\mu \pi^+ \partial_\nu K^- - 2\partial_\mu K^- \partial_\nu \pi^+) + \dots.
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

张量形状因子的解析表达式已在附录中给出。然而，我们同样需要对其做么正化处

理。张量形状因子的么正关系和矢量形状因子相同，它们具有相同的 IAM 形式

$$\Rightarrow F_T = F_T^{(0)} + \mathbb{P}^{-1} T_1^{(2)} (T_1^{(2)} - T_1^{(4)})^{-1} \mathbb{P} F_T^{(2)}. \quad (3-69)$$

3.3 本章总结

本章系统地研究了两介子系统的标量、矢量和张量形状因子。我们先用手征微扰论计算出形状因子精确到次领头阶的解析结果，然后使用 IAM 方法对所有 s-道的圈图修正贡献重求和，从而使得形状因子满足么正化关系并且能适用于较高的能量区域，大约在 1GeV 左右。在第四章中，我们将研究一些重味介子弱衰变过程，包括半轻 $D \rightarrow \pi\pi$ 过程以及半轻 FCNC 过程 $B_s/D_s \rightarrow \pi\pi$ 。这些过程的共同之处在于其末态的两个 π 介子都来源于一个 S-波共振态 $f_0(980)$ 。 $f_0(980)$ 是一种奇异的共振态，它的质量接近 $K\bar{K}$ 阈值从而使得传统的窄宽度近似失效。这意味着在计算强子跃迁矩阵元时末态两介子相互作用的效应不能被忽略。要描述低能轻介子相互作用需要用到本章给出的介子低能形状因子的计算结果。在第四章中我们将阐述如何用介子形状因子修正窄宽度近似，并用光锥 QCD 求和规则计算重味强子跃迁形状因子。

第四章 多体半轻 $D(D_s), B_s$ 衰变中的手征动力学和 S-波贡献

CKM 矩阵元作为标准模型中重要的参数，对于我们理解标准模型中的 CP 破坏至关重要。 D 介子的半轻弱衰变是一类非常理想的能够确定 $|V_{cd}|$ 的过程。半轻过程中弱和强相互作用是分离的，实验上这一过程的信号十分干净。此外，由于轻子不参与强相互作用，所有的强动力学都包含在了形状因子里面，人们可以通过半轻 D 介子弱衰变研究重到轻跃迁过程中的动力学机制。目前 $D \rightarrow \rho$ 的形状因子已经在 CLEO-c 实验上通过衰变道 $D^0 \rightarrow \rho^- e^+ \nu_e$ 和 $D^+ \rightarrow \rho^0 e^+ \nu_e$ 测得^[39]。因为 ρ 介子的宽度很宽， $D \rightarrow \rho \ell \bar{\nu}_\ell$ 实际上是一个准四体过程 $D \rightarrow \pi \pi \ell \bar{\nu}_\ell$ ，其中 ρ 可以通过 P-波的 $\pi\pi$ 系统重建出来。然而其他的 $\pi\pi$ 共振态或者非共振态可能和 P-波部分相干，因此需要同时考虑 S-波在 $D \rightarrow \pi \pi \ell \bar{\nu}_\ell$ 中的贡献。

此外，超出标准模型的新物理 (NP) 可以通过精确测量低能过程来间接地寻找。其中一个理想的方法是研究味道改变中性流 (FCNC) 过程。例如稀有衰变 $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$ ，它在标准模型中发生几率很小，因此对潜在的新物理很敏感。遍举衰变模式 $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$ 可以提供丰富的弱衰变信息包括衰变几率、前反对称性、角分布等。但事实上 $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$ 也是一个四体衰变过程，这是因为 K^* 介子是通过 $K\pi$ 末态重建出来的，因此研究 $B \rightarrow M_1 M_2 \ell^+ \ell^-$ 更加合适，其中 $M_1 M_2$ 不同分波成分都会参与贡献^[40-42]。在许多文献中都有对 $B \rightarrow K \pi \ell^+ \ell^-$ 中 S-波贡献进行的讨论^[43-48]。在理论计算中，由于 b 夸克质量远远大于强子能标 Λ_{QCD} ，人们可以将硬散射核对强相互作用耦合常数 α_s 和幂次标度参数 Λ_{QCD}/m_b 进行展开。另一方面，末态的两个轻强子之间的相互作用必须满足么正性和解析性约束条件。

目前 LHCb 合作组对稀有衰变 $B_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \mu^-$ 进行了分析^[49, 50]，测得分支比为

$$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \mu^-) = (8.6 \pm 1.5 \pm 0.7 \pm 0.7) \times 10^{-8}, \quad (4-1)$$

其中主导贡献来自于 $B_s \rightarrow f_0(980) \mu^+ \mu^-$

$$\mathcal{B}(B_s \rightarrow f_0(980)(\rightarrow \pi^+ \pi^-) \mu^+ \mu^-) = (8.3 \pm 1.7) \times 10^{-8}. \quad (4-2)$$

另外，CLEO 和 BES 合作组也分析了衰变过程 $D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell \nu_e$ ^[49, 50]。其中 $f_0(980)$ 的贡献也是占主导的

$$\mathcal{B}(D_s \rightarrow f_0(980)(\rightarrow \pi^+ \pi^-) e^+ \nu_e) = (2.0 \pm 0.3 \pm 0.1) \times 10^{-3}. \quad (4-3)$$

而最新的 CLEO-c 数据^[51] 也给出了相似的结果

$$\mathcal{B}(D_s \rightarrow f_0(980)(\rightarrow \pi^+ \pi^-) e^+ \nu_e) = (1.3 \pm 0.2 \pm 0.1) \times 10^{-3}. \quad (4-4)$$

无论是 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 过程还是 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 过程，末态都有轻介子对产生，我们不可避免地需要处理低能区的物理。然而因为在低能区域 QCD 的微扰论不再成立，我们无法直接采用微扰的方法处理轻介子。不过从另一方面来看，因为重夸克质量标度很大，我们可以为重介子衰变过程建立因子化方法。除了理解 CP 破坏和寻找新物理， B 和 D 的半轻衰变过程也可以被用来研究轻介子的内部结构。另外，在 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 中会同时存在 $\rho(770)$ 和 $f_0(980)$ 的贡献，而 $f_0(980)$ 的结构尚未被完全理解，因此对 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 的理论计算也将有助于我们理解 $f_0(980)$ 的结构。

本章将对 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ ， $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell\bar{\nu}_\ell$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu_e$ ，以及 FCNC 过程 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-$ 和 $B_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$ 进行理论分析。我们将采用光锥 QCD 求和规则 (LCSR) 在非共振区域计算 D^- ， $\bar{D}^{(0)}$ ， D_s ， B_s 到 S-波 $\pi\pi$ 对的形状因子。其中末态 $\pi\pi$ 的低能相互作用将用相应的 $\pi\pi$ 标量形状因子描述。对于 D^-/\bar{D}^0 衰变，我们将采用么正化的手征有效理论计算 $\pi\pi$ 形状因子，而对于 D_s ， B_s 衰变我们将采用 Breit Wigner 公式拟合 $\pi\pi$ 标量形状因子，并进行对比。最后利用所得结果给出唯象的应用，其中包括微分衰变宽度、S-波贡献、前反对称性等可观测量。

4.1 共振态近似方法计算 $D \rightarrow \pi\pi$ 矩阵元

4.1.1 LCSR 框架下的 $D \rightarrow f_0$ 形状因子计算

图 4-1 给出了 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 衰变的费曼图。其中轻子可以是一个电子或缪子， $\ell = e, \mu$ 。观察者夸克可以是 u 或 d 夸克，分别对应于 $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell\bar{\nu}_\ell$ 和 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ ，注意到前者没有 S-波 f_0 的贡献，而后者既有 P-波也有 S-波的贡献。通过积分出虚的 W 玻色子，我们可以得到描述 $c \rightarrow d$ 的有效哈密顿量

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cd} [\bar{d}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)c] [\bar{\nu}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\ell] + h.c., \quad (4-5)$$

其中 G_F 是费米常数， V_{cd} 是 CKM 矩阵元。轻子对部分可以用微扰论直接计算，而强子部分的矩阵元需要用形状因子来参数化。

强子跃迁矩阵元的计算需要考虑 S-波和 P-波两种贡献。其中 S-波的贡献主要来自共振态 $f_0(980)$ ，注意到 $f_0(980)$ 是标量粒子，相应的形状因子定义为

$$\begin{aligned} & \langle f_0(p_2) | \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5c | D(p_D) \rangle \\ &= -i \left\{ F_+^{D \rightarrow f_0}(q^2) \left[P_\mu - \frac{m_D^2 - m_{f_0}^2}{q^2} q_\mu \right] + F_0^{D \rightarrow f_0}(q^2) \frac{m_D^2 - m_{f_0}^2}{q^2} q_\mu \right\}. \end{aligned} \quad (4-6)$$

其中 $F_+^{D \rightarrow f_0}$ 和 $F_0^{D \rightarrow f_0}$ 是 $D \rightarrow f_0$ 形状因子，定义动量 $P = p_D + p_2$ ， $q = p_D - p_2$ 。接下来将介绍如何用 LCSR 计算 $F_+^{D \rightarrow f_0}$ 和 $F_0^{D \rightarrow f_0}$ 。为了方便计算，我们可以定义另一

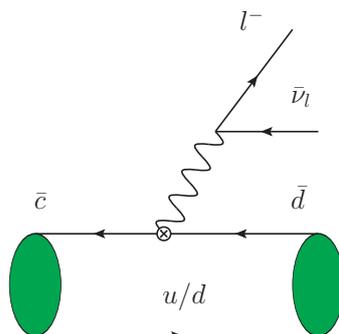


图 4-1 $D \rightarrow \pi\pi\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 衰变的费曼图。其中轻子是电子或者缪子, $\ell = e, \mu$ 。对于不同的 D 介子, 观察者夸克可以是 u 或 d 夸克。它们分别对应于 $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 和 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$ 。

Figure 4-1 Feynman diagram for the $D \rightarrow \pi\pi\ell^-\bar{\nu}_\ell$ decays. The lepton could be electron or muon, $\ell = e, \mu$. Depending on the D meson, the spectator could be u or d quark, corresponding to $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell^-\bar{\nu}_\ell$ and $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^-\bar{\nu}_\ell$.

套形状因子参数化强子矩阵元

$$\langle f_0(p_2) | \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 c | D(p_D) \rangle = -i \{ f_+(q^2)P_\mu + f_-(q^2)q_\mu \}. \quad (4-7)$$

两套形状因子之间存在如下转换关系

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= f_+(q^2), \\ F_0(q^2) &= f_+(q^2) + \frac{q^2}{m_D^2 - m_{f_0}^2} f_-(q^2). \end{aligned} \quad (4-8)$$

在第二章中, 我们通过一个简单的电磁跃迁过程介绍了 LCSR 的基本框架。LCSR 适用于重到轻的介子乃至重子衰变过程, 并且能够同时涵盖衰变过程中的硬散射部分和低能非微扰部分。在硬散射区域, 我们可以在光锥附近对算符乘积按照不同扭度 (twist) 的定域算符矩阵元做展开, 从而用光锥分布振幅 (LCDAs) 描述强子跃迁中的非微扰成分, 比如形状因子就可以表示为强子的光锥分布振幅 (LCDA) 和微扰可计算的硬核之间的卷积。其中领头阶扭度和次领头阶扭度的 LCDAs 是占主导贡献的, 而更高阶扭度的 LCDA 的贡献是被压低的。

这里将介绍如何使用 LCSR 计算 $D \rightarrow f_0(980)$ 形状因子。基于 LCSR 方法, 首先根据要描述的物理过程定义一个两点关联函数

$$\Pi(p_{f_0}, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle f_0(p_{f_0}) | T \{ j_{\Gamma_1}(x), j_{\Gamma_2}(0) \} | 0 \rangle, \quad (4-9)$$

其中 $j_{\Gamma_1} = \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 c$, j_{Γ_2} 是从真空中产生 D 介子的场算符, 并且拥有和 D 介子相同的量子数。这里我们选择 $j_{\Gamma_2} = \bar{c}i\gamma_5 d$ 。它在真空和 D 介子之间的矩阵元参数化为 D 介

子的衰变常数

$$\langle D(p_D) | \bar{c} i \gamma_5 d | 0 \rangle = \frac{m_D^2}{m_c + m_d} f_D. \quad (4-10)$$

我们需要分别在强子层面和 QCD 层面计算关联函数，然后将两者匹配起来就可以得到用求和规则表示的形状因子。在强子层面上，计算关联函数可以得到

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{HAD}}(p_{f_0}, q) &= \frac{\langle f_0(p_{f_0}) | j_{\Gamma_1} | D(p_{f_0} + q) \rangle \langle D(p_{f_0} + q) | j_{\Gamma_2} | 0 \rangle}{m_D^2 - (p_{f_0} + q)^2} \\ &+ \sum_h \frac{\langle f_0(p_{f_0}) | j_{\Gamma_1} | h(p_{f_0} + q) \rangle \langle h(p_{f_0} + q) | j_{\Gamma_2} | 0 \rangle}{m_h^2 - (p_{f_0} + q)^2}. \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中包括了第一激发态 D 介子和质量更大的共振态及连续态 h 的贡献。我们也可以单共振态和连续谱来表示关联函数

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{HAD}}(p_{f_0}, q) &= \frac{\langle f_0(p_{f_0}) | j_{\Gamma_1} | D(p_{f_0} + q) \rangle \langle D(p_{f_0} + q) | j_{\Gamma_2} | 0 \rangle}{m_D^2 - (p_{f_0} + q)^2} \\ &+ \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s, q^2)}{s - (p_{f_0} + q)^2}, \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中更大质量的共振态及连续态 h 都被包含在了谱函数 $\rho^h(s, q^2)$ 中，而 s_0 是谱函数产生贡献的阈值。

另一方面，在夸克层面上，我们利用算符乘积展开 (OPE)，在深欧区域 $q^2 \ll 0$ 计算关联函数。在这一非物理区域的关联函数，利用其在 $q^2 \ll 0$ 复平面上的解析性，我们可以通过色散积分将其和物理区域的关联函数联系起来

$$\Pi^{\text{QCD}}(p_{f_0}, q) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_b + m_s)^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \Pi^{\text{QCD}}(s, q^2)}{s - (p_{f_0} + q)^2}. \quad (4-13)$$

利用全局的夸克强子对偶，公式 (4-12) 中的积分可以等价于其相应的 QCD 层面的表示 (4-13)

$$\int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s, q^2)}{s - (p_{f_0} + q)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\text{Im} \Pi^{\text{QCD}}(s, q^2)}{s - (p_{f_0} + q)^2}.$$

然后分别对强子层面和 QCD 层面表示的关联函数做 Borel 变换

$$\mathcal{B}[\mathcal{F}(Q^2)] = \lim_{Q^2 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, Q^2/n = M^2} \frac{1}{(n-1)!} (-Q^2)^n \left(\frac{d}{dQ^2} \right)^n \mathcal{F}(Q^2), \quad (4-14)$$

\mathcal{F}_i 是关于 $Q^2 = -q^2$ 的函数而 M^2 是 Borel 参数，这里我们用到了公式

$$\mathcal{B} \left[\frac{1}{(s + Q^2)^n} \right] = \frac{\exp(-s/M^2)}{(M^2)^n (n-1)!}. \quad (4-15)$$

Borel 变换能够利用幂指数 $(M^2)^{-n}$ 改进 OPE 的收敛性, 同时通过适当地选取 M^2 可以增加低能激发态的贡献。分别对 Π^{HAD} 和 Π^{QCD} 做 Borel 变换我们得到

$$\begin{aligned} & \langle f_0(p_{f_0}) | j_{\Gamma_1} | D(p_D) \rangle \langle D(p_D) | j_{\Gamma_2} | 0 \rangle \exp \left[-\frac{m_D^2}{M^2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{(m_b+m_s)^2}^{s_0} ds \exp \left[-\frac{s}{M^2} \right] \text{Im} \Pi^{\text{QCD}}(s, q^2), \end{aligned} \quad (4-16)$$

其中 $p_D = p_{f_0} + q$ 。利用等式 (4-16) 使我们能够抽取出 f_+ 和 f_- 。

在 Π^{QCD} 的计算中, 我们需要对公式 (4-9) 中的编时乘积在光锥附近做展开, 展开中的每一项都包含非定域夸克-胶子算符的矩阵元。如果把 f_0 当做一个 $d\bar{d}$ 态, 我们可以将 Π^{QCD} 表示为一系列 f_0 的不同扭度光锥分布振幅

$$\begin{aligned} \langle f_0(p_{f_0}) | \bar{d}(x) \gamma_\mu d(0) | 0 \rangle &= \bar{f}_{f_0} p_{f_0\mu} \int_0^1 du e^{iup_{f_0} \cdot x} \Phi_{f_0}(u), \\ \langle f_0(p_{f_0}) | \bar{d}(x) d(0) | 0 \rangle &= m_{f_0} \bar{f}_{f_0} \int_0^1 du e^{iup_{f_0} \cdot x} \Phi_{f_0}^s(u), \\ \langle f_0(p_{f_0}) | \bar{d}(x) \sigma_{\mu\nu} d(0) | 0 \rangle &= -\frac{m_{f_0}}{6} \bar{f}_{f_0} (p_{f_0\mu} x_\nu - p_{f_0\nu} x_\mu) \int_0^1 du e^{iup_{f_0} \cdot x} \Phi_{f_0}^\sigma(u), \end{aligned} \quad (4-17)$$

其中 Φ_{f_0} 是扭度为 2 的 LCDA, 其他两个是扭度为 3 的 LCDA。它们的归一化为

$$\int_0^1 du \Phi_{f_0}(u) = 0, \quad \int_0^1 du \Phi_{f_0}^s(u) = \int_0^1 du \Phi_{f_0}^\sigma(u) = 1. \quad (4-18)$$

最后得到形状因子的表达式为^[52]

$$\begin{aligned} & f_+(q^2) \\ &= \frac{m_c + m_d}{2m_D^2 f_D} \bar{f}_{f_0} \exp \left[\frac{m_D^2}{M^2} \right] \left\{ \int \frac{du}{u} \exp \left[-\frac{m_c^2 + u\bar{u}m_{f_0}^2 - \bar{u}q^2}{uM^2} \right] \left[-m_c \Phi_{f_0}(u) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + um_{f_0} \Phi_{f_0}^s(u) + \frac{1}{3} m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u) + \frac{m_c^2 + q^2 - u^2 m_{f_0}^2}{uM^2} \frac{m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u)}{6} \right] \right. \\ & \quad \left. + \exp[-s_0/M^2] \frac{m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u_0)}{6} \frac{m_c^2 - u_0^2 m_{f_0}^2 + q^2}{m_c^2 + u_0^2 m_{f_0}^2 - q^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4-19)$$

$$\begin{aligned} & f_-(q^2) \\ &= \frac{m_c + m_d}{2m_D^2 f_D} \bar{f}_{f_0} \exp \left[\frac{m_D^2}{M^2} \right] \left\{ \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} \exp \left[-\frac{m_c^2 + u\bar{u}m_{f_0}^2 - \bar{u}q^2}{uM^2} \right] \left[\Phi_{f_0}(u) + (2-u)m_{f_0} \Phi_{f_0}^s(u) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1-u}{3u} m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u) - \frac{u(m_c^2 + q^2 - u^2 m_{f_0}^2) + 2(m_c^2 - q^2 + u^2 m_{f_0}^2)}{u^2 M^2} \frac{m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u)}{6} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{u_0(m_c^2 + q^2 - u_0^2 m_{f_0}^2) + 2(m_c^2 - q^2 + u_0^2 m_{f_0}^2)}{u_0(m_c^2 + u_0^2 m_{f_0}^2 - q^2)} \exp[-s_0/M^2] \frac{m_{f_0} \Phi_{f_0}^\sigma(u_0)}{6} \right\}, \end{aligned} \quad (4-20)$$

其中

$$u_0 = \frac{m_{f_0}^2 + q^2 - s_0 + \sqrt{(m_{f_0}^2 + q^2 - s_0)^2 + 4m_{f_0}^2(m_b^2 - q^2)}}{2m_{f_0}^2}. \quad (4-21)$$

数值计算中, 介子质量取为 PDG 上的值 $m_D = 1.870 \text{ GeV}$, $m_{f_0} = 0.99 \text{ GeV}$ ^[53]。夸克质量选为 $m_c = 1.27 \text{ GeV}$ ^[53], $m_d = 5 \text{ MeV}$ 。衰变常数则取为 $f_D = 0.21 \text{ GeV}$ ^[53], $f_{f_0} = 0.18 \text{ GeV}$ ^[54]。阈值 s_0 固定为 $s_0 = 4.1 \text{ GeV}^2$, 它对应于第一径向激发态 D 的质量平方。由于光锥求和的计算结果只能适用于小动量转移的区域, 因此为了将形状因子的适用范围扩展到整个物理区域, 我们可以对形状因子在小 q^2 区域用某种函数拟合, 通过拟合函数来正确地描述形状因子的奇点结构。

形状因子是由公式 (4-6) 中的矩阵元定义的, 此矩阵元的奇点决定了形状因子的奇点。在公式 (4-6) 中, 初末态的动量是在壳的, 如果通过解析延拓使得它们离壳, 奇点的位置不会改变。我们可以研究如下离壳关联函数的奇点结构

$$\Pi_\mu^{off}(q, p_1, p_2) = \int d^4w d^4x d^4y e^{-iq \cdot w} e^{-ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \langle 0 | T \{ J_\mu^5(w) f_0(y) D^\dagger(x) \} | 0 \rangle, \quad (4-22)$$

其中 $J_\mu^5 = \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 c$ 是轴矢流, $f_0(y)$ 和 $D(x)$ 分别是与 f_0 和 D 介子拥有相同量子数的流算符, 它们满足

$$\langle 0 | f_0(0) | f_0(p_2) \rangle \neq 0, \quad \langle D(p_1) | D^\dagger(0) | 0 \rangle \neq 0. \quad (4-23)$$

对于 $J_\mu^5(w)$ 算符, 如果存在量子数与其相同的强子态 $H(p)$ 使得如下矩阵元不为零

$$\begin{aligned} \int d^4w e^{-iq \cdot w} \langle 0 | J_\mu^5(w) | H(p) \rangle &\neq 0, \\ \int d^4x d^4y e^{-ip_1 \cdot x} e^{ip_2 \cdot y} \langle H(p) | T \{ f_0(y) D^\dagger(x) \} | 0 \rangle &\neq 0, \end{aligned} \quad (4-24)$$

其中动量满足 $p = p_2 - p_1 = q$ 。那么根据 Polology 原理^[55], 当 $p^2 \rightarrow m_H^2$ 时, 关联函数 $\Pi_\mu^{off}(q, p_1, p_2)$ 一定正比于如下形式

$$\Pi_\mu^{off}(q, p_1, p_2) \propto \frac{1}{p^2 - m_H^2} \delta^4(p_2 - p_1 - q) M_\mu(p) \tilde{M}(p, p_1), \quad (4-25)$$

其中振幅 M 和 \tilde{M} 用如下非零的矩阵元表示

$$\begin{aligned} M_\mu(p) &= \langle 0 | J_\mu^5(0) | H(p) \rangle, \\ \tilde{M}(p, p_1) &= \int d^4x e^{-ip_1 \cdot x} \langle H(p) | T \{ f_0(0) D^\dagger(x) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4-26)$$

表 4-1 LCSR 计算得出的 $D \rightarrow f_0$ 形状因子, q^2 依赖由公式(4-28)拟合得到。

 Table 4-1 The fitting parameters of $D \rightarrow f_0$ form factors derived by LCSR with the fomular Eq. (4-28).

$D \rightarrow f_0$	$F(0)$	a	b
F_1	0.320	0.991	0.544
F_0	0.320	0.346	-0.735

这里 $H(p)$ 是所有可能的强子态中质量最小的基态, 对于 $J_\mu^5 = \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5c$, $H(p)$ 只可能是赝标 D 介子。由此可以得出关联函数 $\Pi_\mu^{off}(q, p_1, p_2)$ 一定存在一个在 $p^2 = q^2 = m_D^2$ 处的奇点。因此, 我们可以估计形状因子的参数化形式为

$$F_i(q^2) \propto \frac{1}{q^2 - m_D^2}. \quad (4-27)$$

然而这一单奇点的形式有很大的近似, 它忽略了更高的奇点贡献。为了弥补这一点, 我们可以将拟合函数在单奇点的结构上做一些修正, 其形式为

$$F_i(q^2) = \frac{F_i(0)}{1 - a_i \frac{q^2}{m_D^2} + b_i \left(\frac{q^2}{m_D^2}\right)^2}. \quad (4-28)$$

表 4-1 给出了用此公式拟合后得到的形状因子参数。 a_i 和 b_i 是通过形状因子在区间 $-0.5 \text{ GeV}^2 < q^2 < 0.5 \text{ GeV}^2$ 内拟合得到的。在理想状况下, 如果认为最小的奇点占主要贡献, 我们期望 a_i 的值接近于 1 而 b_i 的值尽可能小。然而从结果来看只有 a_1 的值是最符合预期的, 这反过来说明仅仅用单奇点公式 (4-27) 做拟合确实是不够的。

4.1.2 手征动力学对共振态近似的修正

在两个赝标介子强相互作用区域, 传统的共振态近似就失效了。例如对于在 1 GeV 下的 S-波贡献, 我们可以按照以下方式定义形状因子^[56]

$$\begin{aligned} \langle (\pi\pi)_S(p_{\pi\pi}) | \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5c | D(p_D) \rangle = & -i \frac{1}{m_{\pi\pi}} \left\{ \left[P_\mu - \frac{m_D^2 - m_{\pi\pi}^2}{q^2} q_\mu \right] \mathcal{F}_1^{D \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right. \\ & \left. + \frac{m_D^2 - m_{\pi\pi}^2}{q^2} q_\mu \mathcal{F}_0^{D \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Watson 定理告诉我们在 $\pi\pi$ 弹性散射和在 $\pi\pi$ 系统与其他强子无强相互作用的衰变道中测得的相位是相等的。半轻过程中的轻子对 $\ell\bar{\nu}$ 实际上和 $\pi\pi$ 系统是脱耦的, 因

此 D 到标量 $\pi\pi$ 的衰变振幅的相位等于相应的相同同位旋和角动量的 $\pi\pi$ 散射相位

$$\langle(\pi\pi)_S|\bar{d}\Gamma c|D\rangle \propto F_{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2), \quad (4-30)$$

标量形状因子定义为

$$\langle 0|\bar{d}d|\pi^+\pi^-\rangle = B_0 F_{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2), \quad (4-31)$$

其中 $B_0 = 1.7 \text{ GeV}^{[57]}$ 是 QCD 凝聚参数。

由于扭度为 3 的振幅和标量共振态的具有相同的渐进行为^[58]，利用 $\pi\pi$ 标量形状因子， $D \rightarrow (\pi\pi)_S$ 的形状因子可以通过和 $D \rightarrow f_0$ 形状因子进行匹配得到

$$\mathcal{F}_i^{D \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) = B_0 \frac{1}{f_{f_0}} F_{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2) F_i^{D \rightarrow f_0}(q^2) \quad (4-32)$$

标量 $\pi\pi$ 形状因子可以用么正化的手征微扰论处理。在第三章中我们介绍了其计算方法。以往文献中对 $F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2)$ 的计算采用了不同的方法，其中包括(么正化的)手征微扰论(χPT)^[33, 59-65] 和色散关系^[66]。在 χPT 中，精确到次领头阶(NLO)的结果可以很好地描述低能的实验数据。但是随着不变质量的增大，高阶的贡献变得更加重要。当然这和我们的预期是相符的， χPT 是按照 $p_\pi/(4\pi f_\pi)$ 做展开的。在么正化方法中通过对高阶修正的求和，可以将 χPT 的适用范围扩展到 1 GeV 左右^[67]。对于标量 S-波， $\pi\pi$ 和 KK 系统的同位旋本征态为

$$|\pi\pi\rangle_{I=0} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^+\pi^-\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\pi^0\pi^0\rangle, \quad (4-33)$$

$$|K\bar{K}\rangle_{I=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} |K^+K^-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |K^0\bar{K}^0\rangle, \quad (4-34)$$

两者的标量形状因子分别可以定义为

$$\sqrt{2}B_0 F_1^{n/s}(s) = \langle 0|\bar{n}n/\bar{s}s|\pi\pi\rangle_{I=0}, \quad (4-35)$$

$$\sqrt{2}B_0 F_2^{n/s}(s) = \langle 0|\bar{n}n/\bar{s}s|K\bar{K}\rangle_{I=0},$$

其中 $s = m_{\pi\pi}^2$ 。 $\bar{n}n = (\bar{u}u + \bar{d}d)/\sqrt{2}$ 表示非奇异标量密度算符，同时采用了简写记号 ($\pi = 1, K = 2$)。由此可得^[33, 60, 64, 65]

$$F_{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} F_1^n(m_{\pi\pi}^2). \quad (4-36)$$

$$F_1^n(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[1 + \mu_\pi - \frac{\mu_\eta}{3} + \frac{16m_\pi^2}{f^2} (2L_8^r - L_5^r) + 8(2L_6^r - L_4^r) \frac{2m_K^2 + 3m_\pi^2}{f^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8s}{f^2} L_4^r + \frac{4s}{f^2} L_5^r + \left(\frac{2s - m_\pi^2}{2f^2} \right) J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{s}{4f^2} J_{KK}^r(s) + \frac{m_\pi^2}{18f^2} J_{\eta\eta}^r(s) \Big], \\
 F_1^s(s) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{16m_\pi^2}{f^2} (2L_6^r - L_4^r) + \frac{8s}{f^2} L_4^r + \frac{s}{2f^2} J_{KK}^r(s) + \frac{2m_\pi^2}{9f^2} J_{\eta\eta}^r(s) \right], \\
 F_2^n(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{8L_4^r}{f^2} (2s - m_\pi^2 - 6m_K^2) + \frac{4L_5^r}{f^2} (s - 4m_K^2) + \frac{16L_6^r}{f^2} (6m_K^2 + m_\pi^2) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{32L_8^r}{f^2} m_K^2 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \left(\frac{9s - 8m_K^2}{36f^2} \right) J_{\eta\eta}^r(s) + \frac{3s}{4f^2} J_{KK}^r(s) + \frac{3s}{4f^2} J_{\pi\pi}^r(s) \right], \\
 F_2^s(s) &= 1 + \frac{8L_4^r}{f^2} (s - m_\pi^2 - 4m_K^2) + \frac{4L_5^r}{f^2} (s - 4m_K^2) + \frac{16L_6^r}{f^2} (4m_K^2 + m_\pi^2) \\
 & \quad + \frac{32L_8^r}{f^2} m_K^2 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \left(\frac{9s - 8m_K^2}{18f^2} \right) J_{\eta\eta}^r(s) + \frac{3s}{4f^2} J_{KK}^r(s). \tag{4-37}
 \end{aligned}$$

加上么正约束条件后，标量形状因子可以表示为耦合道的代数方程

$$\begin{aligned}
 F(s) &= [I + K(s)g(s)]^{-1}R(s) \\
 &= [I - K(s)g(s)]R(s) + \mathcal{O}(p^6), \tag{4-38}
 \end{aligned}$$

其中 $R(s)$ 没有右手的截断，上式只精确到次领头阶 (NLO) 的手征展开。 $K(s)$ 是介子-介子散射振幅的 S-波投影核，可以从领头阶的手征拉矢量推导出来

$$K_{11} = \frac{2s - m_\pi^2}{2f^2}, \quad K_{12} = K_{21} = \frac{\sqrt{3}s}{4f^2}, \quad K_{22} = \frac{3s}{4f^2}.$$

关于单圈图的计算可以采用动量截断的方案，也就是取 $q_{\max} \sim 1 \text{ GeV}$ 截断动量积分^[67]；或者可以采用维数正规化的方法，同时结合 $\overline{\text{MS}}$ 减除方案。在后一种方法中，介子圈图积分为中的积分函数为

$$J_{ii}^r(s) \equiv \frac{1}{16\pi^2} \left[1 - \log \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) - \sigma_i(s) \log \left(\frac{\sigma_i(s) + 1}{\sigma_i(s) - 1} \right) \right] = -g_i(s), \tag{4-39}$$

其中 $\sigma_i(s) = \sqrt{1 - 4m_i^2/s}$ 。

通过将么正化约束和手征微扰论进行匹配，我们可以得到 R_i 的具体表达式^[62, 68]

$$\begin{aligned}
 R_1^n(s) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \mu_\pi - \frac{\mu_\eta}{3} + \frac{16m_\pi^2}{f^2} (2L_8^r - L_5^r) + 8(2L_6^r - L_4^r) \frac{2m_K^2 + 3m_\pi^2}{f^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{8s}{f^2} L_4^r + \frac{4s}{f^2} L_5^r - \frac{m_\pi^2}{288\pi^2 f^2} \left[1 + \log \left(\frac{m_\eta^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \\
 R_1^s(s) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{16m_\pi^2}{f^2} (2L_6^r - L_4^r) + \frac{8s}{f^2} L_4^r - \frac{m_\pi^2}{72\pi^2 f^2} \left[1 + \log \left(\frac{m_\eta^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \\
 R_2^n(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{8L_4^r}{f^2} (2s - 6m_K^2 - m_\pi^2) + \frac{4L_5^r}{f^2} (s - 4m_K^2) + \frac{16L_6^r}{f^2} (6m_K^2 + m_\pi^2) \right.
 \end{aligned}$$

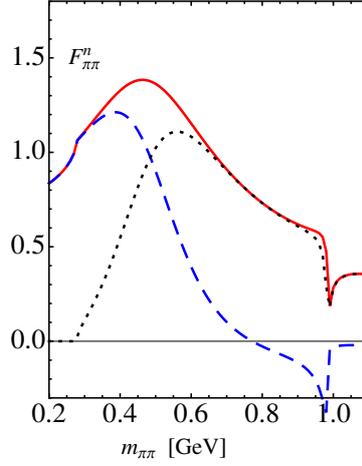


图 4-2 么正化的手征微扰论计算得到的非奇异 $\pi\pi$ 标量形状因子。其中形状因子的模，实部和虚部分别在图中用实线，虚线和点线表示。

Figure 4-2 The non-strange $\pi\pi$ scalar form factor obtained in the unitarized chiral perturbation theory. The modulus, real part and imaginary part are shown in *solid*, *dashed* and *dotted* curves .

$$\begin{aligned}
 R_2^s(s) = & 1 + \frac{8L_4^r}{f^2} (s - 4m_K^2 - m_\pi^2) + \frac{4L_5^r}{f^2} (s - 4m_K^2) + \frac{16L_6^r}{f^2} (4m_K^2 + m_\pi^2) \\
 & + \frac{32L_8^r}{f^2} m_K^2 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \frac{m_K^2}{72\pi^2 f^2} \left[1 + \log \left(\frac{m_\eta^2}{\mu^2} \right) \right] \Big\} , \\
 & + \frac{32L_8^r}{f^2} m_K^2 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \frac{m_K^2}{36\pi^2 f^2} \left[1 + \log \left(\frac{m_\eta^2}{\mu^2} \right) \right] . \quad (4-40)
 \end{aligned}$$

利用以上得到的公式以及从拟合结果中得到的低能系数 $L_i^{r[62]}$ ，我们在图 4-2 中给出了非奇异 $\pi\pi$ 形状因子的曲线。图中实线、虚线和点线分别表示模、实部和虚部。曲线显示出，利用手征么正性条件预言的形状因子 F_1^n 在 $\bar{K}K$ 阈值附近存在零点。

4.1.3 $D \rightarrow \rho$ 形状因子

接下来考虑 **P**-波的贡献，若末态为 **P**-波的 $\pi\pi$ 系统，那么衰变宽度主要来自于共振态 $\rho(770)$ 的贡献。因为 $\rho(770)$ 是矢量介子，所以 $D \rightarrow \rho$ 的形状因子可以参数化为

$$\begin{aligned}
 \langle \rho(p_2, \epsilon) | \bar{d}\gamma^\mu c | D(p_D) \rangle &= -\frac{2V(q^2)}{m_D + m_\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\nu^* P_{D\rho} P_{2\sigma}, \\
 \langle \rho(p_2, \epsilon) | \bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 c | D(p_D) \rangle &= 2im_\rho A_0(q^2) \frac{\epsilon^* \cdot q}{q^2} q^\mu + i(m_D + m_\rho) A_1(q^2) \left[\epsilon_\mu^* - \frac{\epsilon^* \cdot q}{q^2} q^\mu \right] \\
 &\quad - iA_2(q^2) \frac{\epsilon^* \cdot q}{m_D + m_\rho} \left[P^\mu - \frac{m_D^2 - m_\rho^2}{q^2} q^\mu \right]. \quad (4-41)
 \end{aligned}$$

表 4-2 LFQM (左)^[69] 和 LCSR (右)^[70] 计算的 $D \rightarrow \rho$ 形状因子。

 Table 4-2 $D \rightarrow \rho$ form factors derived by LFQM(left)^[69] and LCSR(right)^[70] respectively.

LFQM	$F(0)$	a	b	LCSR	$F(0)$	a	b
$V^{D \rightarrow \rho}$	0.86	1.24	0.48	$V^{D \rightarrow \rho}$	0.801	0.78	2.61
$A_0^{D \rightarrow \rho}$	0.64	1.07	0.54	$A_3^{D \rightarrow \rho}$	-0.719	1.05	-1.77
$A_1^{D \rightarrow \rho}$	0.58	0.51	0.03	$A_1^{D \rightarrow \rho}$	0.599	0.44	0.58
$A_2^{D \rightarrow \rho}$	0.48	0.95	0.30	$A_2^{D \rightarrow \rho}$	0.372	1.64	0.56

其中 $q = p_D - p_2$, $P = p_B + p_2$ 。 $V(q^2)$, 和 $A_i(q^2)$ ($i = 0, 1, 2$) 是非微扰形状因子。

以往文献已经给出了许多关于这些形状因子的结果, 这里我们采用 LFQM^[69] 和 LCSR 的计算结果^[70]。为了得到整个运动学区间的动量分布, 我们仍然采用公式 (4-28) 拟合, 表 4-2 中给出了参数化后形状因子的结果。

4.2 光锥分布振幅方法计算 $B_s \rightarrow \pi\pi$ 矩阵元

4.2.1 广义 LCDAs

上一节中, 在 LCSR 框架下, 我们利用 S-波共振态 $f_0(980)$ 的 LCDAs 计算了 $D \rightarrow \pi\pi$ 形状因子。实际上, 我们可以定义一种广义 LCDAs 来描述 S-波的 $\pi\pi$ 系统, 而将 $\pi\pi$ 标量形状因子作为广义 LCDAs 的归一化因子。S-波 $\pi^+\pi^-$ 光锥分布振幅 (LCDAs) 可以用下面三个矩阵元定义^[46, 71-74]

$$\begin{aligned}
 \langle (\pi^+\pi^-)_S | \bar{s}(x) \gamma_\mu s(0) | 0 \rangle &= F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) p_{\pi\pi, \mu} \int_0^1 du e^{iup_{\pi\pi} \cdot x} \phi_{\pi\pi}(u), \\
 \langle (\pi^+\pi^-)_S | \bar{s}(x) s(0) | 0 \rangle &= F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) B_0 \int_0^1 du e^{iup_{\pi\pi} \cdot x} \phi_{\pi\pi}^s(u), \\
 \langle (\pi^+\pi^-)_S | \bar{s}(x) \sigma_{\mu\nu} s(0) | 0 \rangle &= -F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) B_0 \frac{1}{6} (p_{\pi\pi, \mu} x_\nu - p_{\pi\pi, \nu} x_\mu) \\
 &\quad \times \int_0^1 du e^{iup_{\pi\pi} \cdot x} \phi_{\pi\pi}^\sigma(u). \tag{4-42}
 \end{aligned}$$

广义 LCDAs 的定义形式和普通的标量粒子的 LCDAs 是相同的^[71-74], 其中 $\phi_{\pi\pi}$ 扭度为 2, 其余两个扭度为 3。它们的归一化为

$$\int_0^1 du \phi_{\pi\pi}^s(u) = \int_0^1 du \phi_{\pi\pi}^\sigma(u) = 1. \tag{4-43}$$

QCD 共形对称性^[75] 显示扭度为 3 的 LCDA 具有渐进形式^[71-74]

$$\phi_{\pi\pi}^s(u) = 1, \quad \phi_{\pi\pi}^\sigma(u) = 6u(1-u), \quad (4-44)$$

而扭度为 2 的 LCDA 可以用 Gegenbauer 矩展开

$$\phi_{\pi\pi}(u) = 6u(1-u) \sum_n a_n C_n^{3/2}(2u-1), \quad a_1 = -1.35. \quad (4-45)$$

在高能过程中, 高阶 Gegenbauer 矩的贡献是被压低的, 因此我们只需保留最低阶的矩 $a_1 = -1.35$, 这是一个经验结果。参考文献^[58] 给出了 $f_0(980)$ 第一个 Gegenbauer 矩的计算结果, 标量 $\bar{q}q$ 介子的归一化因子是 $m_{f_0(980)} f_{f_0(980)}$, 也就是这一章中给出的 $F_{\pi\pi}^s B_0$ 。

4.2.2 标量 $\pi\pi$ 形状因子的 Breit-Wigner 描述

标量奇异夸克流算符定义的 $\pi\pi$ 标量形状因子为

$$\langle \pi^+ \pi^- | \bar{s}s | 0 \rangle = B_0 F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2), \quad (4-46)$$

近些年来, LHCb 合作组对 $B_s \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ 衰变模式做了一系列的角分布分析^[76, 77]。其中 S-波的贡献被分离了出来, 确认了三个共振态 $f_0(980)$, $f_0(1500)$ 和 $f_0(1790)$ 。前面在处理 $D \rightarrow \pi\pi$ 中的 S-波成分时, 为了引入末态 $\pi\pi$ 系统的相互作用效应我们用么正化的手征有效理论计算了 $\pi\pi$ 标量形状因子 $F_{\pi\pi}^s$ 。对于 $B_s \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$ 衰变, 为了获得 $\pi^+ \pi^-$ 不变质量分布, 我们将对 $f_0(1500)$ 和 $f_0(1790)$ 共振态用 Breit-Wigner 公式来描述。由于 $f_0(980)$ 处于 $K\bar{K}$ 的阈值附近, 需要用 Flatté 模型描述 $f_0(980)$ ^[78, 79]。考虑到不同共振态之间的相对强度和强相位, 我们可以选取形状因子为

$$\begin{aligned} F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) = & \frac{c_1 m_{f_0(980)}^2 e^{i\theta_1}}{m_{\pi\pi}^2 - m_{f_0(980)}^2 + im_{f_0(980)}(g_{\pi\pi}\rho_{\pi\pi} + g_{KK}F_{KK}^2\rho_{KK})} \\ & + \frac{c_2 m_{f_0(1500)}^2 e^{i\theta_2}}{m_{\pi\pi}^2 - m_{f_0(1500)}^2 + im_{f_0(1500)}\Gamma_{f_0(1500)}(m_{\pi\pi}^2)} \\ & + \frac{c_3 m_{f_0(1790)}^2 e^{i\theta_3}}{m_{\pi\pi}^2 - m_{f_0(1790)}^2 + im_{f_0(1790)}\Gamma_{f_0(1790)}(m_{\pi\pi}^2)}. \end{aligned} \quad (4-47)$$

其中 $\rho_{\pi\pi}$ 和 ρ_{KK} 是相空间因子^[76, 77, 79]

$$\rho_{\pi\pi} = \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^\pm}^2}{m_{\pi\pi}^2}} + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{4m_{\pi^0}^2}{m_{\pi\pi}^2}},$$

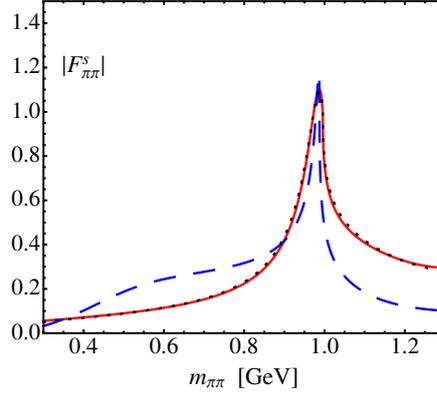


图 4-3 χ PT 预言的 $F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2)$ (虚线), 根据 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 数据拟合得到的形状因子 (实线对应于方法 I 而点线对应于方法 II)。两种拟合得到的结果在 1.2 GeV 是无法区分的。

Figure 4-3 The $F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2)$ predicted in the χ PT (dashed curve), and fitted from the $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ data (solid line for solution I and dotted line for solution II). The two fitted solutions are not distinguishable below 1.2 GeV.

$$\rho_{KK} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_{K^\pm}^2}{m_{\pi\pi}^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_{K^0}^2}{m_{\pi\pi}^2}}. \quad (4-48)$$

和标准的 Flatté 分布相比, 为了更好地符合数据, LHCb 的拟合引入了一个在 $K\bar{K}$ 阈值之上的额外修正^[77]

$$F_{KK} = \exp(-\alpha k^2), \quad (4-49)$$

k 是 $K\bar{K}$ 静止系中 K 介子的动量, α 设定为 $\alpha = 2.0\text{GeV}^{-2}$ ^[77]。S-波共振态的能量依赖宽度分布 $\Gamma_S(m_{\pi\pi}^2)$ 参数化为

$$\Gamma_S(m_{\pi\pi}^2) = \Gamma_S \frac{m_S}{m_{\pi\pi}} \left(\frac{m_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2}{m_S^2 - 4m_\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} F_R^2, \quad (4-50)$$

Γ_S 是常数宽度, $F_R = 1$ 是 Blatt-Weisskopf barrier 因子^[77]。 c_i 和 $\theta_i, i = 1, 2, \text{ and } 3$ 是可调参数。LHCb 给出了两种拟合方法, 三个分量的拟合参数列在了表 4-3^[77] 中。

在图 4-3 中, 我们比较了用么正化的 χ PT (虚线) 得到的标量形状因子和通过 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 的数据以及公式 (4-47) 拟合出的形状因子 (实线和点线)。公式 (4-47) 中的常数 c_1 在这里已经经过了调节。从图中可以看出这两种方法给出的形状是相似的。对比中有以下几点说明

- 和 χ PT 的结果相反, 公式 (4-47) 中的参数不包括 $f_0(500)$ (或所谓的 σ) 的贡献。

表 4-3 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 实验数据拟合得到的各部分贡献^[77]。

Table 4-3 Fitted parameters for contributing components in the $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ by the LHCb collaboration^[77]. Two solutions are found in the fit.

Fractions (%)	Solution I	Solution II
$f_0(980)$	$70.3 \pm 1.5_{-5.1}^{+0.4}$	$92.4 \pm 2.0_{-16.0}^{+0.8}$
$f_0(1500)$	$10.1 \pm 0.8_{-0.3}^{+1.1}$	$9.1 \pm 0.9 \pm 0.3$
$f_0(1790)$	$2.4 \pm 0.4_{-0.2}^{+5.0}$	$0.9 \pm 0.3_{-0.1}^{+2.5}$
Phase differences (°)	Solution I	Solution II
$f_0(1500) - f_0(980)$	138 ± 4	177 ± 6
$f_0(1790) - f_0(980)$	78 ± 9	95 ± 16
Parameter	Solution I	Solution II
$m_{f_0(980)}$ (MeV)	945.4 ± 2.2	949.9 ± 2.1
$g_{\pi\pi}$ (MeV)	167 ± 7	167 ± 8
$g_{KK}/g_{\pi\pi}$	3.47 ± 0.12	3.05 ± 0.13
$m_{f_0(1500)}$ (MeV)	1460.9 ± 2.9	1465.9 ± 3.1
$\Gamma_{f_0(1500)}$ (MeV)	124 ± 7	115 ± 7
$m_{f_0(1790)}$ (MeV)	1814 ± 18	1809 ± 22
$\Gamma_{f_0(1790)}$ (MeV)	328 ± 34	263 ± 30

LHCb 合作组在 90% C.L. 对以下比值给出了上限

$$R = \frac{F_r(f_0(500))}{F_r(f_0(980))} < 0.3\% \quad (4-51)$$

- χ PT 中的展开参数是 $p_\pi/(4\pi f_\pi)$, p_π 是 π 介子的动量。对高阶 s-道贡献的求和以及耦合道效应可将适用范围拓展到 1GeV。另一方面, 公式 (4-47) 中的参数化明显包括了两个标量共振态 $f_0(1500)$ 和 $f_0(1790)$, 因此在 1 GeV 以上的区域是有效的。
- 通过比较, 我们发现在现阶段这两种方法中并没有一种能体现出明显的优势。在未来, 我们期望可以通过一些更系统的方法如共振态的么正化^[63] 进行改进。

在接下来的唯象研究中，我们将采用 (4-47) 中的参数化结果。

4.2.3 $B_s \rightarrow \pi\pi$ 形状因子

$B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的跃迁矩阵元可以用三个形状因子来参数化

$$\begin{aligned} \langle (\pi^+\pi^-)_S | \bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 b | \bar{B}_s \rangle &= \frac{-i}{m_{B_s}} \left\{ \left[P_\mu - \frac{m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2}{q^2} q_\mu \right] \mathcal{F}_1^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2}{q^2} q_\mu \mathcal{F}_0^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right\}, \\ \langle (\pi^+\pi^-)_S | \bar{s}\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 b | \bar{B}_s \rangle &= \frac{\mathcal{F}_T^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2)}{m_{B_s}(m_{B_s} + m_{\pi\pi})} \left[(m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2) q_\mu - q^2 P_\mu \right], \end{aligned} \quad (4-52)$$

由于我们考虑 S-波 $\pi^+\pi^-$ 系统的贡献，其角动量为零。 p_{B_s} 和 $p_{\pi\pi}$ 分别是 B_s 和 $\pi\pi$ 系统的动量。转移动量为 $q = p_{B_s} - p_{\pi\pi}$ ， P_μ 定义为 $P_\mu = p_{B_s} + p_{\pi\pi}$ 。 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 跃迁形状因子的定义则是相同的。

利用 LCSR，我们可以将 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 形状因子用 $\pi^+\pi^-$ LCDAs 表示出来，LCSR 因子化公式为^[46]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) &= N_F \left\{ \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} \exp \left[-\frac{m_b^2 + u\bar{u}m_{\pi\pi}^2 - \bar{u}q^2}{uM^2} \right] \left[-\frac{m_b}{B_0} \Phi_{\pi\pi}(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u\Phi_{\pi\pi}^s(u) + \frac{1}{3}\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u) + \frac{m_b^2 + q^2 - u^2m_{\pi\pi}^2}{uM^2} \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u)}{6} \right] \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[-\frac{s_0}{M^2} \right] \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u_0)}{6} \frac{m_b^2 - u_0^2m_{\pi\pi}^2 + q^2}{m_b^2 + u_0^2m_{\pi\pi}^2 - q^2} \right\}, \\ \mathcal{F}_-^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) &= N_F \left\{ \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} \exp \left[-\frac{m_b^2 + u\bar{u}m_{\pi\pi}^2 - \bar{u}q^2}{uM^2} \right] \left[\frac{m_b}{B_0} \Phi_{\pi\pi}(u) + (2-u)\Phi_{\pi\pi}^s(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-u}{3u} \Phi_{\pi\pi}^\sigma(u) - \frac{u(m_b^2 + q^2 - u^2m_{\pi\pi}^2) + 2(m_b^2 - q^2 + u^2m_{\pi\pi}^2)}{u^2M^2} \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u)}{6} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_0(m_b^2 + q^2 - u_0^2m_{\pi\pi}^2) + 2(m_b^2 - q^2 + u_0^2m_{\pi\pi}^2)}{u_0(m_b^2 + u_0^2m_{\pi\pi}^2 - q^2)} \exp \left[-\frac{s_0}{M^2} \right] \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u_0)}{6} \right\}, \\ \mathcal{F}_0^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) &= \mathcal{F}_1^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) + \frac{q^2}{m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2} \mathcal{F}_-^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2), \\ \mathcal{F}_T^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) &= 2N_F(m_{B_s} + m_{\pi\pi}) \left\{ \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} \exp \left[-\frac{(m_b^2 - \bar{u}q^2 + u\bar{u}m_{\pi\pi}^2)}{uM^2} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[-\frac{\Phi_{\pi\pi}(u)}{2B_0} + m_b \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u)}{6uM^2} \right] + m_b \frac{\Phi_{\pi\pi}^\sigma(u_0)}{6} \frac{\exp[-s_0/M^2]}{m_b^2 - q^2 + u_0^2m_{\pi\pi}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4-53)$$

其中

$$N_F = B_0 F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) \frac{m_b + m_s}{2m_{B_s} f_{B_s}} \exp\left[\frac{m_{B_s}^2}{M^2}\right],$$

$$u_0 = \frac{m_{\pi\pi}^2 + q^2 - s_0 + \sqrt{(m_{\pi\pi}^2 + q^2 - s_0)^2 + 4m_{\pi\pi}^2(m_b^2 - q^2)}}{2m_{\pi\pi}^2}. \quad (4-54)$$

上面的推导中对关联函数的强子层面表示和 QCD 层面表示分别做了 Borel 变换。Borel 变换能够改进算符乘积展开 (OPE) 的收敛性, 选取合适的 Borel 参数 M^2 的值能够增强关联函数中低能态的贡献。

利用之前通过 Breit-Wigner 公式得到的 $\pi\pi$ 标量形状因子, 我们也对用广义 LCDAs 得到的 $B_s \rightarrow \pi\pi$ 形状因子进行归一化处理

$$\mathcal{F}_i(m_{\pi\pi}^2, q^2) = B_0 F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2) \bar{F}_i(q^2), \quad (4-55)$$

其中 $m_{\pi\pi}$ 和 q^2 的依赖部分被分别因子化到 $F_{\pi\pi}^s(m_{\pi\pi}^2)$ 和 $\bar{F}_i(q^2)$ 之中。根据 Watson-Madigal 定理^[80], 这种近似是合理的。这里我们选择 $m_{\pi\pi} = m_{f_0(980)}$ 作为参考点来研究函数 $\bar{F}_i(q^2)$ 。

在数值分析中, 我们采用输入量^[2, 81]

$$f_{B_s} = (224 \pm 5)\text{MeV}, \quad s_0 = (34 \pm 2)\text{GeV}^2, \quad B_0 = (1.7 \pm 0.2)\text{GeV}. \quad (4-56)$$

这样, 求和规则可以给出函数 $\bar{F}_i(q^2)$ 在每个 q^2 的值对 Borel 参数的依赖关系。图 4-4 给出了在 $q^2 = 0$ 处 $\bar{F}_i(0)$ 对 M^2 的依赖曲线, 同时取 $a_1 = -0.6$ 。我们要求形状因子关于 M^2 的变化要足够平缓, 由此确定 M^2 的合适范围。从图中可以得到 M^2 的范围是 $M^2 > 12\text{GeV}^2$ 。在实际形状因子的计算中, 我们选取 $M^2 = (16 \pm 2)\text{GeV}^2$ 。

形状因子对扭度为 2 的 LCDA 的 Gegenbauer 矩 a_1 很敏感, 从图 4-5 中的左图可以看出在范围 $a_1 = (-1.4, -0.4)$ 和最大反冲点 $q^2 = 0$ 处存在这种敏感的依赖性。后面将会看到当 $a_1 = -0.6$ 时可以很好地描述 $B_s(D_s) \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-(\ell\nu)$ 的数据。

LCSR 仅适用于硬散射区域, 为了把得到的形状因子的适用范围扩展到整个运动学区域, 我们采用双奇点参数化形式

$$\bar{F}_i(q^2) = \frac{\bar{F}_i(0)}{1 - a_i q^2/m_{B_s}^2 + b_i(q^2/m_{B_s}^2)^2}, \quad (4-57)$$

其中 $i = 1, 0, T$ 。形状因子的奇点位置近似在 $m_{B_s}^2$ 附近, 而这里 m_{B_s} 物理上对应于和 $\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 b$, $\bar{s}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 b$ 有相同量子数的最轻强子态的质量。在 $0 < q^2 < 5\text{GeV}^2$ 区域内对 B_s 跃迁形状因子拟合的结果在表格 4-4 左侧列出。

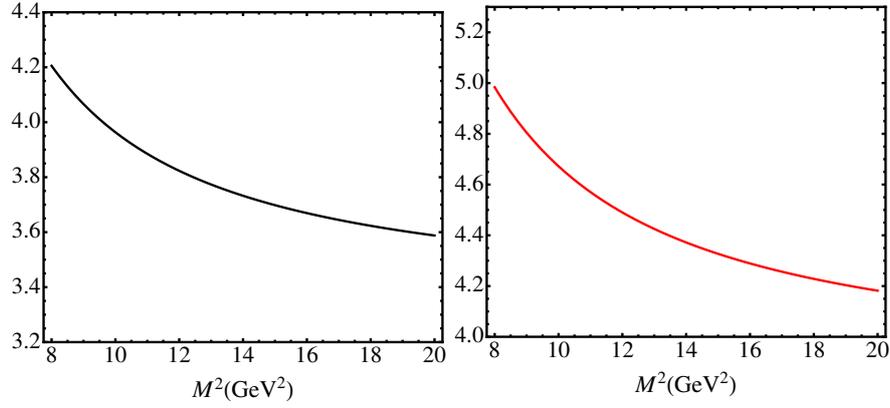


图 4-4 在最大反冲区域 $q^2 = 0$, $\bar{F}_1(q^2 = 0) = \bar{F}_0(q^2 = 0)$ (左) 和 $\bar{F}_T(q^2 = 0)$ (右) 对 Borel 参数的依赖曲线。物理上要求形状因子对于 M^2 的变换足够平缓。

Figure 4-4 At the maximal recoil $q^2 = 0$, the dependence of $\bar{F}_1(q^2 = 0) = \bar{F}_0(q^2 = 0)$ (left panel) and $\bar{F}_T(q^2 = 0)$ (right panel) on the Borel parameter M^2 . The final results are obtained requiring stability against variations of M^2 .

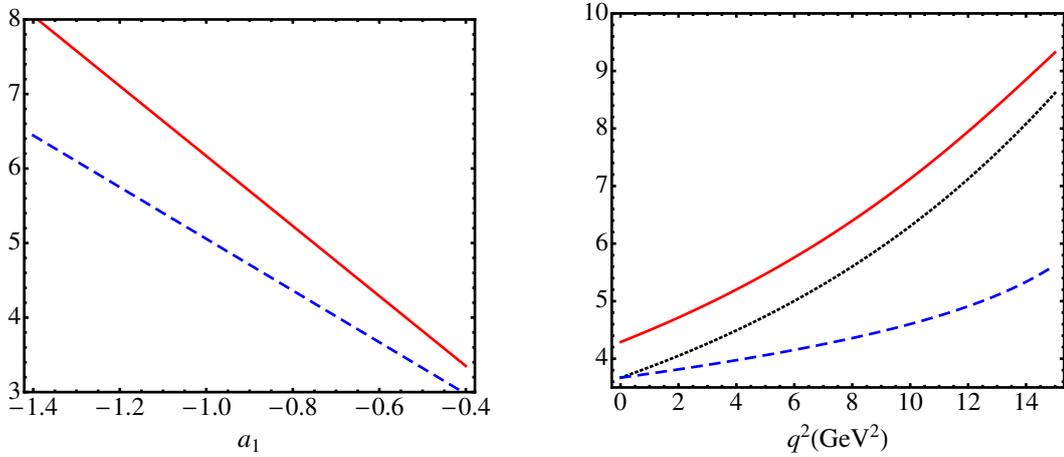


图 4-5 在最大反冲区域 $q^2 = 0$, 左图是 $\bar{F}_{1,0}$ 和 \bar{F}_T 对 Gegenbauer 矩 a_1 的依赖曲线, 虚线和实线分别表示 $\bar{F}_1(q^2 = 0) = \bar{F}_0(q^2 = 0)$ 和 $\bar{F}_T(q^2 = 0)$ 。右图是在 $a_1 = -0.6$ 时形状因子 q^2 的依赖性。实线, 点线和虚线分别表示 $\bar{F}_T(q^2)$, $\bar{F}_1(q^2)$ 和 $\bar{F}_0(q^2)$ 。

Figure 4-5 At the maximal recoil $q^2 = 0$, the dependence of $\bar{F}_{1,0}$, and \bar{F}_T on the Gegenbauer moment a_1 is shown in the left panel. Dashed and solid curves correspond to $\bar{F}_1(q^2 = 0) = \bar{F}_0(q^2 = 0)$, and $\bar{F}_T(q^2 = 0)$, respectively. In the right panel, the q^2 dependence is given with $a_1 = -0.6$. Solid, dotted and dashed lines denote the $\bar{F}_T(q^2)$, $\bar{F}_1(q^2)$ and $\bar{F}_0(q^2)$, respectively.

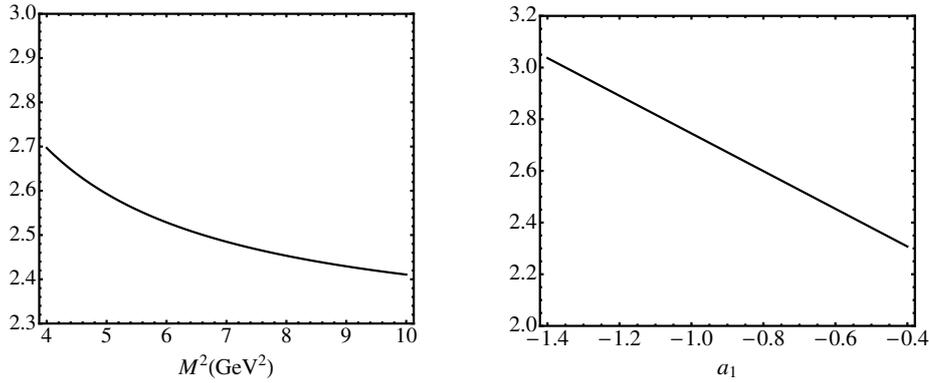


图 4-6 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 形状因子 $\bar{F}_i(0)$ 关于 M^2 (左) 和 Gegenbauer 矩 a_1 (右) 的依赖曲线。
 Figure 4-6 The functions $\bar{F}_i(0)$ for the $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$: the dependence on M^2 (Gegenbauer moment a_1) in the left (right) panel.

表 4-4 LCSR 计算的 $B_s/D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 形状因子及拟合参数。

Table 4-4 Fitted parameters of the $B_s/D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ form factors derived by LCSR.

$B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\bar{F}_i(q^2 = 0)$	a_i	b_i	$D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\bar{F}_i(q^2 = 0)$	a_i	b_i
\bar{F}_1	3.66	1.39	0.54	\bar{F}_1	2.45	0.82	0.20
\bar{F}_0	3.66	0.54	-0.08	\bar{F}_0	2.45	0.39	-0.15
\bar{F}_T	4.29	1.33	0.54				

对于 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 过程，输入参数我们采用^[2]

$$s_0 = (6.5 \pm 1)\text{GeV}^2, f_{D_s} = (257.5 \pm 4.6)\text{MeV}, m_c = 1.4\text{GeV}. \quad (4-58)$$

图 4-6 给出了 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的形状因子曲线。从左图中我们可以看到当 $M^2 > 6\text{GeV}^2$ 是结果是稳定的，因此最终的计算采用 $M^2 = (8 \pm 1)\text{GeV}^2$ 。 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的结果对 Gegenbauer 矩 a_1 的依赖性要小于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的情况，这点可以从图 4-6 中的右图看出。对于 D_s 衰变的情况，在 $x > 1/2$ 区域和 $x < 1/2$ 区域扭度为 2 的贡献相互抵消了。这一现象在 $D_s \rightarrow f_0(980)$ 衰变中已经有过研究^[52]。由于 D_s 衰变释放的能量小，我们选取 $-5\text{GeV}^2 < q^2 < 0$ 的范围利用公式 (4-57) 拟合形状因子，拟合结果在表格 4-4 右侧列出。

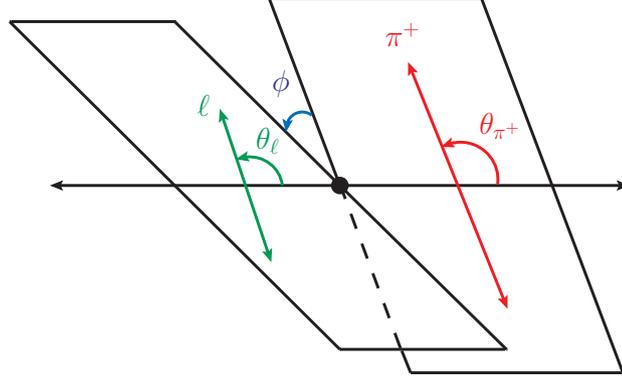


图 4-7 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的运动学表示。 $\pi\pi$ 在 \bar{D} 的静止系中沿着 z 轴运动。 $\theta_\pi(\theta_\ell)$ 定义为 $\pi\pi$ (轻子对) 静止系中 π^+ (ℓ^-) 运动方向与 z 轴的夹角。极角 ϕ 是 $\pi\pi$ 运动平面和轻子对运动平面之间的夹角。
 Figure 4-7 Kinematics in the $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$. The $\pi\pi$ moves along the z axis in the \bar{D} rest frame. $\theta_\pi(\theta_\ell)$ is defined in the $\pi\pi$ (lepton pair) rest frame as the angle between z -axis and the flight direction of π^+ (ℓ^-), respectively. The azimuth angle ϕ is the angle between the $\pi\pi$ decay and lepton pair planes.

4.3 $D(D_s) \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的唯象分析

这一节将详细推导 $D(D_s) \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的衰变宽度和角分布公式，我们采用螺旋度振幅方法进行计算，详细的计算方法见附录 C。图 4-7 给出了运动学量的约定。在 D^- 静止系中， $\pi\pi$ 沿 z 轴的正方向运动。在 $\pi\pi$ (轻子对) 静止系中， $\theta_{\pi^+}(\theta_\ell)$ 是 π^+ (ℓ^-) 运动方向和 z 轴的夹角。 ϕ 是 $\pi\pi$ 运动平面和轻子对运动平面之间的夹角。

$D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的衰变振幅可以分解为几个独立部分，每一个可以表示成洛伦兹不变的螺旋度振幅。其中强子部分表示为如下矩阵元

$$A_\lambda = \sqrt{N_{f_0/\rho}} \frac{iG_F}{\sqrt{2}} V_{cd}^* \epsilon_\mu^*(h) \langle \pi\pi | \bar{c}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) d | \bar{D} \rangle, \quad (4-59)$$

其中 $\epsilon_\mu(h)$ 是轻子对系统的辅助极化矢量， $h = 0, \pm, t$ ， $N_{f_0/\rho} = \sqrt{\lambda} q^2 \beta_l / (96\pi^3 m_D^3)$ ， $\beta_l = 1 - \hat{m}_l^2$ ， $\hat{m}_l = m_l / \sqrt{q^2}$ 。而 $|V_{cd}|$ 的值取为 0.22^[53]。函数 A_i 可以分解为不同的分波部分

$$\begin{aligned} A_{0/t}(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) &= \sum_{J=0,1,2,\dots} A_{0/t}^J(q^2, m_{\pi\pi}^2) Y_J^0(\theta_{\pi^+}, 0), \\ A_{\parallel/\perp}(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) &= \sum_{J=0,1,2,\dots} A_{\parallel/\perp}^J(q^2, m_{\pi\pi}^2) Y_J^{-1}(\theta_{\pi^+}, 0), \\ A_{0/t}^J(q^2, m_{\pi\pi}^2) &= \sqrt{N_{f_0/\rho}} \mathcal{M}_D(f_0/\rho, 0/t)(q^2) L_{f_0/\rho}(m_{\pi\pi}^2) \equiv |A_{0/t}^J| e^{i\delta_{0/t}^J}, \\ A_{\parallel/\perp}^J(q^2, m_{\pi\pi}^2) &= \sqrt{N_{f_0/\rho}} \mathcal{M}_D(f_0/\rho, \parallel/\perp)(q^2) L_{f_0/\rho}(m_{\pi\pi}^2) \equiv |A_{\parallel/\perp}^J| e^{i\delta_{\parallel/\perp}^J}. \end{aligned} \quad (4-60)$$

这里 J 表示 $\pi\pi$ 系统的分波而下标 t 表示一个虚的矢量或轴矢量介子衰变到一个轻子对的类时分量。 $L_{f_0/\rho}(m_{\pi\pi})$ 是线形 (lineshape) 函数, 对于 P-波 ρ 介子我们采用 Breit-Wigner 分布

$$L_\rho(m_{\pi\pi}^2) = \sqrt{\frac{m_\rho \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}}{\pi}} \frac{1}{m_{\pi\pi}^2 - m_\rho^2 + im_\rho \Gamma_\rho}. \quad (4-61)$$

考虑到 ρ 衰变的动量依赖性, 引入跑动宽度

$$\Gamma_\rho(m_{\pi\pi}^2) = \Gamma_\rho^0 \left(\frac{|\vec{q}|}{|\vec{q}_0|} \right)^3 \frac{m_\rho}{m_{\pi\pi}} \frac{1 + (R|\vec{q}_0|)^2}{1 + (R|\vec{q}|)^2}, \quad (4-62)$$

其中 Blatt-Weisskopf 系数为 $R = (2.1 \pm 0.5 \pm 0.5) \text{GeV}^{-1}$ [82]。

自旋为零的末态只有一个极化状态, 其振幅为

$$i\mathcal{M}_D(f_0, 0) = N_1 i \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} F_1(q^2) \right], \quad i\mathcal{M}_D(f_0, t) = N_1 i \left[\frac{m_D^2 - m_{f_0}^2}{\sqrt{q^2}} F_0(q^2) \right], \quad (4-63)$$

$N_1 = iG_F V_{cd}^* / \sqrt{2}$ 。如果自旋为 $J \geq 1$, $\pi^+\pi^-$ 系统可以是纵向化也可以是横向极化, 由此可以将振幅写为

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_D(\rho, 0) &= -\frac{\alpha_L^J N_1 i}{2m_\rho \sqrt{q^2}} \left[(m_D^2 - m_\rho^2 - q^2)(m_D + m_\rho) A_1 - \frac{\lambda}{m_D + m_\rho} A_2 \right], \\ i\mathcal{M}_D(\rho, \pm) &= -\beta_T^J N_1 i \left[(m_D + m_\rho) A_1 \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{m_D + m_\rho} V \right], \\ i\mathcal{M}_D(\rho, t) &= -\alpha_L^J i N_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} A_0. \end{aligned} \quad (4-64)$$

α_L^J and β_T^J 是 Clebsch-Gordan 系数

$$\alpha_L^J = C_{1,0;J-1,0}^{J,0} C_{1,0;J-2,0}^{J-1,0} \cdots C_{1,0;1,0}^{2,0}, \quad \beta_T^J = C_{1,1;J-1,0}^{J,1} C_{1,0;J-2,0}^{J-1,0} \cdots C_{1,0;1,0}^{2,0}. \quad (4-65)$$

为了方便计算, 我们定义

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_D(\rho, \perp / ||) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [i\mathcal{M}_D(\rho, +) \mp i\mathcal{M}_D(\rho, -)], \\ i\mathcal{M}_D(\rho, \perp) &= -i\beta_T^J \sqrt{2} N_1 \left[\frac{\sqrt{\lambda} V}{m_D + m_\rho} \right], \\ i\mathcal{M}_D(\rho, ||) &= -i\beta_T^J \sqrt{2} N_1 [(m_D + m_\rho) A_1]. \end{aligned} \quad (4-66)$$

利用推广的形状因子, D 介子衰变到自旋为零的非共振 $\pi\pi$ 末态的矩阵元为

$$\begin{aligned} A_0^0 &= \sqrt{N_2} i \frac{1}{m_{\pi\pi}} \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_1^{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right], \\ A_t^0 &= \sqrt{N_2} i \frac{1}{m_{\pi\pi}} \left[\frac{m_D^2 - m_{\pi\pi}^2}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_0^{\pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right], \end{aligned} \quad (4-67)$$

其中 $N_2 = N_1 N_\rho \rho_\pi / (16\pi^2)$, $\rho_\pi = \sqrt{1 - 4m_\pi^2/m_{\pi\pi}^2}$ 。这样可以得到完整的角分布

$$\begin{aligned} & \frac{d^5\Gamma}{dm_{\pi\pi}^2 dq^2 d\cos\theta_{\pi^+} d\cos\theta_\ell d\phi} \\ &= \frac{3}{8} \left[I_1(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) + I_2(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \cos(2\theta_\ell) + I_3(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin^2\theta_\ell \cos(2\phi) \right. \\ & \quad + I_4(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin(2\theta_\ell) \cos\phi + I_5(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin(\theta_\ell) \cos\phi \\ & \quad + I_6(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \cos\theta_\ell + I_7(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin(\theta_\ell) \sin\phi \\ & \quad \left. + I_8(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin(2\theta_\ell) \sin\phi + I_9(q^2, m_{\pi\pi}^2, \theta_{\pi^+}) \sin^2\theta_\ell \sin(2\phi) \right]. \end{aligned} \quad (4-68)$$

接下来我们仅考虑 S 和 P 波的贡献, 因此上式可以约化为

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4\pi} \left[(1 + \hat{m}_t^2) |A_0^0|^2 + 2\hat{m}_t^2 |A_t^0|^2 \right] + \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta_{\pi^+} \left[(1 + \hat{m}_t^2) |A_0^1|^2 + 2\hat{m}_t^2 |A_t^1|^2 \right] \\ & \quad + \frac{2\sqrt{3} \cos\theta_{\pi^+}}{4\pi} \left[(1 + \hat{m}_t^2) \text{Re}[A_0^0 A_0^{1*}] + 2\hat{m}_t^2 \text{Re}[A_t^0 A_t^{1*}] \right] \\ & \quad + \frac{3 + \hat{m}_t^2}{2} \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta_{\pi^+} \left[|A_\perp^1|^2 + |A_\parallel^1|^2 \right], \\ I_2 &= -\beta_l \left\{ \frac{1}{4\pi} |A_0^0|^2 + \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta_{\pi^+} |A_0^1|^2 + \frac{2\sqrt{3} \cos\theta_{\pi^+}}{4\pi} \text{Re}[A_0^0 A_0^{1*}] \right\} \\ & \quad + \frac{1}{2} \beta_l \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta_{\pi^+} (|A_\perp^1|^2 + |A_\parallel^1|^2), \\ I_3 &= \beta_l \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta_{\pi^+} (|A_\perp^1|^2 - |A_\parallel^1|^2), \\ I_4 &= 2\beta_l \left[\frac{\sqrt{3} \sin\theta_{\pi^+}}{4\sqrt{2}\pi} \text{Re}[A_0^0 A_\parallel^{1*}] + \frac{3 \sin\theta_{\pi^+} \cos\theta_{\pi^+}}{4\sqrt{2}\pi} \text{Re}[A_0^1 A_\parallel^{1*}] \right], \\ I_5 &= 4 \left\{ \frac{\sqrt{3} \sin\theta_{\pi^+}}{4\sqrt{2}\pi} (\text{Re}[A_0^0 A_\perp^{1*}] - \hat{m}_t^2 \text{Re}[A_t^0 A_\parallel^{1*}]) \right. \\ & \quad \left. + \frac{3 \sin\theta_{\pi^+} \cos\theta_{\pi^+}}{4\sqrt{2}\pi} (\text{Re}[A_0^1 A_\perp^{1*}] - \hat{m}_t^2 \text{Re}[A_t^1 A_\parallel^{1*}]) \right\}, \\ I_6 &= 4 \left\{ \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta_{\pi^+} \text{Re}[A_\parallel^1 A_\perp^{1*}] + \hat{m}_t^2 \frac{1}{4\pi} \text{Re}[A_t^0 A_0^{0*}] + \hat{m}_t^2 \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta_{\pi^+} \text{Re}[A_t^1 A_0^{1*}] \right\}, \\ I_7 &= 4 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\pi} \sin\theta_{\pi^+} (\text{Im}[A_0^0 A_\parallel^{1*}] - \hat{m}_t^2 \text{Im}[A_t^0 A_\perp^{1*}]) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} \sin \theta_{\pi^+} \cos \theta_{\pi^+} (\text{Im}[A_0^1 A_{\parallel}^{1*}] - \hat{m}_l^2 \text{Im}[A_t^1 A_{\perp}^{1*}]) \Big\} \\
 I_8 = & 2\beta_l \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\pi} \sin \theta_{\pi^+} \text{Im}[A_0^0 A_{\perp}^{1*}] + \frac{3}{4\sqrt{2}\pi} \sin \theta_{\pi^+} \cos \theta_{\pi^+} \text{Im}[A_0^1 A_{\perp}^{1*}] \right\}, \\
 I_9 = & 2\beta_l \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta_{\pi^+} \text{Im}[A_{\perp}^1 A_{\parallel}^{1*}]. \tag{4-69}
 \end{aligned}$$

因为 **P**-波贡献中的相位来自于线型函数，而它对于不同的极化情况都是相同的，所以 I_9 项和 I_7 项的第二行为零。

对于半轻衰变 $D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell \nu$ ，衰变过程 $c \rightarrow s \ell \nu$ 的有效哈密顿量是

$$\mathcal{H}_{c \rightarrow s \ell \nu} = N_1^\ell [\bar{s} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c] [\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \ell] + h.c., \quad N_1^\ell = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}. \tag{4-70}$$

$D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell \nu_\ell$ 的微分宽度可以表示为

$$\frac{d^3 \Gamma}{dm_{K\pi}^2 dq^2 d \cos \theta_l} = \frac{3}{8} \left[I_1(q^2, m_{K\pi}^2) + I_2(q^2, m_{K\pi}^2) \cos(2\theta_l) + I_6 \cos(\theta_l) \right], \tag{4-71}$$

其中 I_i 的形式为

$$\begin{aligned}
 I_1(q^2, m_{\pi\pi}^2) &= [(1 + \hat{m}_l^2) |A_0^0|^2 + 2\hat{m}_l^2 |A_t^0|^2], \\
 I_2(q^2, m_{\pi\pi}^2) &= -\beta_l |A_0^0|^2, \\
 I_6(q^2, m_{\pi\pi}^2) &= 4\hat{m}_l^2 \text{Re}[A_0^0 A_t^{0*}]. \tag{4-72}
 \end{aligned}$$

利用 $D_s \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 的形状因子， D_s 衰变到 **S**-波 $\pi\pi$ 末态的螺旋度矩阵元为

$$\begin{aligned}
 A_0^0 &= N_1^\ell \sqrt{N_2^\ell} i \frac{1}{m_{D_s}} \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_1^{D_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right], \\
 A_t^0 &= N_1^\ell \sqrt{N_2^\ell} i \frac{1}{m_{D_s}} \left[\frac{m_{D_s}^2 - m_{\pi\pi}^2}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_0^{D_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right], \tag{4-73}
 \end{aligned}$$

其中

$$N_2^\ell = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{1 - 4m_\pi^2/m_{\pi\pi}^2} \times \frac{8}{3} \frac{\sqrt{\lambda} q^2 \beta_\ell}{256\pi^3 m_{D_s}^3}. \tag{4-74}$$

按照文献^[83]中的结论，我们可以研究一些 q^2 依赖的比值关系，例如依赖于轻子味道的比值

$$\mathcal{R}^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2, q^2) = \frac{d^2 \Gamma(D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \nu_\mu) / dq^2 dm_{\pi\pi}^2}{d^2 \Gamma(D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e) / dq^2 dm_{\pi\pi}^2}, \tag{4-75}$$

以及它的积分形式

$$R^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2) = \frac{d\Gamma(D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- \mu^+ \nu_\mu) / dm_{\pi\pi}^2}{d\Gamma(D_s \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e) / dm_{\pi\pi}^2}. \tag{4-76}$$

4.3.1 微分和积分衰变宽度

对于 D 衰变, 采用窄宽度近似的方法, 我们可以得到积分后的分支比

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0 e^- \bar{\nu}) = 2.08 \times 10^{-3} / 2.16 \times 10^{-3} (\text{LFQM/LCSR}), \quad (4-77)$$

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0 \mu^- \bar{\nu}) = 2.00 \times 10^{-3} / 2.05 \times 10^{-3} (\text{LFQM/LCSR}), \quad (4-78)$$

$$\mathcal{B}(\bar{D}^0 \rightarrow \rho^+ e^- \bar{\nu}) = 1.62 \times 10^{-3} / 1.67 \times 10^{-3} (\text{LFQM/LCSR}). \quad (4-79)$$

将这些结果和实验数据相比较, 可以发现两者符合程度是不错的^[53]

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0 e^- \bar{\nu}) = (2.18_{-0.25}^{+0.17}) \times 10^{-3}, \quad (4-80)$$

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0 \mu^- \bar{\nu}) = (2.4 \pm 0.4) \times 10^{-3}, \quad (4-81)$$

$$\mathcal{B}(\bar{D}^0 \rightarrow \rho^+ e^- \bar{\nu}) = (1.77 \pm 0.16) \times 10^{-3}. \quad (4-82)$$

详细分析 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的目的在于通过对所有角度变量积分得到双重微分分布宽度 $d^2\Gamma/dq^2 dm_{\pi\pi}^2$:

$$\frac{d^2\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2} = \left(1 + \frac{\hat{m}_\ell^2}{2}\right) (|A_0^0|^2 + |A_0^1|^2 + |A_{\parallel}^1|^2 + |A_{\perp}^1|^2) + \frac{3}{2} \hat{m}_\ell^2 (|A_t^1|^2 + |A_t^0|^2), \quad (4-83)$$

从中能够明显看出在轻子质量取零的极限下, 总的角分布的归一化改变为 S-波和 P-波振幅之和

$$\frac{d^2\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2} = |A_0^0|^2 + |A_0^1|^2 + |A_{\parallel}^1|^2 + |A_{\perp}^1|^2. \quad (4-84)$$

在图 4-8 中, 我们给出了 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}_e$ 过程分支比对于 $m_{\pi\pi}$ 的依赖关系。实线, 虚线和点线分别对应于总的, S-波部分和 P-波部分的贡献。注意到在 0.98GeV 附近没有出现共振态 $f_0(980)$, 这一结果已经被 BES-III 实验所证实^[84]。

为了匹配实验测量给出的动力学约束, 经过对 $m_{\pi\pi}^2$ 的积分我们可以研究如下定义的一般可观测量

$$\langle O \rangle = \int_{(m_\rho - \delta_m)^2}^{(m_\rho + \delta_m)^2} dm_{\pi\pi}^2 \frac{dO}{dm_{\pi\pi}^2}. \quad (4-85)$$

对于 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$, δ_m 选择为 ρ 介子的宽度: $\delta_m = \Gamma_\rho$ 。在窄宽度极限下, 线形函数的积分为

$$\int dm_{\pi\pi}^2 |L_\rho(m_{\pi\pi}^2)|^2 = \mathcal{B}(\rho^0 \rightarrow \pi^-\pi^+) = 1. \quad (4-86)$$

但是考虑到公式(4-62)给出的形式, 我们发现积分

$$\int_{(m_\rho - \delta_m)^2}^{(m_\rho + \delta_m)^2} dm_{\pi\pi}^2 |L_\rho(m_{\pi\pi}^2)|^2 = 0.70, \quad (4-87)$$

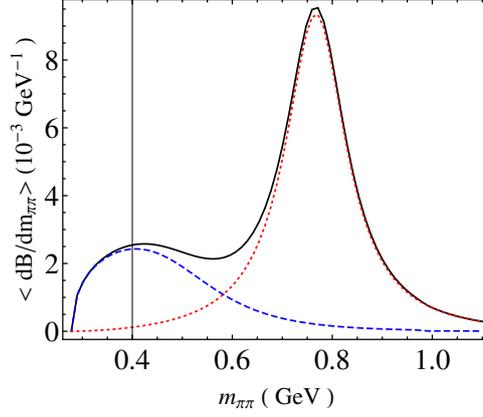


图 4-8 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}_e$ 衰变的分支比与 $m_{\pi\pi}$ 的关系曲线。其中重到轻形状因子采用了 LCSR 的计算结果。

Figure 4-8 The dependence of branching fraction on $m_{\pi\pi}$ in the $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-e^-\bar{\nu}_e$ process. The heavy to light form factors are evaluated by using LCSR.

要远低于期望的值。另一方面，在这一区域 S-波的线形函数是

$$\int_{(m_\rho - \delta_m)^2}^{(m_\rho + \delta_m)^2} dm_{\pi\pi}^2 |L_S(m_{\pi\pi}^2)|^2 = 0.37, \quad (4-88)$$

虽然很小但仍在同一个量级。通过在范围 $m_\rho - \Gamma_\rho$ to $m_\rho + \Gamma_\rho$ 内积分，我们得到

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)e^-\bar{\nu}) = 1.46 \times 10^{-3}/1.50 \times 10^{-3} \text{ (LFQM/LCSR)}, \quad (4-89)$$

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow \rho^0(\rightarrow \pi^+\pi^-)\mu^-\bar{\nu}) = 1.46 \times 10^{-3}/1.50 \times 10^{-3} \text{ (LFQM/LCSR)}. \quad (4-90)$$

在区间 $2m_\pi < m_{\pi\pi} < 1.0$ 内 S-波的贡献是

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow (\pi^+\pi^-)_S e^-\bar{\nu}) = 6.9 \times 10^{-4}, \quad (4-91)$$

$$\mathcal{B}(D^- \rightarrow (\pi^+\pi^-)_S \mu^-\bar{\nu}) = 7.1 \times 10^{-4}. \quad (4-92)$$

在 1GeV 以上，么正化的 χ PT 是失效的，因此无法给出可靠的预言。除此之外，我们可以研究以下比值的 q^2 依赖性

$$R_{\pi\pi}^{\mu/e}(q^2) = \frac{\langle d\Gamma(D \rightarrow \pi\pi\mu\bar{\nu}_\mu)/dq^2 \rangle}{\langle d\Gamma(D \rightarrow \pi\pi e\bar{\nu}_e)/dq^2 \rangle}. \quad (4-93)$$

图 4-9 给出了 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 的微分衰变宽度。图 (a) 对应于 $\ell = e$ 而图 (b) 对应于 $\ell = \mu$ 。图 (c) 给出了 $R_{\pi\pi}^{\mu/e}$ 对 q^2 的依赖关系。

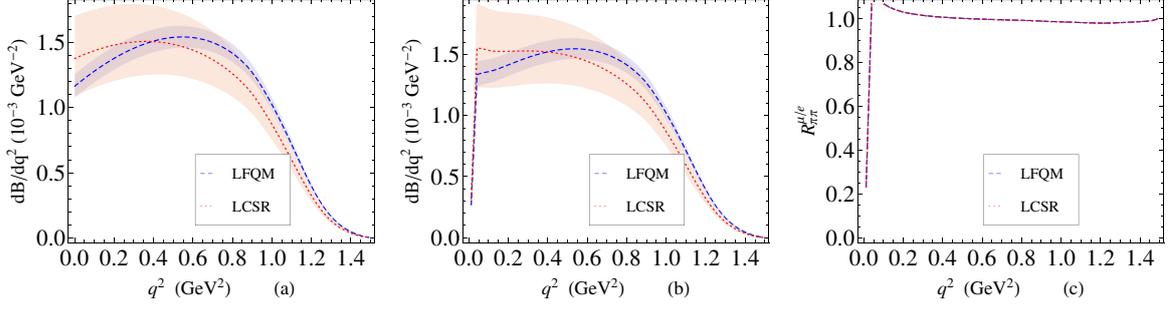


图 4-9 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ 的微分衰变宽度，其中图 (a) 中 $\ell = e$ 而图 (b) 中 $\ell = \mu$ 。图 (c) 是公式(4-93)中的 $R_{\pi\pi}^{\mu/e}$ 对 q^2 的依赖曲线。图中虚线和点线分别是采用了 LFQM 和 LCSR 计算出的 $D \rightarrow \rho$ 形状因子而得到的曲线。误差来自于形状因子，图 (c) 中大部分的误差都被抵消了。

Figure 4-9 Differential decay widths for the $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}_\ell$ with $\ell = e$ in panel (a) and $\ell = \mu$ in panel (b). The q^2 -dependent ratio $R_{\pi\pi}^{\mu/e}$ as defined in Eq. (4-93) is given in panel (c). The *dashed* and *dotted* curves are produced using the LFQM and LCSR results for $D \rightarrow \rho$ form factors. Errors from the form factors are shown as *shadowed bands*, and most errors cancel in the ratio $R_{\pi\pi}^{\mu/e}$ given in panel (c)

对于 D_s 衰变，图 4-10 中的 (a) 图表示 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$ ，点线和实线分别对应 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu\nu$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e\nu$ 的情况。 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\nu$ 微分分支比在 $m_{\pi\pi}$ 很大时，微分密度是被压低的。(b) 图给出了对 $R^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2)$ 的预言。(c) 图给出的是和实验结果的比较。积分后的分支比为

$$\mathcal{B}(D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu) = (1.52 \pm 0.36) \times 10^{-3}, \quad (4-94)$$

$$\mathcal{B}(D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\nu) = (1.68 \pm 0.39) \times 10^{-3}, \quad (4-95)$$

其中积分区域选取为 $0.5\text{GeV} < m_{\pi\pi} < 1.3\text{GeV}$ 。我们得到的理论结果和 CLEO 实验组的结果符合程度很好 (4-3, 4-4)^[49-51]。

4.3.2 θ_{π^+} 角分布

接下来讨论微分宽度关于角度 θ_{π^+} 的分布

$$\begin{aligned} \frac{d^3\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2 d\cos\theta_{\pi^+}} &= \frac{\pi}{2}(3I_1 - I_2) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ (4 + 2\hat{m}_l^2)|A_0^0|^2 + 6\hat{m}_l^2|A_t^0|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3}(8 + 4\hat{m}_l^2)\cos\theta_{\pi^+}\text{Re}[A_0^0 A_0^{1*}] + 12\sqrt{3}\hat{m}_l^2\cos\theta_{\pi^+}\text{Re}[A_t^0 A_t^{1*}] \right\} \end{aligned}$$

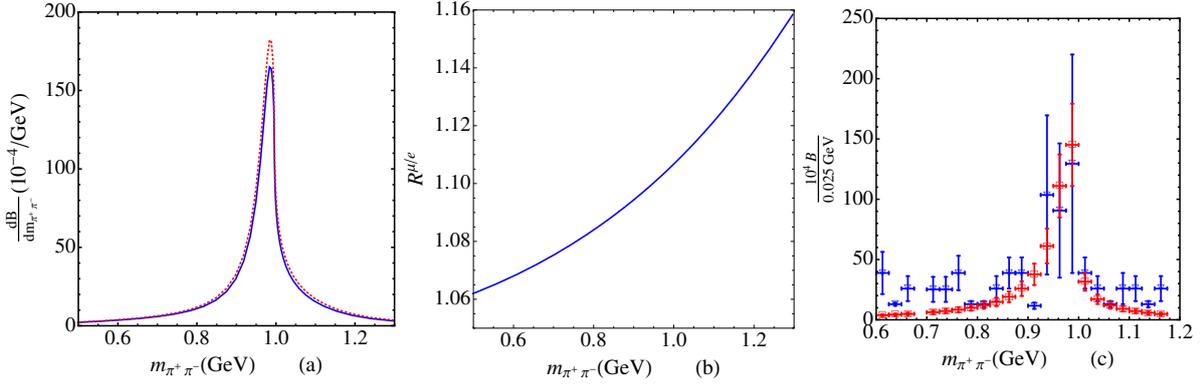


图 4-10 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\nu$ 衰变的微分分支比。第一幅图表示 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$ ，点线和实线分别对应于 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu\nu$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e\nu$ 。第二幅图给出了公式(4-76)定义的 $R^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2)$ 。第三幅图给出了和实验数据^[49, 50] 的比较。

Figure 4-10 The differential branching ratios for the $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\nu$. The first panel corresponds to the $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, in which the dotted and solid curves correspond to $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu\nu$ and $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e\nu$ respectively. The second panel shows the ratio $R^{\mu/e}(m_{\pi\pi}^2)$ defined in Eq. (4-76). A comparison with the experimental data^[49, 50] is given in panel (c).

$$\begin{aligned} & + (12 + 6\hat{m}_l^2)|A_0^1|^2 \cos^2 \theta_{\pi^+} + 18\hat{m}_l^2 \cos^2 \theta_{\pi^+} |A_t^1|^2 \\ & + (6 + 3\hat{m}_l^2) \sin^2 \theta_{\pi^+} (|A_{\perp}^1|^2 + |A_{\parallel}^1|^2) \Big\}. \end{aligned} \quad (4-96)$$

和只有 P-波贡献的分布相比，比如 $D \rightarrow \rho(\rightarrow \pi\pi)\ell\bar{\nu}$ ，公式 (4-96) 的第一行是 S-波 $\pi\pi$ 的贡献，而第二行来自于 S-波和 P-波的干涉项。基于这些干涉项，我们可以研究前反对称性

$$\begin{aligned} A_{FB}^{\pi} & \equiv \left[\int_0^1 - \int_{-1}^0 \right] d \cos \theta_{\pi^+} \frac{d^3\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2 d \cos \theta_{\pi^+}} \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 + \hat{m}_l^2) \text{Re}[A_0^0 A_0^{1*}] + \frac{3\sqrt{3}}{2} \hat{m}_l^2 \text{Re}[A_t^0 A_t^{1*}]. \end{aligned} \quad (4-97)$$

在确定的 q^2 和 $m_{\pi\pi}^2$ 处我们定义极化分数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S(q^2, m_{\pi\pi}^2) & = \frac{(1 + \hat{m}_l^2/2)|A_0^0|^2 + 3/2\hat{m}_l^2|A_t^0|^2}{d^2\Gamma/(dq^2 dm_{\pi\pi}^2)}, \\ \mathcal{F}_P(q^2, m_{\pi\pi}^2) & = \frac{(1 + \hat{m}_l^2/2)(|A_0^1|^2 + |A_{\parallel}^1|^2 + |A_{\perp}^1|^2) + 3/2\hat{m}_l^2|A_t^1|^2}{d^2\Gamma/(dq^2 dm_{\pi\pi}^2)}, \end{aligned} \quad (4-98)$$

以及

$$F_L(q^2, m_{\pi\pi}^2) = \frac{(1 + \hat{m}_l^2/2)|A_0^1(q^2, m_{\pi\pi}^2)|^2 + 3/2\hat{m}_l^2|A_t^1|^2}{(1 + \hat{m}_l^2/2)(|A_0^1|^2 + |A_{\parallel}^1|^2 + |A_{\perp}^1|^2) + 3/2\hat{m}_l^2|A_t^1|^2},$$

$$\overline{A_{FB}^\pi}(q^2, m_{\pi\pi}^2) = \frac{\sqrt{3}/2(2 + \hat{m}_l^2)\text{Re}[A_0^0 A_0^{1*}] + 3\sqrt{3}/2\hat{m}_l^2\text{Re}[A_t^0 A_t^{1*}]}{d^2\Gamma/(dq^2 dm_{\pi\pi}^2)}. \quad (4-99)$$

定义显示 $\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_P = 1$ 。

在图 4-11 中, 图 (a) 给出了 S-波分数 $\langle F_S \rangle$, 图 (b) 给出了 P-波分数 $\langle F_L \rangle$, 图 (c) 给出了 $\langle \overline{A_{FB}^\pi} \rangle$ 。这些可观测量是通过积分定义的

$$\langle F_S(q^2) \rangle = \frac{\int dm_{\pi\pi}^2 [(1 + \hat{m}_l^2/2)|A_0^0|^2 + 3/2\hat{m}_l^2|A_t^0|^2]}{\int dm_{\pi\pi}^2 d^2\Gamma/(dq^2 dm_{\pi\pi}^2)} \quad (4-100)$$

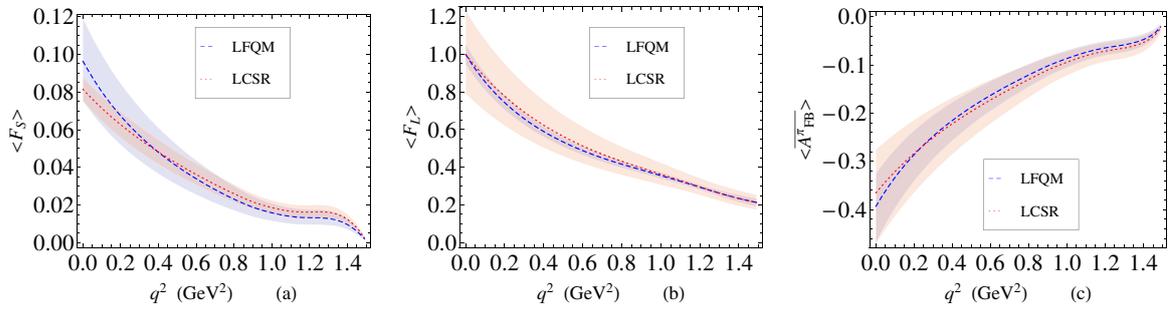


图 4-11 本图和图 4-9 类似, 但是描述的是 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 中 S-波的贡献 (图 (a)) 和 P-波纵向极化的贡献 (图 (b)), 以及前反对称性 $\overline{A_{FB}^\pi}$ (图 (c))。注意到对于 $\overline{A_{FB}^\pi}$, 有一个来自于 Watson 定理的不确定的正负号。这些结果都是关于末态为电子的情况, 末态为缪子的结果是类似的。

Figure 4-11 Same as Fig. 4-9 but for the S-wave contributions (a) and the longitudinal polarizations in P-wave contributions (b) to the $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$, and the forward-backward asymmetry $\overline{A_{FB}^\pi}$ (c). Notice that, for the $\overline{A_{FB}^\pi}$, there is a sign ambiguity arising from the use of Watson theorem. These diagrams are for the light lepton e , while the results for the μ lepton are similar

4.3.3 θ_l 角分布和前反对称性

对 θ_{π^+} 和 ϕ 积分, 我们可以得到分布

$$\begin{aligned} \frac{d^3\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2 d\cos\theta_l} &= \frac{3\pi}{4} \int d\cos\theta_{\pi^+} (I_1 + I_2 \cos(2\theta_l) + I_6 \cos\theta_l) \\ &= \frac{3}{4} \hat{m}_l^2 (|A_t^0|^2 + |A_t^1|^2) + \frac{3}{2} \cos\theta_l (\text{Re}[A_{||}^1 A_{\perp}^{1*}] + \hat{m}_l^2 \text{Re}[A_t^0 A_0^{0*} + A_t^1 A_0^{1*}]) \\ &\quad + \frac{3}{4} [1 - (1 - \hat{m}_l^2) \cos^2\theta_l] (|A_0^0|^2 + |A_0^1|^2) \\ &\quad + \frac{3}{8} [(1 + \hat{m}_l^2) + (1 - \hat{m}_l^2) \cos^2\theta_l] (|A_{||}^1|^2 + |A_{\perp}^1|^2). \end{aligned} \quad (4-101)$$

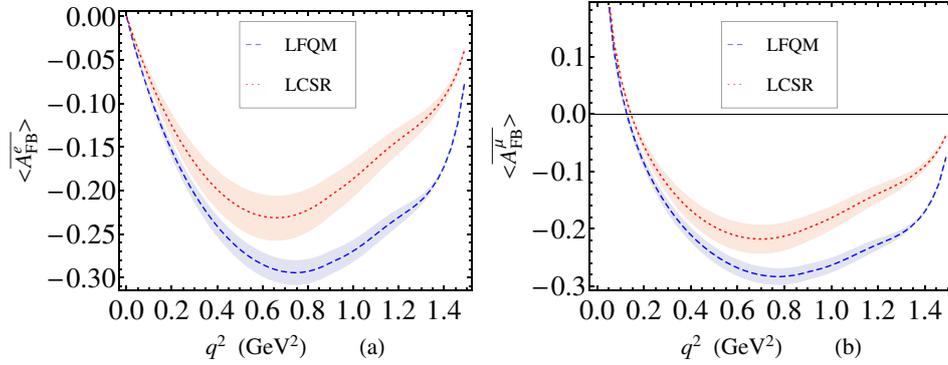


图 4-12 和图 4-9 类似，但是这里给出的是 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$ 的不对称性 $\overline{\mathcal{A}_{FB}^l}$ 关于 q^2 的变换曲线。

Figure 4-12 Same as Fig. 4-9 but for the asymmetry $\overline{\mathcal{A}_{FB}^l}$ in the $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}_\ell$

前反对称性定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{FB}^l &\equiv \left[\int_0^1 - \int_{-1}^0 \right] d \cos \theta_l \frac{d^3\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2 d \cos \theta_l} \\ &= \frac{3}{2} (\text{Re}[A_{\parallel}^1 A_{\perp}^{1*}] + \hat{m}_l^2 \text{Re}[A_t^0 A_0^{1*} + A_t^1 A_0^{1*}]),\end{aligned}\quad (4-102)$$

图 4-12 给出了 $\overline{\mathcal{A}_{FB}^l}$ 的结果。

4.3.4 ϕ 角分布

关于 ϕ 角的分布表示为

$$\begin{aligned}\frac{d^3\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2 d\phi} &= a_\phi + b_\phi^c \cos \phi + b_\phi^s \sin \phi + c_\phi^c \cos(2\phi) + c_\phi^s \sin(2\phi), \\ a_\phi &= \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\Gamma}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2}, \\ b_\phi^c &= \frac{3}{16} \pi \int I_5 d \cos \theta_{\pi^+} = \frac{3\sqrt{3}}{32\sqrt{2}\pi} (\text{Re}[A_0^0 A_{\perp}^{1*}] - \hat{m}_l^2 \text{Re}[A_t^0 A_{\perp}^{1*}]), \\ b_\phi^s &= \frac{3}{16} \pi \int I_7 d \cos \theta_{\pi^+} = \frac{3\sqrt{3}}{32\sqrt{2}\pi} (\text{Im}[A_0^0 A_{\perp}^{1*}] - \hat{m}_l^2 \text{Im}[A_t^0 A_{\perp}^{1*}]), \\ c_\phi^c &= \frac{1}{2} \int I_3 d \cos \theta_{\pi^+} = \frac{1}{4\pi} \beta_l (|A_{\perp}^1|^2 - |A_{\parallel}^1|^2), \\ c_\phi^s &= \frac{1}{2} \int I_9 d \cos \theta_{\pi^+} = \frac{1}{2\pi} \beta_l \text{Im}[A_{\perp}^1 A_{\parallel}^{1*}].\end{aligned}\quad (4-103)$$

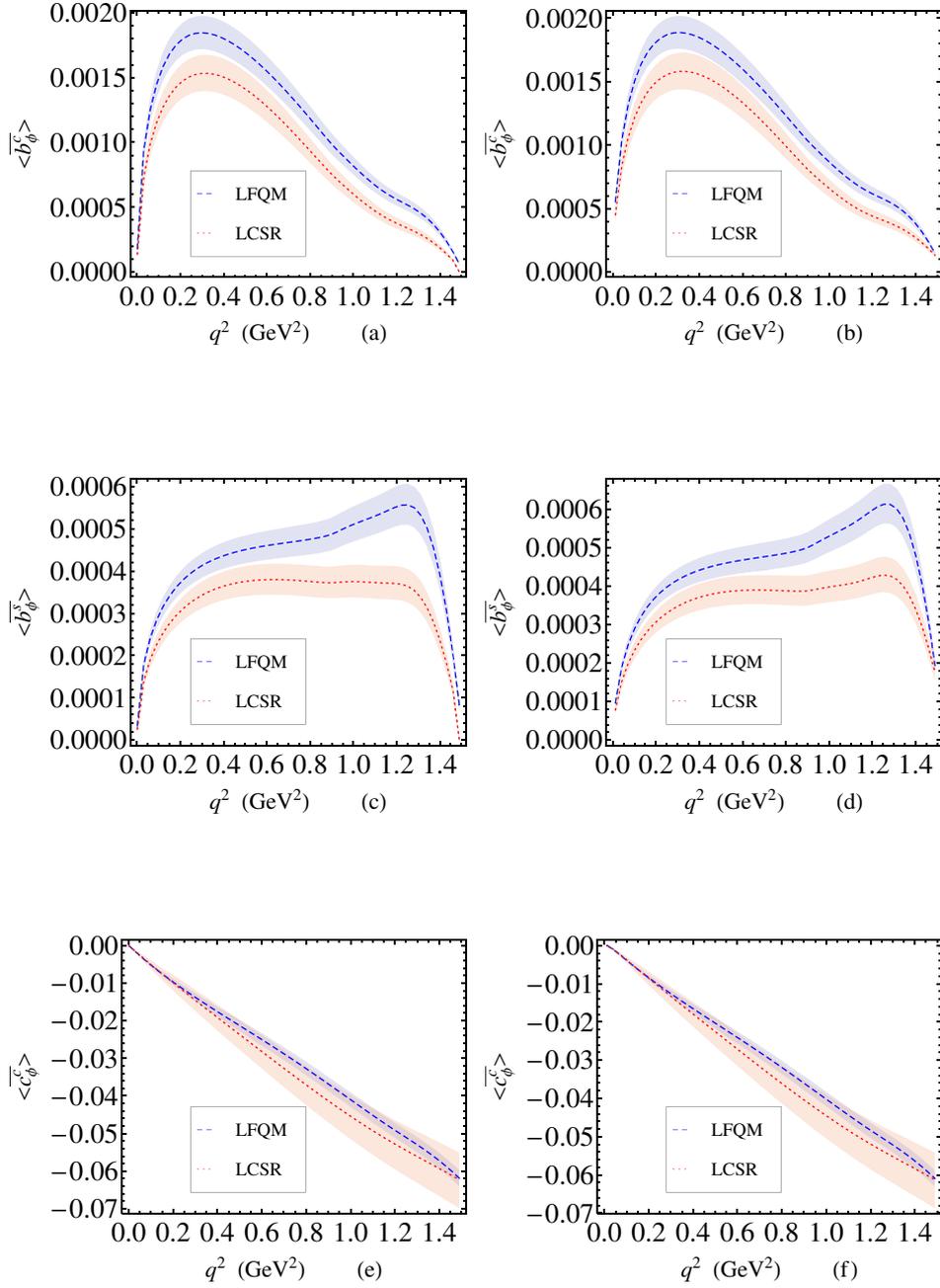


图 4-13 $D^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell \bar{\nu}_\ell$ 过程的归一化的系数关于 ϕ 角的分布，图 (a, c, e) 表示末态为电子的情况，而图 (b, d, f) 表示末态为 μ 的情况。

Figure 4-13 Same as Fig. 4-9 but for the normalized coefficients in the ϕ distributions of the $D^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \ell \bar{\nu}_\ell$. The left panels (a, c, e) are for the light lepton e , while the right panels (b, d, f) are for the μ lepton.

因为 P-波振幅的复相位来自于 Breit-Wigner 线形函数，所以系数 c_ϕ^s 为零。

图 4-13 给出了用两组形状因子得到的归一化系数。系数 b_ϕ^c 和 b_ϕ^s 有非常小的前置因子， $3\sqrt{3}/(32\sqrt{2}\pi) \sim 0.037$ ，因此数值上很小。 c_ϕ^c 也很小这是因为 $|A_\perp|^2$ 和 $|A_\parallel|^2$ 之间的相互抵消导致的。

4.4 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 半轻衰变唯象分析

4.4.1 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-$

对应于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-$ 衰变的有效哈密顿量为^[29]

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{tb}V_{ts}^* \sum_{i=1}^{10} C_i(\mu)O_i(\mu).$$

其中 O_i 是 4-夸克或者磁偶极算符， $C_i(\mu)$ 是 Wilson 系数。在参考文献中可以找到它们的具体形式^[29]。 G_F 是费米常数， $V_{tb} = 0.99914 \pm 0.00005$ 和 $V_{ts} = -0.0405_{-0.012}^{+0.011}$ 是 CKM 矩阵元。底夸克和奇异夸克质量为： $m_b = (4.66 \pm 0.03)\text{GeV}$ 和 $m_s = (0.095 \pm 0.005)\text{GeV}$ ^[2]。

一般来说，两强子态 M_1M_2 的不同分波成分都会对 $B \rightarrow M_1M_2\ell^+\ell^-$ 过程产生贡献，而用螺旋度振幅的方法可以得到一般的微分衰变宽度^[40-42]。在 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 过程中，S-波的贡献占主导，其角分布为

$$\frac{d^3\Gamma(B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-)}{dm_{\pi\pi}^2 dq^2 d\cos\theta_\ell} = \frac{3}{8} \left[J_1^c + J_2^c \cos(2\theta_\ell) \right], \quad (4-104)$$

其中角分布系数是

$$J_1^c = |\mathcal{A}_{L0}^0|^2 + |\mathcal{A}_{R0}^0|^2 + 8\hat{m}_\ell^2 |\mathcal{A}_{L0}^0 \mathcal{A}_{R0}^{0*}| \cos(\delta_{L0}^0 - \delta_{R0}^0) + 4\hat{m}_\ell^2 |\mathcal{A}_\ell^0|^2, \quad (4-105)$$

$$J_2^c = -\beta_{2\ell}^2 \left\{ |\mathcal{A}_{L0}^0|^2 + |\mathcal{A}_{R0}^0|^2 \right\}. \quad (4-106)$$

在上式中， $\beta_{2\ell} = \sqrt{1 - 4\hat{m}_\ell^2}$ ， $\hat{m}_\ell = m_\ell/\sqrt{q^2}$ ， θ_ℓ 是 B_s 和 μ^- 在轻子对静止系中运动方向之间的夹角， δ_{L0}^0 和 δ_{R0}^0 是螺旋度振幅的相位。螺旋度振幅用形状因子表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{L/R,0}^0 &= N_1^{2\ell} \sqrt{N_2^{2\ell} i} \frac{1}{m_{B_s}} \left[(C_9 \mp C_{10}) \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_1^{B_s \rightarrow \pi\pi}(q^2) \right. \\ &\quad \left. + 2(C_{7L} - C_{7R}) \frac{\sqrt{\lambda} m_b}{\sqrt{q^2}(m_B + m_{\pi\pi})} \mathcal{F}_T^{B_s \rightarrow \pi\pi}(q^2) \right], \\ \mathcal{A}_{L/R,t}^0 &= N_1^{2\ell} \sqrt{N_2^{2\ell} i} \frac{1}{m_{B_s}} \left[(C_9 \mp C_{10}) \frac{m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_0^{B_s \rightarrow \pi\pi}(q^2) \right], \end{aligned} \quad (4-107)$$

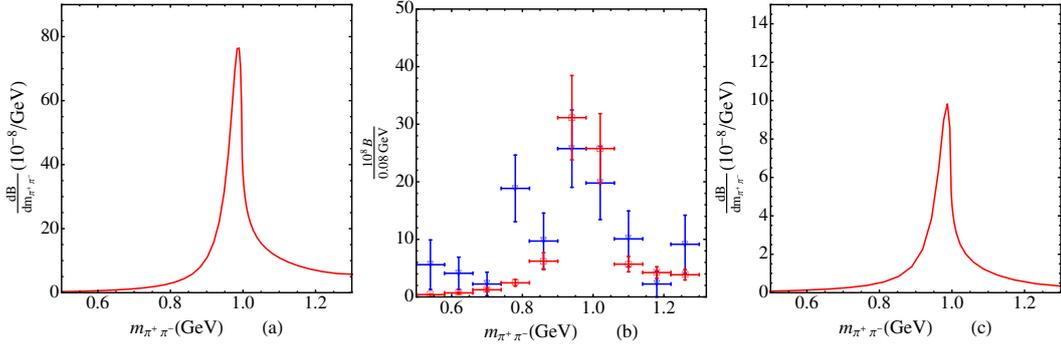


图 4-14 微分分支比 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$: 图 (a, b) 属于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 衰变, 图 (c) 属于 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ 衰变的。图 (b) 中, 实验数据已根据 (三角形标记) 分支比的中心值做了归一化处理: $\mathcal{B}(B_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-) = (8.6 \pm 1.5 \pm 0.7 \pm 0.7) \times 10^{-8}$ ^[85], 理论结果用矩形标记表示。

Figure 4-14 Differential branching ratios $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$ for the $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ in panel (a) and (b), and $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ in panel (c). In panel (b), experimental data (with triangle markers) has been normalized to the central value of the branching fraction: $\mathcal{B}(B_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-) = (8.6 \pm 1.5 \pm 0.7 \pm 0.7) \times 10^{-8}$ ^[85], and theoretical results are shown with square markers.

$$\mathcal{A}_t^0 = \mathcal{A}_{R,t}^0 - \mathcal{A}_{L,t}^0 = 2N_1^{2\ell} \sqrt{N_2^{2\ell}} C_{10}^i \frac{1}{m_{B_s}} \left[\frac{m_{B_s}^2 - m_{\pi\pi}^2}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_0^{B_s \rightarrow \pi\pi}(q^2) \right]. \quad (4-108)$$

其中

$$N_1^{2\ell} = \frac{G_F}{4\sqrt{2}} \frac{\alpha_{\text{em}}}{\pi} V_{tb} V_{ts}^* \quad (4-109)$$

$$N_2^{2\ell} = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{1 - 4m_\pi^2/m_{\pi\pi}^2} \times \frac{8}{3} \frac{\sqrt{\lambda} q^2 \beta_{2\ell}}{256\pi^3 m_{B_s}^3}. \quad (4-110)$$

在 B_s 静止系中, Källén 函数 λ 和 $\pi^+\pi^-$ 动量的关系是

$$\lambda \equiv \lambda(m_{B_s}^2, m_{\pi^+\pi^-}^2, q^2), \quad \lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca). \quad (4-111)$$

图 4-14 中 (a) 与 (b) 图给出了 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 的微分分支比 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, (c) 图给出了 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ 的微分分支比。(a) 图清楚地显示了 $f_0(980)$ 的共振峰。(b) 图给出了我们的理论结果和实验结果^[85] 的比较, 两者的吻合度还是很高的。在 0.5 GeV to 1.3 GeV 范围内对 $m_{\pi\pi}$ 积分, 我们得到分支比

$$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-) = (6.9 \pm 1.6) \times 10^{-8}, \quad (4-112)$$

这和 (4-2) 中的数据是自洽的。

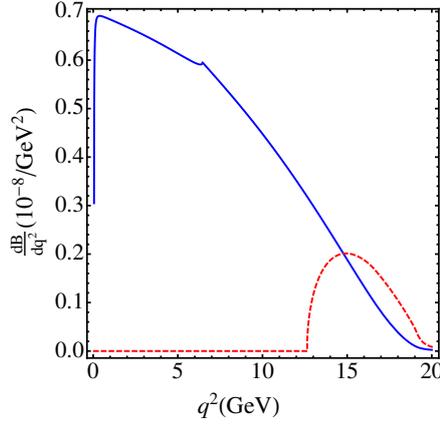


图 4-15 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ (实线) 和 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ (虚线) 的微分支比, 单位是 $10^{-8}/\text{GeV}^2$ 。
Figure 4-15 The differential branching ratio $d\mathcal{B}/dq^2$ for the $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ (solid curve) and $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ (dashed curve) is given in unit of $10^{-8}/\text{GeV}^2$.

图 4-15 给出了 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ (实线) 和 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-$ (虚线) 的微分分布 $d\mathcal{B}/dq^2$ (单位是 $10^{-8}/\text{GeV}^2$)。积分后的分支比为

$$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\tau^+\tau^-) = (8.8 \pm 2.1) \times 10^{-9}, \quad (4-113)$$

其中积分区域为 $0.5\text{GeV} < m_{\pi\pi} < 1.3\text{ GeV}$ 。

4.4.2 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$

描述 $b \rightarrow s\nu\bar{\nu}$ 的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{b \rightarrow s\nu\bar{\nu}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_{em}}{2\pi \sin^2(\theta_W)} V_{tb}V_{ts}^* \eta_X X(x_t) O_L \equiv C_L O_L, \quad (4-114)$$

其中 O_L 是四费米子算符

$$O_L = [\bar{s}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)b][\bar{\nu}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu]; \quad (4-115)$$

θ_W 是温伯格角, 函数 $X(x_t)$ ($x_t = m_t^2/m_W^2$) 在文献中已给出^[29, 86], η_X 是 QCD 因子^[87-89]。利用以上给出的哈密顿量, 我们可以计算出微分衰变宽度

$$\frac{d^2\Gamma(\bar{B}_s \rightarrow (\pi^+\pi^-)\nu\bar{\nu})}{dq^2 dm_{\pi\pi}^2} = 3 \times |A_0^0|^2, \quad (4-116)$$

因子 3 来自于三代中微子。相应的螺旋度振幅为

$$A_0^0 = C_L \sqrt{N_2'} i \frac{1}{m_{B_s}} \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} \mathcal{F}_1^{B_s \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}^2, q^2) \right],$$

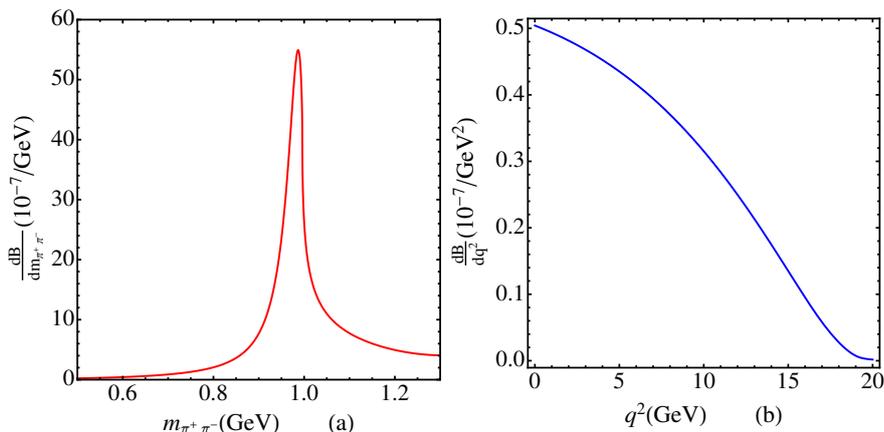


图 4-16 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$ 微分分支比: 左图是 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, 右图是 $d\mathcal{B}/dq^2$ 。

Figure 4-16 The differential branching ratios for the $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$: the left panel for the $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$, and the right one for the $d\mathcal{B}/dq^2$.

$$N_2^{2\nu} = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{1 - 4m_\pi^2/m_{\pi\pi}^2} \times \frac{8}{3} \frac{\sqrt{\lambda}q^2}{256\pi^3 m_{B_s}^3}. \quad (4-117)$$

图 4-16 给出了 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$ 的微分分布 $d\mathcal{B}/dm_{\pi\pi}$ (左图) 和 $d\mathcal{B}/dq^2$ (右图)。在 $0.5\text{GeV} < m_{\pi\pi} < 1.3\text{GeV}$ 区域内对微分分布积分, 我们得到

$$\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}) = (4.9 \pm 1.2) \times 10^{-7}. \quad (4-118)$$

4.5 本章总结

这一章中我们从理论上详细分析了 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}$, $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell\bar{\nu}$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu_e$ 衰变以及半轻 FCNC 过程 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-$ 和 $B_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\nu\bar{\nu}$ 。对于 $D^- \rightarrow \pi^+\pi^-\ell\bar{\nu}$ 和 $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\ell\bar{\nu}$ 我们给出了一个普适的并且包含任意 $\pi\pi$ 分波成分的角分布。除了考虑 S-波和 P-波的贡献我们进一步研究了分支比、前反对称性和一些其他的可观测量。其中 P-波的贡献由 ρ^0 共振态主导, 而 S-波的贡献则是通过么正化的手征微扰论进行分析。我们最终得到的 $D \rightarrow \rho\ell\nu$ 分支比在 10^{-3} 数量级, 这和目前的实验结果是相符的。另外我们预言 S-波贡献的分支比在 10^{-4} 的数量级, 同时在 980GeV 附近不存在共振态 $f_0(980)$, 这一预言已经被 BES-III 实验所证实^[84]。其它预言有待于今后 BES-III 或者 LHCb 实验组进行验证。

对于 FCNC 过程 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-\ell^+\ell^-(\nu\bar{\nu})$, 我们采用适当的动力学区域使得 $\pi^+\pi^-$ 系统的不变质量在 0.5-1.3 GeV 的范围内。这些过程是由 S-波的贡献主导的, 因此它们对于确定 S-波 $\pi^+\pi^-$ 光锥分布振幅有重要的意义。我们用标量形状因子归一化

S-波 $\pi^+\pi^-$ 光锥分布振幅, 并且比较了分别用么正化的 χ PT 和用 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 数据拟合两种方法给出的标量形状因子。用光锥 QCD 求和规则推导了 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 和 $D_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 的跃迁形状因子, 并用其计算了微分衰变宽度, 其结果和实验的符合程度是很好的。我们期望这些结果在未来由 BEPC 上的 BES-III, LHC 上的 LHCb 和 KEKB 上的 Super-B 工厂进行精确的验证, 在理论上有助于确定两介子的光锥分布振幅。

第五章 双重味重子弱衰变的唯象研究

由多个重味夸克组成的束缚态是重味物理的热门研究问题之一。其中双重味重子是一个十分理想的能够用来研究 QCD 非微扰动力学的系统，多年以来人们一直试图在实验上寻找双重味重子^[90-95]。直到 2017 年，LHCb 合作组宣布发现了夸克模型中所预言的最轻的双重味重子 $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ ，如图 5-1 所示，它的质量为 $m_{\Xi_{cc}^{++}} = (3621.40 \pm 0.72 \pm 0.27 \pm 0.14)\text{MeV}$ ^[96]。无论是在理论上还是实验上， $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ 的发现对于重味物理都是具有里程碑式的意义的。一方面，人们有信心未来的 LHCb 实验能够提供跟多的关于双重味重子衰变和产生的数据，甚至于发现质量更大的双重味重子；另一方面，对于多重夸克系统的研究能帮助我们理解强子结构和强子谱，这一发现也激发了人们对双重味重子的研究兴趣^[97-126]。

通常，为了解决重介子的弱衰变问题人们广泛地采用了因子化方法，其目的在于分离高能和低能的自由度。高能的贡献可以用微扰论计算，而低能的自由度，或者说长程的贡献，可以用光锥分布振幅等非微扰量参数化出来。但是对于双重味重子衰变，在以往文献中给出的低能输入量或者短程系数非常少。对于重夸克衰变，味道 SU(3) 对称性是一个非常有用的工具。第二章第三节介绍了 SU(3) 对称性分析的基本思想。根据 SU(3) 不变性构造的不可约表示振幅可以通过对实验数据的拟合得到，因

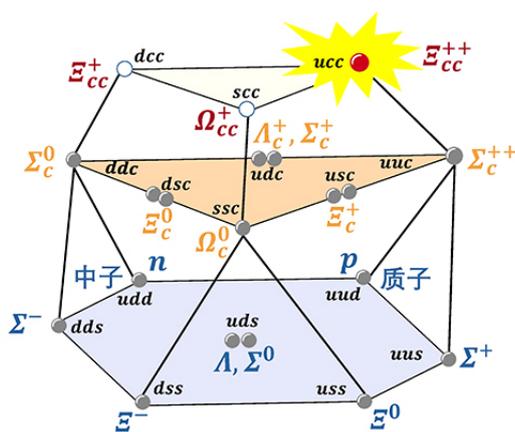


图 5-1 夸克模型预言的重子态：最顶端的三个粒子由两个粲夸克以及一个轻夸克构成，其中 $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ 最近已在实验上被发现^[96]。

Figure 5-1 The standard quark model predict a series of baryon states: the top three baryons consist of two charm quarks and one light quark, Among which $\Xi_{cc}^{++}(ccu)$ has been observed by experiment^[96].

此 $SU(3)$ 分析在实验数据和动力学方法之间建立了一座桥梁。

虽然 $SU(3)$ 方法是一个非常有效的工具，并且可以提供大量的关于唯象的结果。 $SU(3)$ 方法无法处理衰变过程的动力学。要具体计算出某一衰变过程的衰变宽度，我们需要寻找其他的途径。 $LCSR$ 是一种非常适合于处理重强子衰变的非微扰方法。在第四章中我们介绍了 $LCSR$ 于介子衰变中的应用，这一方法同样可以用来处理重子到重子的衰变过程。这一章将首先阐述如何用 $SU(3)$ 分析的方法从唯像上研究双重味重子不同衰变道之间存在的关系。然后运用 $LCSR$ 具体计算双重味重子衰变到反三重态重子 Λ_Q 的形状因子，另外简要介绍如何用 SVZ 求和规则计算相同的形状因子，最后用所得到的形状因子计算衰变宽度及分支比。

5.1 双重味重子弱衰变的 $SU(3)$ 分析

5.1.1 粒子多重态的表示

我们首先给出不同的强子态在味道 $SU(3)$ 对称群下的表示。表 5-1 给出了用夸克模型得到的双重味重子的量子数^[53]。这些重子构成 $SU(3)$ 三重态

$$T_{cc} = \begin{pmatrix} \Xi_{cc}^{++}(ccu) \\ \Xi_{cc}^+(ccd) \\ \Omega_{cc}^+(ccs) \end{pmatrix}, \quad T_{bc} = \begin{pmatrix} \Xi_{bc}^+(bcu) \\ \Xi_{bc}^0(bcd) \\ \Omega_{bc}^0(bcs) \end{pmatrix}, \quad T_{bb} = \begin{pmatrix} \Xi_{bb}^0(bbu) \\ \Xi_{bb}^-(bbd) \\ \Omega_{bb}^-(bbs) \end{pmatrix}. \quad (5-1)$$

对于自旋-宇称为 J^P 的基态单重味重子，其中的两个轻夸克组成所谓的双夸克对 (diquark)，自旋-宇称记为 j^p 。双夸克对可以耦合成 $j^p = 0^+$ 或 $j^p = 1^+$ 态。若 $j^p = 0^+$ ，单重味重子构成味道 $SU(3)$ 反三重态表示，其中双夸克对的自旋波函数是反称的。由于在颜色空间它们也是反称的，再考虑到夸克系统满足费米统计，因此双夸克对在味道空间也必须是反称的。这样的单重味重子只能由 u ， d 或 s 中的两个夸克和一个重夸克 Q 构成，其自旋-宇称为 $J^P = 1/2^+$ 。奇异数 $S = 0$ 的态称作 Λ_Q ，奇异数 $S = -1$ 的态称作 Ξ_Q 。若 $j^p = 1^+$ ，单重味重子构成味道 $SU(3)$ 六重态表示，其中双夸克对的自旋波函数是对称的。同样的方法可以推断出双夸克对在味道空间也必须是对称的。其中 $J^P = 1/2^+(J^P = 3/2^+)$ ， $S = 0$ 的态称作 $\Sigma_Q(\Sigma_Q^*)$ ， $J^P = 1/2^+(J^P = 3/2^+)$ ， $S = -1$ 的态称作 $\Xi'_Q(\Xi_Q^*)$ ， $J^P = 1/2^+(J^P = 3/2^+)$ ， $S = -2$ 的态称作 $\Omega_Q(\Omega_Q^*)$ 。图 5-2 给出的是反三重态和自旋为 $1/2$ 的六重态粲重子。反三重态和六重态矩阵分别表示为

$$T_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{3}}} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_c^+ & \Xi_c^+ \\ -\Lambda_c^+ & 0 & \Xi_c^0 \\ -\Xi_c^+ & -\Xi_c^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathbf{c}\mathbf{6}} = \begin{pmatrix} \Sigma_c^{++} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c^{'+} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_c^+ & \Sigma_c^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c^{'+} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Xi_c'^0 & \Omega_c^0 \end{pmatrix}. \quad (5-2)$$

表 5-1 基态双重味重子的量子数：轻夸克 q 对应于 u, d 夸克； J^P 表示重子的总自旋和宇称； S_h^π 表示重夸克系统的自旋。

Table 5-1 Quantum numbers for the ground state of doubly heavy baryons. The light quark q corresponds to u, d quark. The J^P denotes the total spin and parity of the baryons. The label S_h^π corresponds to the spin of the heavy quark system.

Baryon	Quark Content	S_h^π	J^P	Baryon	Quark Content	S_h^π	J^P
Ξ_{cc}	$\{cc\}q$	1^+	$1/2^+$	Ξ_{bb}	$\{bb\}q$	1^+	$1/2^+$
Ξ_{cc}^*	$\{cc\}q$	1^+	$3/2^+$	Ξ_{bb}^*	$\{bb\}q$	1^+	$3/2^+$
Ω_{cc}	$\{cc\}s$	1^+	$1/2^+$	Ω_{bb}	$\{bb\}s$	1^+	$1/2^+$
Ω_{cc}^*	$\{cc\}s$	1^+	$3/2^+$	Ω_{bb}^*	$\{bb\}s$	1^+	$3/2^+$
Ξ'_{bc}	$\{bc\}q$	0^+	$1/2^+$	Ω'_{bc}	$\{bc\}s$	0^+	$1/2^+$
Ξ_{bc}	$\{bc\}q$	1^+	$1/2^+$	Ω_{bc}	$\{bc\}s$	1^+	$1/2^+$
Ξ_{bc}^*	$\{bc\}q$	1^+	$3/2^+$	Ω_{bc}^*	$\{bc\}s$	1^+	$3/2^+$

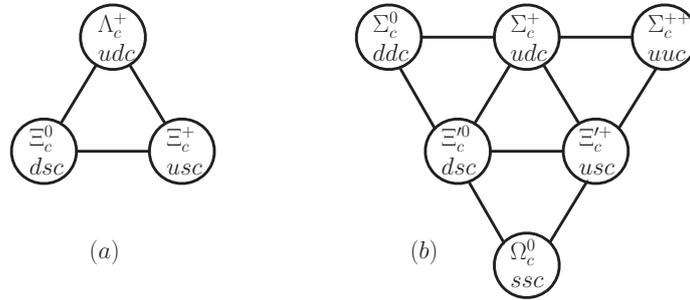


图 5-2 含有一个粲夸克和两个轻夸克的粲重子反三重态 (图 (a)) 和六重态 (图 (b))。

Figure 5-2 Anti-triplets (panel a) and sextets (panel b) of charmed baryons.

对于带 b 夸克的重子，表示矩阵是类似的。全部由轻夸克组成的重子可以构成 $SU(3)$ 八重态或者十重态。八重态表示矩阵为

$$T_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda^0 \end{pmatrix}, \quad (5-3)$$

十重态表示矩阵为

$$\begin{aligned}
 (T_{10})^{111} &= \Delta^{++}, & (T_{10})^{112} &= (T_{10})^{121} = (T_{10})^{211} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+, \\
 (T_{10})^{222} &= \Delta^-, & (T_{10})^{122} &= (T_{10})^{212} = (T_{10})^{221} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0, \\
 (T_{10})^{113} &= (T_{10})^{131} = (T_{10})^{311} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma'^+, & (T_{10})^{223} &= (T_{10})^{232} = (T_{10})^{322} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma'^-, \\
 (T_{10})^{123} &= (T_{10})^{132} = (T_{10})^{213} = (T_{10})^{231} = (T_{10})^{312} = (T_{10})^{321} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma'^0, \\
 (T_{10})^{133} &= (T_{10})^{313} = (T_{10})^{331} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi'^0, & (T_{10})^{233} &= (T_{10})^{323} = (T_{10})^{332} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Xi'^-, \\
 (T_{10})^{333} &= \Omega^-.
 \end{aligned} \tag{5-4}$$

轻的赝标介子构成八重态

$$M_8 = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -2\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \tag{5-5}$$

这里我们不考虑味道单态 η_1 。

5.1.2 双重味重子半轻衰变

对于双重味重子弱衰变的 $SU(3)$ 对称性分析可以包含了半轻和非轻过程，我们主要给出半轻衰变的 $SU(3)$ 分析，对于非轻过程的分析可以参见文献 [99, 107, 127]。

5.1.2.1 Ξ_{cc} 和 Ω_{cc} 衰变

$c \rightarrow q\bar{l}\nu$ 衰变的有效哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [V_{cq}^* \bar{q}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) c \bar{\nu}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) l] + h.c., \tag{5-6}$$

其中 $q = d, s$, V_{cd} and V_{cs} 是 CKM 矩阵元。重到轻夸克算符构成 $SU(3)$ 三重态，记为 H_3 。其分量为： $(H_3)^1 = 0$, $(H_3)^2 = V_{cd}^*$, $(H_3)^3 = V_{cs}^*$ 。在强子层面，描述 Ξ_{cc} 或 Ω_{cc} 半轻衰变到一个单粲重子的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff}^{(2)} = a_1 (T_{cc})^i (H_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{3}}})_{[ij]} \bar{\nu}_l + a_2 (T_{cc})^i (H_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{c}\mathbf{6}})_{\{ij\}} \bar{\nu}_l. \tag{5-7}$$

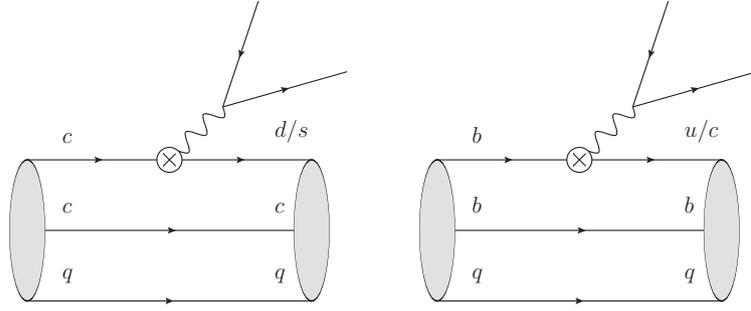

 图 5-3 半轻衰变 Ξ_{cc} 或 Ω_{cc} (左) 和半轻衰变 Ξ_{bb} 或 Ω_{bb} (右) 的费曼图。

 Figure 5-3 Feynman diagrams for semileptonic decays of Ξ_{cc} or Ω_{cc} (left) and Ξ_{bb} or Ω_{bb} (right).

图 5-3 中, 左图给出了相应的费曼图。对于多体衰变过程 Ξ_{cc} 或 Ω_{cc} 半轻衰变到一个单粲重子以及一个赝标介子, 相应的有效哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff}^{multi} = & a_1(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{c\bar{3}})_{[ik]}M_j^k \bar{\nu}_\ell \ell + a_2(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{c\bar{3}})_{[kj]}M_i^k \bar{\nu}_\ell \ell \\ & + a_3(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{c\mathbf{6}})_{[ik]}M_j^k \bar{\nu}_\ell \ell + a_4(T_{cc})^i(H_3)^j(\bar{T}_{c\mathbf{6}})_{[kj]}M_i^k \bar{\nu}_\ell \ell. \end{aligned} \quad (5-8)$$

这两套哈密顿量中的系数 a_1 、 a_2 、 a_3 和 a_4 是 $SU(3)$ 不可约且非微扰的振幅。注意到 $\mathcal{H}_{eff}^{(2)}$ 和 $\mathcal{H}_{eff}^{multi}$ 中相同的系数如 a_1 、 a_2 实际上是两套不同的独立系数, 这里为了方便起见采用了同样的记号。不同衰变道的衰变振幅可以从公式 (5-7) 和公式 (5-8) 导出, 其中少体衰变的结果在表 5-2 中给出。通过对比这些振幅, 我们可以发现在 $SU(3)$ 对称极限下, 三体衰变振幅之间存在以下关系

$$\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ l^+ \nu) = \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu) = \frac{|V_{cd}|^2}{|V_{cs}|^2} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ l^+ \nu), \quad (5-9)$$

$$\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ l^+ \nu) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu), \quad (5-10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ l^+ \nu) &= \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 l^+ \nu) \\ &= \frac{|V_{cd}|^2}{|V_{cs}|^2} \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ l^+ \nu), \end{aligned} \quad (5-11)$$

$$\Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c'^+ l^+ \nu) = \Gamma(\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu) = \frac{1}{2} \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 l^+ \nu). \quad (5-12)$$

5.1.1.2 Ξ_{bb} 和 Ω_{bb} 衰变

描述 b 夸克衰变的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [V_{q'b} \bar{q}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b] \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu + h.c., \quad (5-13)$$

表 5-2 双重味重子 $\Xi_{cc}(\Xi_{bb})$ 和 $\Omega_{cc}(\Omega_{bb})$ 衰变到单重味重子的 SU(3) 振幅。

 Table 5-2 SU(3) amplitudes for doubly heavy baryons $\Omega_{cc}(\Omega_{bb})$ decay into a singly heavy baryon.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Sigma_c^+ l^+ \nu$	$\frac{a_2 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ l^+ \nu$	$a_1 V_{cd}^*$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ l^+ \nu$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ l^+ \nu$	$a_1 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^0 l^+ \nu$	$a_2 V_{cd}^*$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu$	$a_1 V_{cs}^*$
$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu$	$\frac{a_2 V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu$	$-a_1 V_{cd}^*$
$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu$	$\frac{a_2 V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 l^+ \nu$	$a_2 V_{cs}^*$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 l^- \bar{\nu}$	$-a_4 V_{ub}$	$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ l^- \bar{\nu}$	$a_3 V_{cb}$
$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 l^- \bar{\nu}$	$-a_4 V_{ub}$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 l^- \bar{\nu}$	$a_3 V_{cb}$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ l^- \bar{\nu}$	$a_5 V_{ub}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 l^- \bar{\nu}$	$a_3 V_{cb}$
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_5 V_{ub}}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_5 V_{ub}}{\sqrt{2}}$

$q' = u, c$ 。 $b \rightarrow c$ 跃迁算符是一个 SU(3) 单态，而 $b \rightarrow u$ 跃迁算符构成 SU(3) 三重态： H'_3 ，分量为 $(H'_3)^1 = 1$ ， $(H'_3)^{2,3} = 0$ 。图 5-3 中右图给出了相应的费曼图。在强子层面 Ξ_{bb} 和 Ω_{bb} 少体和多体衰变的有效哈密顿量分别可以构造为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{eff}}^{(2)} &= a_3 (T_{bb})^i (\bar{T}_{bc})_i \bar{l} \nu_l + a_4 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[ij]} \bar{l} \nu_l + a_5 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{ij\}} \bar{l} \nu_l, \\
 \mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{multi}} &= a_5 (T_{bb})^i (\bar{T}_{bc})_j M_i^j \bar{\ell} \nu_\ell + a_6 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[ik]} M_j^k \bar{\ell} \nu_\ell \\
 &\quad + a_7 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[jk]} M_i^k \bar{\ell} \nu_\ell + a_8 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{ik\}} M_j^k \bar{\ell} \nu_\ell \\
 &\quad + a_9 (T_{bb})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{jk\}} M_i^k \bar{\ell} \nu_\ell.
 \end{aligned} \tag{5-14}$$

表 5-2 列出了相应的少体衰变振幅。从中我们可以找出衰变宽度之间的关系

$$\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 l^- \bar{\nu}), \tag{5-15}$$

$$\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 l^- \bar{\nu}), \tag{5-16}$$

$$\Gamma(\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ l^- \bar{\nu}) = 2\Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^0 l^- \bar{\nu}) = 2\Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 l^- \bar{\nu}). \tag{5-17}$$

5.1.2.3 Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 衰变

强子层面 Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 三体半轻衰变的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = a_6 (T_{bc})^i (\bar{T}_{cc})_i \bar{l} \nu_l + a_7 (T_{bc})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{c}\bar{\mathbf{3}}})_{[ij]} \bar{\nu}_l l + a_8 (T_{bc})^i (H'_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{c}\mathbf{6}})_{\{ij\}} \bar{\nu}_l l$$

表 5-3 bcq 重子衰变振幅。

 Table 5-3 Similar with Tab. 5-2 but for the doubly-heavy bcq baryons.

channel	amplitude	channel	amplitude
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Lambda_b^0 l^+ \nu$	$a_9 V_{cd}^*$	$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^{++} l^- \bar{\nu}$	$a_6 V_{cb}$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 l^+ \nu$	$a_9 V_{cs}^*$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ l^- \bar{\nu}$	$a_6 V_{cb}$
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b^- l^+ \nu$	$a_9 V_{cs}^*$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ l^- \bar{\nu}$	$a_6 V_{cb}$
$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b^- l^+ \nu$	$-a_9 V_{cd}^*$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}$	$-a_7 V_{ub}$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Sigma_b^0 l^+ \nu$	$\frac{a_{10} V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_c^+ l^- \bar{\nu}$	$-a_7 V_{ub}$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b'^0 l^+ \nu$	$\frac{a_{10} V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} l^- \bar{\nu}$	$a_8 V_{ub}$
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_b^- l^+ \nu$	$a_{10} V_{cd}^*$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_c^+ l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_8 V_{ub}}{\sqrt{2}}$
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b'^- l^+ \nu$	$\frac{a_{10} V_{cs}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_c'^+ l^- \bar{\nu}$	$\frac{a_8 V_{ub}}{\sqrt{2}}$
$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b'^- l^+ \nu$	$\frac{a_{10} V_{cd}^*}{\sqrt{2}}$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- l^+ \nu$	$a_{10} V_{cs}^*$

$$+ a_9 (T_{bc})^i (H_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\bar{\mathbf{3}}})_{[ij]} \bar{l} \nu_l + a_{10} (T_{bc})^i (H_3)^j (\bar{T}_{\mathbf{b}\mathbf{6}})_{\{ij\}} \bar{l} \nu_l. \quad (5-18)$$

这里同时包括了粲夸克和底夸克衰变的情况。表 5-3 列出了不同衰变道的衰变振幅。

显然, Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 的衰变振幅可以通过 T_{cc} 和 T_{bb} 的衰变得得到。对于粲夸克衰变, 我们可以做替换: $T_{cc} \rightarrow T_{bc}$, $T_c \rightarrow T_b$ 。对于底夸克衰变我们做替换: $T_{bb} \rightarrow T_{bc}$, $T_b \rightarrow T_c$ 。对于多体衰变的情况也是如此。由此我们可以得到衰变宽度之间的关系

$$\Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Lambda_b^0 l^+ \nu) = \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b^- l^+ \nu) = \frac{|V_{cd}|^2}{|V_{cs}|^2} \Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 l^+ \nu), \quad (5-19)$$

$$\Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 l^+ \nu) = \Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b^- l^+ \nu), \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Sigma_b^0 l^+ \nu) &= \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b'^- l^+ \nu) = \frac{1}{2} \Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_b^- l^+ \nu) \\ &= \frac{|V_{cd}|^2}{|V_{cs}|^2} \Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b'^0 l^+ \nu), \end{aligned} \quad (5-21)$$

$$\Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b'^0 l^+ \nu) = \Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b'^- l^+ \nu) = \frac{1}{2} \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- l^+ \nu), \quad (5-22)$$

$$\Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^{++} l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ l^- \bar{\nu}), \quad (5-23)$$

$$\Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}) = \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_c^+ l^- \bar{\nu}), \quad (5-24)$$

$$\Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} l^- \bar{\nu}) = 2\Gamma(\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_c^+ l^- \bar{\nu}) = 2\Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_c'^+ l^- \bar{\nu}). \quad (5-25)$$

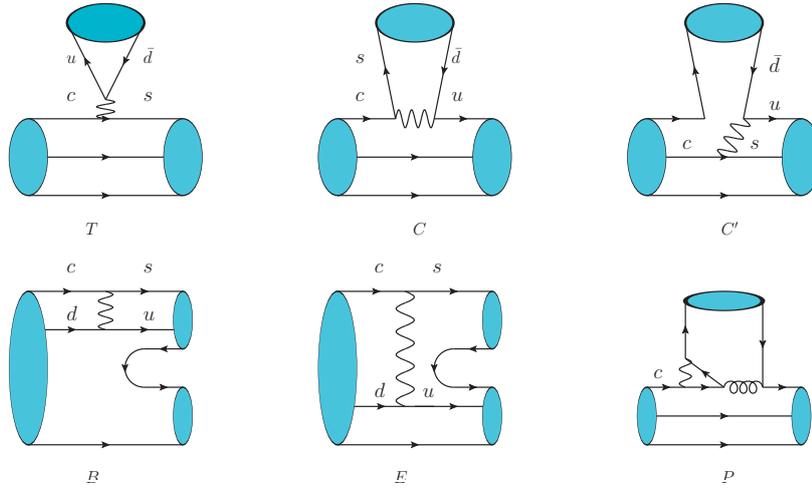


图 5-4 两体双粲重子衰变费曼图，这里只展示一种企鹅图。 C, C', B, E 图是被 $1/N_c$ 压低的。

Figure 5-4 Feynman diagrams for two-body decays of doubly charmed baryons. We only show one type of penguin diagrams. The C, C', B, E diagrams are suppressed by $1/N_c$.

5.1.3 黄金衰变道分析

这一小节中我们给出实验上最有可能重建出双重味重子的衰变道。

- Ξ_{cc} 和 Ω_{cc} 弱衰变：图 5-4 给出了末态为两体的 Cabibbo-allowed 衰变过程的示意图。这里我们只展示了一种企鹅图。另外和树图振幅 T 相比 C, C', B, E 图的振幅是被 $1/N_c$ 压低的。对于 Ξ_{cc} 和 Ω_{cc} 的衰变，表 5-4 给出了所有 Cabibbo allowed 衰变道。而从 D 和 Λ_c 衰变的数据来看，我们推测对于双重味重子 Cabibbo allowed 衰变道的分支比应该在百分之几的量级。
- Ξ_{bb} 和 Ω_{bb} 弱衰变：表 5-5 列出了可以用来重建出 Ξ_{bb} 和 Ω_{bb} 重子的衰变道。它们典型的衰变分支比量级为 10^{-3} 。为了重建出末态的底介子和底重子，需要乘上额外的因子 10^{-3} ，其中包括 J/ψ ， D 或粲重子。因此 Ξ_{bb} 和 Ω_{bb} 重子衰变分支比最大为 10^{-8} 。
- Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 弱衰变：表 5-6 列出了可以用来重建出 bcq 重子的可能的衰变道。对于粲夸克衰变，典型的分支比在几个百分比量级。其末态可以包含一个底介子或者一个底重子，相应的分支比应该在 10^{-3} 量级。因此， Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 衰变的分支比很可能在 10^{-5} 量级左右。如果 bcq 重子中的底夸克先衰变，分支比将会比 10^{-3} 更小。这是因为 Ξ_{bc} 和 Ω_{bc} 的总宽度是由粲夸克衰变主导的。在这种情况下，分支比可能小于 10^{-5} 量级。

表 5-4 Cabibbo 角允许的 ccq 衰变, 其典型的分支比在几个百分比的量级。

 Table 5-4 Cabibbo allowed ccq decays whose typical branching ratios are at a few percents level.

$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Lambda_c^+ \bar{K}^0, \Lambda_c^+ \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^+ \rho^0$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 \pi^+$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ \bar{K}^0, \Xi_c^+ \bar{K}^{*0})$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow (\Sigma_c^{++} \bar{K}^0, \Sigma_c^{++} \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Xi_c^+ \pi^+$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Sigma_c^{++} K^-$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Sigma_c^+ \bar{K}^0, \Sigma_c^+ \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ \rho^0, \Xi_c^0 \pi^+)$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 K^+$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ \bar{K}^0, \Xi_c^+ \bar{K}^{*0})$ $\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Omega_c^0 \pi^+$
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow (\Sigma^+ D^+, \Sigma'^+ D^+)$	$\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Lambda^0 D^+, \Sigma^0 D^+, \Sigma'^0 D^+)$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Sigma^+ D^0, \Sigma'^+ D^0)$ $\Xi_{cc}^+ \rightarrow (\Xi^0 D_s^+, \Xi'^0 D_s^+)$	$\Omega_{cc}^+ \rightarrow (\Xi^0 D^+, \Xi'^0 D^+)$

 表 5-5 衰变分支比在 10^{-3} 量级的双底重子衰变。

 Table 5-5 Doubly bottom baryon decays with branching fractions at the order of 10^{-3} .

$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 J/\psi, \Xi_b^0 J/\psi)$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow (\Xi_b^- J/\psi, \Xi_b^- J/\psi)$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_b^- J/\psi$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Xi_{bc}^+ D_s^-$ $\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Omega_{bc}^0 \bar{D}^0$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 D_s^-$ $\Xi_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D^-$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 D_s^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_{bc}^+ \pi^-, \Xi_{bc}^0 \rho^0)$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 \pi^-$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_{bc}^0 K^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Omega_{bc}^0 K^0, \Omega_{bc}^0 K^{*0})$		$\Omega_{bb}^- \rightarrow \Omega_{bc}^0 \pi^-$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Lambda_b^0 D^0, \Sigma_b^0 D^0)$ $\Xi_{bb}^0 \rightarrow \Sigma_b^- D^+$	$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Sigma_b^- D^0$	$\Omega_{bb}^- \rightarrow (\Xi_b^- D^0, \Xi_b'^- D^0)$
$\Xi_{bb}^0 \rightarrow (\Xi_b^- D_s^+, \Xi_b'^- D_s^+)$		

表 5-6 bcq 重子的衰变模式，其中粲夸克衰变的典型分支比在几个百分比量级，而底夸克衰变的分支比在 10^{-3} 量级。

Table 5-6 Decay modes of the bcq baryons. Typical branching ratios for charm quark decays might be a few percents, while BR for decays induced by b quark may reach the order 10^{-3} .

Charm: Ξ_{bc}^+	Ξ_{bc}^0	Ω_{bc}^0
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 \pi^+$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Lambda_b^0 \bar{K}^0, \Lambda_b^0 \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \rho^0, \Xi_b^- \pi^+)$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \bar{K}^0, \Xi_b^0 \bar{K}^{*0})$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Sigma_b^+ \bar{K}^0, \Sigma_b^+ \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_b^0 \pi^+$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_b^+ K^-$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma_b^0 \bar{K}^0, \Sigma_b^0 \bar{K}^{*0})$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \rho^0, \Xi_b^- \pi^+)$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- K^+$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_b^0 \bar{K}^0, \Xi_b^0 \bar{K}^{*0})$ $\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_b^- \pi^+$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Sigma^+ B^0, \Sigma'^+ B^0)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma^+ B^-, \Sigma'^+ B^-)$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Sigma^0 B^0, \Sigma'^0 B^0, \Lambda^0 B^0)$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi^0 B_s^0, \Xi'^0 B_s^0)$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi^0 B^0, \Xi'^0 B^0)$
Bottom: Ξ_{bc}^+	Ξ_{bc}^0	Ω_{bc}^0
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_c^+ J/\psi, \Xi_c'^+ J/\psi)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_c^0 J/\psi, \Xi_c'^0 J/\psi)$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_c^0 J/\psi$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Xi_{cc}^{++} D_s^-$ $\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Omega_{cc}^+ \bar{D}^0$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ D_s^-$ $\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ D^-$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ D_s^-$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_{cc}^{++} \pi^-, \Xi_{cc}^+ \rho^0)$ $\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Omega_{cc}^+ K^0, \Omega_{cc}^+ K^{*0})$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ \pi^-$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_{cc}^+ K^-$ $\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Omega_{cc}^+ \pi^-$
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Lambda_c^+ D^0, \Sigma_c^+ D^0, \Sigma_c^0 D^+)$ $\Xi_{bc}^+ \rightarrow (\Xi_c^0 D_s^+, \Xi_c'^0 D_s^+)$	$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Sigma_c^0 D^0$	$\Omega_{bc}^0 \rightarrow (\Xi_c^0 D^0, \Xi_c'^0 D^0)$

5.2 用 LCSR 计算双重味重子衰到反三重态重子弱衰变

5.2.1 单重味重子的光锥分布振幅

这一节将给出在重夸克有效理论 (HQET) 的框架下底重子光锥分布振幅的定义及其形式^[128]。根据 HQET 的领头阶展开, 单重味重子中的重夸克作为一个非相对论的粒子, 它是和轻夸克自由度部分脱耦的。其中两个轻夸克组成所谓的双夸克对 (diquark) 系统。这里我们分别把反三重态和六重态单重味重子记为 $H_b^{j=0}$ 和 $H_b^{j=1}$ 。

因为 $H_b^{j=0}$ 的总自旋 1/2 完全来自于其中 **b** 夸克的自旋, 所以描述 $H_b^{j=0}$ 态的旋量就是其中 **b** 夸克的旋量 u_γ , γ 是 Dirac 旋量指标。对于 $H_b^{j=1}$ 态, 其旋量结构更为复杂。由于在重夸克极限下, 轻自由度和重夸克自由度脱耦, $H_b^{j=1}$ 的旋量可以用 Rarita-Schwinger 矢量-旋量表示, 它由重夸克的旋量 $u_\gamma(v)$ 和双夸克对的极化矢量 $\varepsilon^\mu(v)$ 的直积组成。其中 v^μ 是重子的四速度。 $u_\gamma(v)$ 的自旋和 $\varepsilon^\mu(v)$ 的极化分别满足以下求和性质:

$$\sum_{i=1}^2 u^i(v) \bar{u}^i(v) = P_+, \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_\mu^{*i}(v) \varepsilon_\nu^i(v) = -g_{\mu\nu} + v_\mu v_\nu, \quad (5-26)$$

其中 $P_+ = (1 + \not{v})/2$, 归一化为

$$-g^{\mu\nu} \sum \text{Tr} [u(v) \varepsilon_\mu^*(v) \varepsilon_\nu(v) \bar{u}(v)] = 6. \quad (5-27)$$

这对应于极化矢量的 3 个自由度 (横向条件约束了一个) 乘以 2 个重夸克旋量的自由度。极化矢量的归一化为 $\varepsilon^\mu(v) \varepsilon_\mu^*(v) = 1$ 。

事实上, 矢量-旋量 $\varepsilon^\mu(v) u_\gamma(v)$ 并不是自旋 3/2 或者 1/2 的不可约表示。根据 Rarita-Schwinger 旋量-矢量满足的性质

$$(\not{v} R^{3/2\mu}(v))_\gamma = R_\gamma^{3/2\mu}(v), \quad v_\mu R_\gamma^{3/2\mu}(v) = 0, \quad (\gamma_\mu R^{3/2\mu}(v))_\gamma = 0. \quad (5-28)$$

我们定义两个投影算符

$$\begin{aligned} (P_{3/2})^\mu_{\nu\gamma}{}^{\gamma'} &= [\delta_\nu^\mu - \frac{1}{3}(\gamma^\mu + v^\mu)\gamma_\nu]_\gamma^{\gamma'} \\ (P_{1/2})^\mu_{\nu\gamma}{}^{\gamma'} &= [\frac{1}{3}(\gamma^\mu + v^\mu)\gamma_\nu]_\gamma^{\gamma'}, \end{aligned} \quad (5-29)$$

其满足 $P_{3/2(1/2)}^2 = 1$, $P_{3/2} + P_{1/2} = 1$ 。这两个投影算符分别作用到 Rarita-Schwinger 旋量-矢量上就能得到自旋 1/2 和 3/2 的不可约表示旋量

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(v) u_\gamma(v) &= (P_{1/2} + P_{3/2})^\mu_{\nu\gamma}{}^{\gamma'} \varepsilon^\nu(v) u_{\gamma'}(v) \\ &= R_\gamma^{1/2\mu}(v) + R_\gamma^{3/2\mu}(v), \end{aligned} \quad (5-30)$$

其中 $P_{1/2}$ 投影出的旋量为

$$R_\gamma^{1/2\mu}(v) = ([\frac{1}{3}(\gamma^\mu + v^\mu)\not{\epsilon}(v)]u(v))_\gamma, \quad (5-31)$$

但这不是一个自旋为 $1/2$ 的旋量。我们需要进一步做如下处理

$$\begin{aligned} \tilde{R}(v) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_5\gamma_\mu R^{1/2\mu}(v) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\gamma_5\gamma_\mu(\gamma^\mu + v^\mu)\not{\epsilon}(v)u(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_5\not{\epsilon}(v)u(v), \end{aligned} \quad (5-32)$$

这里我们用到了横向条件 $v_\mu\epsilon^\mu = 0$ 。可以证明上式定义的 $\tilde{R}(v)$ 确实是自旋为 $1/2$ 的旋量。对自旋和极化自由度求和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \tilde{R}(v)_{ij} \tilde{R}(v)_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{ij} \gamma_5 \not{\epsilon}_j(v) u_i(v) u_i^\dagger(v) \not{\epsilon}_j^*(v) \gamma_5 \gamma_0 \\ &= -\frac{1}{3} \sum_j \gamma_5 \not{\epsilon}_j(v) \frac{1+\not{v}}{2} \not{\epsilon}_j^*(v) \gamma_5 \\ &= \frac{1+\not{v}}{2}, \end{aligned} \quad (5-33)$$

其中 $\tilde{R}(v)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_5\not{\epsilon}_j(v)u_i(v)$ ，并且用到了 $\sum_j^3 \epsilon_{\nu j}(v)\epsilon_{\nu j}^*(v) = -g_{\mu\nu} + v_\mu v_\nu$ 。

在光锥坐标系下我们可以定义在重夸克极限下单重味重子 LCDAs。对于 $j^P = 0^+$ 态，光锥矢量定义为： $n^\mu = (1, 0, 0, -1)$ 和 $\bar{n}^\mu = (1, 0, 0, 1)$ ， $n^2 = \bar{n}^2 = 0$ ， $n \cdot \bar{n} = 2$ 。一个任意的四矢量可以在光锥坐标系下表示为

$$a^\mu = a_- \frac{n^\mu}{2} + a_+ \frac{\bar{n}^\mu}{2} + a_\perp^\mu. \quad (5-34)$$

可以选择 Λ_b 的四速度为 $v^\mu = \frac{1}{2}(\frac{n^\mu}{v_+} + v_+\bar{n}^\mu)$ ， Λ_b 的 LCDAs 定义为^[128]

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_+} \langle 0 | [q_1^T(t_1) C \gamma_5 \not{v} q_2(t_2)] Q_\gamma(0) | H_b^{j=0}(v) \rangle &= \psi_2(t_1, t_2) f^{(1)} u_\gamma \\ \frac{i}{2} \langle 0 | [q_1^T(t_1) C \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_2(t_2)] Q_\gamma(0) \bar{n}^\mu n^\nu | H_b^{j=0}(v) \rangle &= \psi_{3\sigma}(t_1, t_2) f^{(2)} u_\gamma \\ \langle 0 | [q_1^T(t_1) C \gamma_5 q_2(t_2)] Q_\gamma(0) | H_b^{j=0}(v) \rangle &= \psi_{3s}(t_1, t_2) f^{(2)} u_\gamma \\ v_+ \langle 0 | [q_1^T(t_1) C \gamma_5 \bar{\not{v}} q_2(t_2)] Q_\gamma(0) | H_b^{j=0}(v) \rangle &= \psi_4(t_1, t_2) f^{(1)} u_\gamma. \end{aligned} \quad (5-35)$$

重夸克的坐标取为原点， t_i 是第 i 个轻夸克在光锥上到原点的距离。其坐标用协变形式表示为 $t_i n^\mu$ 。另外旋量 u_γ 的归一化为： $\sum_{i=1}^2 u^i(v) \bar{u}^i(v) = (1 + \not{v})/2$ ， $u(v) =$

$\frac{1}{\sqrt{2m_H}}u^{QCD}(p)$ 。而强子态的归一化为 $|\Lambda_b(v)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m_H}}|\Lambda_b(p_\Lambda)\rangle_{QCD}$ 。因此衰变常数的定义不受态和旋量场的归一化影响

$$\epsilon^{abc}\langle 0|[q_1^{aT}(0)\mathcal{C}\gamma_5 q_2^b(0)]Q_\gamma^c(0)|H_b^{j=0}(v)\rangle = f_{H_b^{j=0}}^{(1)}u_\gamma(v), \quad (5-36)$$

$$\epsilon^{abc}\langle 0|[q_1^{aT}(0)\mathcal{C}\gamma_5\psi q_2^b(0)]Q_\gamma^c(0)|H_b^{j=0}(v)\rangle = f_{H_b^{j=0}}^{(2)}u_\gamma(v). \quad (5-37)$$

根据公式 (5-35) 定义的 LCDAs, 可以得到由不同 twist 的光锥分布振幅表示的矩阵元

$$\begin{aligned} \epsilon_{abc}\langle H_b^{j=0}(v)|\bar{q}_{1k}^a(t_1)\bar{q}_{2i}^b(t_2)\bar{Q}_\gamma^c(0)|0\rangle &= \frac{1}{8}v_+\psi_2^*(t_1, t_2)f^{(1)}\bar{u}_\gamma(C^{-1}\gamma_5\bar{\not{h}})_{ki} \\ &\quad - \frac{1}{8}\psi_{3\sigma}^*(t_1, t_2)f^{(2)}\bar{u}_\gamma(C^{-1}\gamma_5 i\sigma^{\mu\nu})_{ki}\bar{n}_\mu n_\nu \\ &\quad + \frac{1}{4}\psi_{3s}^*(t_1, t_2)f^{(2)}\bar{u}_\gamma(C^{-1}\gamma_5)_{ki} \\ &\quad + \frac{1}{8v_+}\psi_4^*(t_1, t_2)f^{(1)}\bar{u}_\gamma(C^{-1}\gamma_5\not{h})_{kl}. \end{aligned} \quad (5-38)$$

光锥波函数的傅里叶变换形式为

$$\psi(x_1, x_2) = \int_0^\infty d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2} \psi(\omega_1, \omega_2), \quad (5-39)$$

其中 ω_1 和 ω_2 分别是两个轻夸克沿光锥方向运动的动量。我们定义双夸克对的总动量为 $\omega = \omega_1 + \omega_2$, 另外有 $x_1 = t_1 n, x_2 = t_2 n, t_2 = v \cdot x_2$,

$$\begin{aligned} \psi(0, x_2) &= \int_0^\infty d\omega d\omega_2 e^{-i\omega_2 t_2} \psi(\omega_1, \omega_2) \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_0^1 du e^{-i\bar{u}\omega v \cdot x_2} \psi(\omega, u), \end{aligned} \quad (5-40)$$

其中 $\omega_2 = (1-u)\omega = \bar{u}\omega, v = (\bar{n} + n)/2$ 。另外为了方便后面的计算, 我们定义

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\omega, u) &= \int_0^\omega d\tau \tau \psi(\tau, u), \\ \frac{d}{d\omega} \tilde{\psi}(\omega, u) &= \psi(\omega, u). \end{aligned} \quad (5-41)$$

这一章将主要分析双重味重子衰变到自旋为 1/2 的反三重态重子 Λ_Q , 末态将分别考虑底重子和粲重子 $Q = b, c$ 的情况。在目前文献中给出的几乎都是底重子的光锥分布振幅, 比如在文献 [128] 中只给出了 Λ_b 的 LCDAs。在重夸克极限下, Λ_c 的 LCDAs 与 Λ_b 的 LCDAs 具有相似的形式, 事实上这个近似是可理解的。注意到 Λ_Q 的 LCDAs 是重子中轻自由度总动量 ω 以及其中一个轻夸克在其中的动量分数 u , 不依

赖于重夸克的质量，这一点本身就是和文献 [128] 中用 HQET 定义 LCDAs 是自洽的。从唯象上分别估计 Λ_c 和 Λ_b 当中轻自由度的能量 $m_{\Lambda_Q} - m_Q$ ，我们发现两者几乎相等

$$\frac{m_{\Lambda} - m_c}{m_{\Lambda_b} - m_b} = 1.017, \quad (5-42)$$

其中质量参数区取为 $m_{\Lambda} = 2.286\text{GeV}$, $m_{\Lambda_b} = 5.62\text{GeV}$, $m_c = 1.35\text{GeV}$, $m_b = 4.7\text{GeV}$ 。事实上这一特性是可以用 HQET 来证明的。经过这些讨论，我们可以用同一套 LCDAs^[128] 描述 Λ_b 和 Λ_c ，它们的形式为

$$\begin{aligned} \psi_2(\omega, u) &= \frac{15}{2} \mathcal{N}^{-1} \omega^2 \bar{u} u \int_{\omega/2}^{s_0} ds e^{-s/\tau} (s - \omega/2), \\ \psi_4(\omega, u) &= 5 \mathcal{N}^{-1} \int_{\omega/2}^{s_0} ds e^{-s/\tau} (s - \omega/2)^3, \\ \psi_{3s}(\omega, u) &= \frac{15}{4} \mathcal{N}^{-1} \omega \int_{\omega/2}^{s_0} ds e^{-s/\tau} (s - \omega/2)^2, \\ \psi_{3\sigma}(\omega, u) &= \frac{15}{4} \mathcal{N}^{-1} \omega (2u - 1) \int_{\omega/2}^{s_0} ds e^{-s/\tau} (s - \omega/2)^2, \end{aligned} \quad (5-43)$$

其中 N 是归一化系数

$$\mathcal{N} = \int_0^{s_0} ds s^5 e^{-s/\tau}. \quad (5-44)$$

5.2.2 $\Xi_{QQ'q} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ 形状因子定义

为了描述强子跃迁过程 $\Xi_{QQ'q} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ ，我们定义 6 个形状因子

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_{Q'}(p_{\Lambda}, s_{\Lambda}) | (V - A)_{\mu} | \Xi_{QQ'q}(p_{\Xi}, s_{\Xi}) \rangle \\ &= \bar{u}_{\Lambda}(p_{\Lambda}, s_{\Lambda}) \left[\gamma_{\mu} f_1(q^2) + i \sigma_{\mu\nu} \frac{q^{\nu}}{m_{\Xi}} f_2(q^2) + \frac{q_{\mu}}{m_{\Xi}} f_3(q^2) \right] u_{\Xi}(p_{\Xi}, s_{\Xi}) \\ &\quad - \bar{u}_{\Lambda}(p_{\Lambda}, s_{\Lambda}) \left[\gamma_{\mu} g_1(q^2) + i \sigma_{\mu\nu} \frac{q^{\nu}}{m_{\Xi}} g_2(q^2) + \frac{q_{\mu}}{m_{\Xi}} g_3(q^2) \right] \gamma_5 u_{\Xi}(p_{\Xi}, s_{\Xi}), \end{aligned} \quad (5-45)$$

其中初末态重子的旋量、动量、质量和自旋分别表示为 u_{Ξ} , p_{Ξ} , m_{Ξ} , s_{Ξ} 和 u_{Λ} , p_{Λ} , m_{Λ} , s_{Λ} 。弱衰变流有矢量流 $\bar{q}\gamma^{\mu}Q$ 和轴矢流 $\bar{q}\gamma^{\mu}\gamma^5Q$ 组成， q 表示轻夸克 u, d 而 Q 表示重夸克 b, c 。 $f_i(q^2)$ 和 $g_i(q^2)$ 分别是两组描述矢量流和轴矢流转移矩阵元的形状因子，转移动量为 $q^{\mu} = p_{\Xi}^{\mu} - p_{\Lambda}^{\mu}$ 。为了简化计算，我们也可以采用下面这种参数化方法

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_{Q'}(p_{\Lambda}, s_{\Lambda}) | (V - A)_{\mu} | \Xi_{QQ'q}(p_{\Xi}, s_{\Xi}) \rangle \\ &= \bar{u}_{\Lambda}(p_{\Lambda}, s_{\Lambda}) \left[F_1(q^2) \gamma_{\mu} + F_2(q^2) p_{\Lambda} + F_3(q^2) p_{\Xi} \right] u_{\Xi}(p_{\Xi}, s_{\Xi}) \end{aligned}$$

$$-\bar{u}_\Lambda(p_\Lambda, s_\Lambda) \left[G_1(q^2)\gamma_\mu + G_2(q^2)p_\Lambda + G_3(q^2)p_\Xi \right] \gamma_5 u_\Xi(p_\Xi, s_\Xi), \quad (5-46)$$

可以更加直接地在 **LCSR** 的框架中抽取 F_i 和 G_i 。这两种参数化形状因子之间的转换关系为

$$\begin{aligned} f_1(q^2) &= F_1(q^2) + \frac{1}{2}(m_\Xi + m_\Lambda)(F_2(q^2) + F_3(q^2)), \\ f_2(q^2) &= \frac{1}{2}m_\Xi(F_2(q^2) + F_3(q^2)), \\ f_3(q^2) &= \frac{1}{2}m_\Xi(F_3(q^2) - F_2(q^2)), \\ g_1(q^2) &= G_1(q^2) - \frac{1}{2}(m_\Xi - m_\Lambda)(F_2(q^2) + F_3(q^2)), \\ g_2(q^2) &= \frac{1}{2}m_\Xi(G_2(q^2) + G_3(q^2)), \\ g_3(q^2) &= \frac{1}{2}m_\Xi(G_3(q^2) - G_2(q^2)). \end{aligned} \quad (5-47)$$

5.2.3 双重味重子衰变的 **LCSR** 方法

在第四章我们介绍了如何用 **LCSR** 的方法处理 $D \rightarrow f_0$ 的过程，其中使用了末态 **S**-波的光锥分布振幅并将其作为低能的非微扰输入量。对于重子到重子的跃迁过程，我们也可以用相同的方法来处理。这里我们着重考虑双重味重子 $\Xi_{QQ'}$ 弱衰变到单重味重子 $\Lambda_{Q'}$ 的情况，其中将采用末态 $\Lambda_{Q'}$ 的光锥分布振幅作为非微扰输入量。首先定义一个两点关联函数

$$\Pi_\mu(p_\Lambda, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \Lambda_{Q'}(p_\Lambda) | T \{ J_\mu^{V-A}(x) \bar{J}_{\Xi_{QQ'}}(0) \} | 0 \rangle. \quad (5-48)$$

其中 J^{V-A} , $J_{\Xi_{QQ'}}$ 分别是 $V - A$ 流和从真空产生 $\Xi_{QQ'}$ 的流算符

$$J_\mu^{V-A}(x) = \bar{q}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) Q_e, \quad (5-49)$$

当 $Q = Q' = b, c$ 时，有

$$J_{\Xi_{QQ}} = \epsilon_{abc} (Q_a^T C \gamma_\mu Q_b) \gamma_\mu \gamma_5 q'_c, \quad (5-50)$$

当 $Q = b, Q' = c$ 时，有

$$J_{\Xi_{bc}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (b_a^T C \gamma^\mu c_b + c_a^T C \gamma^\mu b_b) \gamma_\mu \gamma_5 q'_c. \quad (5-51)$$

接下来，需要分别在强子层面和 **QCD** 层面计算关联函数 (5-48)。在强子层面，通过在 J^{V-A} 和 $J_{\Xi_{QQ'}}$ 之间插入重子态完备集，并利用 $\Xi_{QQ'}$ 衰变常数 f_Ξ 的定义

$$\langle \Xi_{QQ'}(p_\Xi, s) | \bar{J}_{\Xi_{QQ'}}(0) | 0 \rangle = f_\Xi \bar{u}_\Xi(p_\Xi, s) \quad (5-52)$$

矢量流 $\bar{q}\gamma^\mu Q$ 诱导的关联函数可以表示为

$$\begin{aligned}
& \Pi_{\mu,V}^{hadron}(p_\Lambda, q) \\
&= -\frac{f_\Xi}{(q+p_\Lambda)^2 - m_\Xi^2} \bar{u}_\Lambda(p_\Lambda) [F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)p_{\Lambda\mu} + F_2(q^2)p_{\Xi\mu}] (\not{q} + \not{p}_\Lambda + m_\Xi) + \dots \\
&= -\frac{f_\Xi}{(q+p_\Lambda)^2 - m_\Xi^2} \bar{u}_\Lambda(p_\Lambda) \left[F_1(q^2)(m_\Xi - m_\Lambda)\gamma_\mu \right. \\
&\quad + [(m_\Lambda^2 + m_\Xi m_\Lambda)(F_2(q^2) + F_3(q^2)) + 2m_\Lambda] v_\mu \\
&\quad + (m_\Xi + m_\Lambda)F_3(q^2)q_\mu + F_1(q^2)\gamma_\mu \not{q} + m_\Lambda(F_2(q^2) + F_3(q^2))v_\mu \not{q} + F_3(q^2)q_\mu \not{q} \left. \right] \\
&\quad + \dots, \tag{5-53}
\end{aligned}$$

其中用到了 $\Lambda_{Q'}$ 的四速度 $p_\Lambda = m_{\Lambda_{Q'}} v_\mu$ 。省略号部分表示在阈值 s_{th} 连续谱 ρ^h 的贡献，其积分形式为

$$\int_{s_{th}}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s, q^2)}{s - p_\Xi^2}. \tag{5-54}$$

轴矢量流 $\bar{q}\gamma^\mu\gamma^5 Q$ 诱导的关联函数可以用相似的方法来处理。接下来的计算中将关注在对矢量流形状因子 f_i 的抽取，而对于 g_i 的抽取则是类似的。

然后我们需要在 QCD 层面上计算关联函数 (5-48)。以 Ξ_{QQ} 衰变为例，根据费曼规则计算领头阶的贡献

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu,V}^{QCD}(p_\Lambda, q) &= -\frac{i}{4} \int d^4x e^{iq \cdot x} \{ \psi_2^*(0, x) f^{(1)} \bar{u}_\Lambda [\gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T \gamma_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu] \\
&\quad - \psi_{3\sigma}^*(0, x) f^{(2)} \bar{u}_\Lambda [\gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T \gamma_\mu i\sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu] \bar{n}_\alpha n_\beta \\
&\quad - 2\psi_{3s}^*(0, x) f^{(2)} \bar{u}_\Lambda [\gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
&\quad + \psi_4^*(0, x) f^{(1)} \bar{u}_\Lambda [\gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu] \}. \tag{5-55}
\end{aligned}$$

需要注意的是公式 (5-55) 中的光锥矢量 n 和 \bar{n} 是在特定参考系中选取的，因此不满足洛伦兹协变性。我们将它们表示成洛伦兹协变的形式

$$n_\mu = \frac{1}{v \cdot x} x_\mu, \quad \bar{n}_\mu = 2v_\mu - \frac{1}{v \cdot x} x_\mu. \tag{5-56}$$

利用傅里叶变换后的 LCDAs 以及公式 5-56 中协变的光锥矢量，关联函数可以表示为对双夸克对动量 ω 和动量分数 u 的卷积

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu,V}^{QCD}(p_\Lambda, q) &= -\frac{i}{4} \int d^4x \int_0^{2s_0} d\omega \int_0^1 du e^{i(q + \bar{u}\omega v) \cdot x} \\
&\quad \times \{ \psi_2(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}_\Lambda [\gamma^\nu C S^Q(x)^T C^T \gamma_\mu (2\not{p} - \frac{\not{x}}{v \cdot x}) \gamma_\nu] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\psi_{3\sigma}(\omega, u)f^{(2)}\bar{u}_\Lambda[\gamma^\nu CS^Q(x)^T C^T \gamma_\mu i\sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu] \frac{2v_\alpha x_\beta}{v \cdot x} \\
 & -2\psi_{3s}(\omega, u)f^{(2)}\bar{u}_\Lambda[\gamma^\nu CS^Q(x)^T C^T \gamma_\mu \gamma_\nu] \\
 & +\psi_4(\omega, u)f^{(1)}\bar{u}_\Lambda[\gamma^\nu CS^Q(x)^T C^T \gamma_\mu \frac{\not{x}}{v \cdot x} \gamma_\nu] \}. \quad (5-57)
 \end{aligned}$$

这里 $S^Q(x)$ 表示 QCD 中自由重夸克传播子。通过对时空坐标 x 的积分，我们可以得到 QCD 层面上的关联函数

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{\mu,V}^{QCD}((p_\Lambda + q)^2, q^2) \\
 = & \int_0^{2s_0} d\omega \int_0^1 du \psi_2(\omega, u) f^{(1)} \frac{\bar{u}_\Lambda[-\bar{u}\omega\gamma_\mu + 2(\bar{u}\omega + m_Q)v_\mu + \gamma_\mu \not{q}]}{\frac{\bar{u}\omega}{m_\Lambda} s + H(u, \omega, q^2) - m_Q^2} \\
 & + \int_0^{2s_0} d\omega \int_0^1 du \bar{u} f^{(1)} [\tilde{\psi}_2(\omega, u) - \tilde{\psi}_4(\omega, u)] \frac{1}{(\frac{\bar{u}\omega}{m_\Lambda} s + H(u, \omega, q^2) - m_Q^2)^2} \\
 & \quad \times \bar{u}_\Lambda [m_Q^2 \gamma_\mu - 2(m_Q + \bar{u}\omega)q_\mu - 2\bar{u}\omega(m_Q + \bar{u}\omega)v_\mu - 2q_\mu \not{q} - 2\bar{u}\omega v_\mu \not{q}] \\
 & + 2 \int_0^{2s_0} d\omega \int_0^1 du \bar{u} \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \frac{1}{(\frac{\bar{u}\omega}{m_\Lambda} s + H(u, \omega, q^2) - m_Q^2)^2} \bar{u}_\Lambda [-m_Q(q \cdot v)\gamma_\mu \\
 & \quad + 2(m_Q + \bar{u}\omega + q \cdot v)q_\mu + (4\bar{u}\omega(q \cdot v) + q^2 - 3m_Q^2 + 3\bar{u}^2\omega^2)v_\mu - m_Q \gamma_\mu \not{q}] \\
 & + \int_0^{2s_0} d\omega \int_0^1 du \psi_{3s}(\omega, u) f^{(2)} \frac{\bar{u}_\Lambda [q_\mu + \bar{u}\omega v_\mu + \frac{1}{2}m_Q \gamma_\mu]}{\frac{\bar{u}\omega}{m_\Lambda} s + H(u, \omega, q^2) - m_Q^2}, \quad (5-58)
 \end{aligned}$$

其中 m_Q 表示重夸克的质量，一些组合变量定义为

$$\begin{aligned}
 s & = (p_\Lambda + q)^2, \quad q \cdot v = \frac{1}{2m_\Lambda}(s - q^2 - m_\Lambda^2), \\
 H(u, \omega, q^2) & = \bar{u}\omega(\bar{u}\omega - m_\Lambda) + (1 - \frac{\bar{u}\omega}{m_\Lambda})q^2. \quad (5-59)
 \end{aligned}$$

这里重新定义了 LCDAs

$$\tilde{\psi}_i(\omega, u) = \int_0^\omega d\tau \tau \psi_i(\tau, u) \quad (i = 2, 3\sigma, 3s, 4). \quad (5-60)$$

图 5-5 给出了 QCD 层面关联函数的费曼图。注意到关联函数需要表示成关于洛伦兹不变量 $(p_\Lambda + q)^2$ 和 q^2 的函数。通过提取关联函数 (5-58) 在 $(p_\Lambda + q)^2$ 的复平面上穿过支割线的不连续部分，可以将关联函数表示成色散积分的形式

$$\Pi_{\mu,V}^{QCD}(p_\Lambda, q) = \frac{1}{\pi} \int_{(m_Q+m_{Q'}+m_q)^2}^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi_{\mu,V}^{QCD}(s, q^2)}{s - (p_{\Lambda_c} + q)^2}. \quad (5-61)$$

根据全局的夸克强子对偶公式 (5-54) 中的积分可以和相应的 QCD 层面的 (5-61) 近似等同起来，这样我们就能得到

$$-\frac{f_H}{(q + p_\Lambda)^2 - m_\Xi^2} \bar{u}_\Lambda(p_\Lambda) \left[F_1(q^2)(m_\Xi - m_\Lambda)\gamma_\mu \right.$$

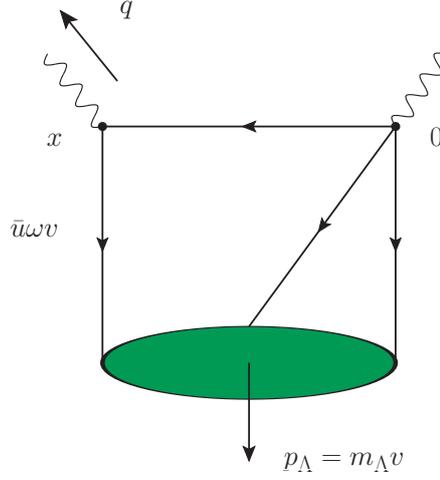


图 5-5 QCD 层面的关联函数的费曼图表示。绿色部分表示 $\Lambda_{Q'}$ 重子，其四速度为 v 。左侧黑点表示 $V - A$ ，右侧黑点表示双重味重子流。左侧夸克线表示 $\Lambda_{Q'}$ 中的一个轻夸克，其动量为 $\bar{u}\omega v$ ， \bar{u} 是其相对于双轻夸克对的动量分数。

Figure 5-5 Feynman diagram of the QCD level correlation function. The green ellipse denotes the final $\Lambda_{Q'}$ which has velocity v . The left black dot denotes the $V - A$ current while the right dot denotes the doubly-heavy baryon current. The left straight line denote one of the light quark inside the $\Lambda_{Q'}$. It has momentum $\bar{u}\omega v$, where \bar{u} is its momentum fraction related to the diquark.

$$\begin{aligned}
& + [(m_\Lambda^2 + m_\Xi m_\Lambda)(F_2(q^2) + F_3(q^2)) + 2m_\Lambda F_1(q^2)]v_\mu \\
& + (m_\Xi + m_\Lambda)F_3(q^2)q_\mu + F_1(q^2)\gamma_\mu \not{q} + m_\Lambda(F_2(q^2) + F_3(q^2))v_\mu \not{q} + F_3(q^2)q_\mu \not{q} \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{(m_Q+m_{Q'}+m_q)^2}^{sth} ds \frac{\text{Im}\Pi_{\mu,V}^{\text{QCD}}(s, q^2)}{s - (p_{\Lambda_c} + q)^2}. \tag{5-62}
\end{aligned}$$

对公式 (5-62) 两边同时做 Borel 变换，我们可以抽取出形状因子 F_i ，具体表达式为

$$\begin{aligned}
F_1(q^2) &= \frac{1}{f_\Xi(m_\Xi - m_\Lambda)} \exp\left(\frac{m_\Xi^2}{M^2}\right) \\
&\times \left\{ - \int_0^1 du \int_0^{2s_0} d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp\left(-\frac{s_r}{M^2}\right) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \right. \\
&\times [\psi_{3s}(\omega, u) f^{(2)} \frac{1}{2} m_Q - \psi_2(\omega, u) f^{(1)} \bar{u}\omega] \\
&+ \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp\left(-\frac{s_0}{M^2}\right) \\
&\times \left[(\tilde{\psi}_2(\omega, u) - \tilde{\psi}_4(\omega, u)) f^{(1)} m_Q^2 - \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \frac{m_Q}{m_\Lambda} (s_0 - q^2 - m_\Lambda^2) \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
&- \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp\left(-\frac{(m_Q + m_{Q'} + m_q)^2}{M^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[(\tilde{\psi}_2(\omega, u) - \tilde{\psi}_4(\omega, u)) f^{(1)} m_Q^2 \right. \\
 & \left. - \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \frac{m_Q}{m_\Lambda} ((m_Q + m_{Q'} + m_q)^2 - q^2 - m_\Lambda^2) \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
 & - \int_0^1 du \int_0^\infty d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp\left(-\frac{s_r}{M^2}\right) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \\
 & \times \frac{d}{ds} \left\{ \exp\left(-\frac{s}{M^2}\right) \left[(\tilde{\psi}_2(\omega, u) - \tilde{\psi}_4(\omega, u)) f^{(1)} m_Q^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \frac{m_Q}{m_\Lambda} (s - q^2 - m_\Lambda^2) \right] \right\} \Big|_{s=s_r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(q^2) &= \frac{1}{f_\Xi(m_\Xi + m_\Lambda)} \exp\left(\frac{m_\Xi^2}{M^2}\right) \\
 & \times \left\{ - \int_0^1 du \int_0^{2s_0} d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp\left(-\frac{s_r}{M^2}\right) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \psi_{3s}(\omega, u) \right. \\
 & + \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp\left(-\frac{s_{th}}{M^2}\right) \\
 & \times \left[4(m_Q + \bar{u}\omega + \frac{s_{th} - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda}) \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \right. \\
 & \left. + 2(m_Q + \bar{u}\omega) (\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u)) f^{(1)} \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
 & - \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp\left(-\frac{(m_Q + m_{Q'} + m_q)^2}{M^2}\right) \\
 & \times \left[4\left(m + \bar{u}\omega + \frac{(m_Q + m_{Q'} + m_q)^2 - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda}\right) \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \right. \\
 & \left. + 2(m_Q + \bar{u}\omega) (\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u)) f^{(1)} \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
 & - \int_0^1 du \int_0^{2s_0} d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp\left(-\frac{s_r}{M^2}\right) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \\
 & \times \frac{d}{ds} \left\{ \exp\left(-\frac{s}{M^2}\right) \left[4\left(m_Q + \bar{u}\omega + \frac{s - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda}\right) \tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u) f^{(2)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2(m_Q + \bar{u}\omega) (\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u)) f^{(1)} \right] \right\} \Big|_{s=s_r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F'_2(q^2) &= \frac{1}{f_\Xi} \exp\left(\frac{m_\Xi^2}{M^2}\right) \\
 & \times \left\{ - \int_0^1 du \int_0^{2s_0} d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp\left(-\frac{s_r}{M^2}\right) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \right. \\
 & \left. \times [2(\bar{u}\omega + m_Q) \psi_2(\omega, u) f^{(1)} + \bar{u}\omega \psi_{3s}(\omega, u) f^{(2)}] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp(-\frac{s_{th}}{M^2}) \\
& \times \left[2\bar{u}\omega(m_Q + \bar{u}\omega)(\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u))f^{(1)} \right. \\
& \left. + 2\tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u)f^{(2)}(4\bar{u}\omega \frac{s_{th} - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda} + q^2 - 3m_Q^2 + 3\bar{u}^2\omega^2) \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
& - \int_0^1 du \theta(\Delta) \theta(2s_0 - \frac{\xi^+}{\bar{u}}) \theta(\xi^+) \frac{1}{\bar{u}\sqrt{\Delta}} \frac{m_\Lambda}{\omega} \exp\left(-\frac{(m_Q + m_{Q'} + m_q)^2}{M^2}\right) \\
& \times \left[2\bar{u}\omega(m_Q + \bar{u}\omega)(\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u))f^{(1)} \right. \\
& \left. + 2\tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u)f^{(2)}(4\bar{u}\omega \frac{(m_Q + m_{Q'} + m_q)^2 - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda} + q^2 - 3m_Q^2 + 3\bar{u}^2\omega^2) \right] \Big|_{\omega=\frac{\xi^+}{\bar{u}}} \\
& - \int_0^1 du \int_0^{2s_0} d\omega \frac{m_\Lambda}{\bar{u}} \exp(-\frac{s_r}{M^2}) \theta(s_{th} - s_r) \theta(s_r - (2m_Q + m_q)^2) \\
& \times \frac{d}{ds} \left\{ \exp(-\frac{s}{M^2}) \left[2\bar{u}\omega(m_Q + \bar{u}\omega)(\tilde{\psi}_4(\omega, u) - \tilde{\psi}_2(\omega, u))f^{(1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\tilde{\psi}_{3\sigma}(\omega, u)f^{(2)}(4\bar{u}\omega \frac{s - q^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Lambda} + q^2 - 3m_Q^2 + 3\bar{u}^2\omega^2) \right] \right\} \Big|_{s=s_r},
\end{aligned}$$

$$F_2(q^2) = \frac{F_2'(q^2) - 2m_\Lambda F_1(q^2)}{m_\Lambda^2 + m_\Xi m_\Lambda} - F_3(q^2), \quad (5-63)$$

其中一些组合物理量为

$$\begin{aligned}
s_r &= \frac{m_\Lambda}{\bar{u}\omega} (m_Q^2 - H(u, \omega, q^2)), \\
\Delta &= \frac{1}{m_\Lambda^2} (s_{th} - q^2 - m_\Lambda^2) - 4(q^2 - m_Q^2), \\
\xi^+ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{m_\Lambda} (s_{th} - q^2 - m_\Lambda^2) + \sqrt{\Delta} \right].
\end{aligned} \quad (5-64)$$

轴矢量形状因子 G_i 和矢量形状因子 F_i 之间存在如下关系

$$\begin{aligned}
G_1(q^2) &= F_1(q^2) \Big|_{\psi_2 \rightarrow -\psi_2, \psi_4 \rightarrow -\psi_4}, \\
G_2(q^2) &= F_2(q^2) \Big|_{\psi_2 \rightarrow -\psi_2, \psi_4 \rightarrow -\psi_4}, \\
G_3(q^2) &= F_3(q^2) \Big|_{\psi_2 \rightarrow -\psi_2, \psi_4 \rightarrow -\psi_4}.
\end{aligned} \quad (5-65)$$

从公式 (5-62) 可以看出, 对于每个形状因子可以从两种结构抽取。例如 $f_1(q^2)$ 可以从关联函数中 γ_μ 的系数抽取得到也可以从 $\gamma_\mu \not{q}$ 的系数抽取得到。但是只有从 γ_μ 的系数抽取得到的 $f_1(q^2)$ 对所有四种扭度的 LCDAs 都有依赖。我们希望尽可能所有的 LCDAs 都能对形状因子有贡献, 因此选择了 γ_μ, v_μ, q_μ 三种结构分别抽取 f_1, f_2, f_3 。

另外注意到公式 (5-62) 中 v_μ 的系数包含了所有的 f_i , 因此需要先抽取出 f_1 和 f_3 , 然后从 v_μ 项的系数中抽取 f_2 。

5.3 基于 SVZ 求和规则的计算

这节我们将简单地介绍如何用 SVZ 求和规则计算双重味到单重味重子的跃迁形状因子, 详细计算可以参考文章 [129], 由于篇幅原因我们只介绍其基本框架。类似于光锥 QCD 求和规则, 我们需要分别在强子层面和 QCD 层面计算关联函数

$$\Pi_\mu^{V,A}(p_1^2, p_2^2, q^2) = i^2 \int d^4x d^4y e^{-ip_1 \cdot x + ip_2 \cdot y} \langle 0 | T \{ J_{\mathcal{B}_{q'_1 Q_2 q_3}}(y) J^{V/A}(0) \bar{J}_{\mathcal{B}_{Q_1 Q_2 q_3}}(x) \} | 0 \rangle, \quad (5-66)$$

其中味道转移过程为 $Q_1 \rightarrow q'_1$, 其包括 $c \rightarrow d/s$ 或者 $b \rightarrow u$, 旁观者夸克为 $Q_2 = c/b$, $q_3 = u/d/s$, 弱流算符为 $J_\mu^V(J_\mu^A) = \bar{q}'_1 \gamma_\mu (\gamma_\mu \gamma_5) Q_1$, $J_{\mathcal{B}_{q'_1 Q_2 q_3}}$ 和 $J_{\mathcal{B}_{Q_1 Q_2 q_3}}$ 分别是产生双重味重子和湮灭单重味重子的强子流算符。

将强子层面和 QCD 层面的关联函数计算结果相匹配, 再利用 Borel 变换以及夸克强子对偶, 我们能够得到如下等式, 从而抽取出形状因子

$$\begin{aligned} & \lambda_{\mathcal{B}_{q'_1 Q_2 q_3}} \lambda_{\mathcal{B}_{Q_1 Q_2 q_3}} (\not{p}_2 + M_2) (\gamma_\mu f_1 + i \sigma_{\mu\nu} \frac{q^\nu}{M_1} f_2 + \frac{q_\mu}{M_1} f_3) (\not{p}_1 + M_1) e^{-M_1^2/T_1^2} e^{-M_2^2/T_2^2} \\ &= \int_0^{s_1^0} ds_1 \int_0^{s_2^0} ds_2 \rho_\mu^{V,QCD}(s_1, s_2, q^2) e^{-s_1/T_1^2} e^{-s_2/T_2^2}, \end{aligned} \quad (5-67)$$

其中形状因子的定义和公式 (5-45) 相同, T_i 是 Borel 参数, 重子衰变常数定义为

$$\langle 0 | J_{\mathcal{B}} | \mathcal{B}(p, s) \rangle = \lambda_{\mathcal{B}} u(p, s). \quad (5-68)$$

$\rho_\mu^{V,QCD}$ 是 QCD 层面关联函数的不连续部分, 由如下双重色散积分定义

$$\Pi_\mu^{V,\text{pert}}(p_1^2, p_2^2, q^2) = \int ds_1 ds_2 \frac{\rho_\mu^{V,\text{pert}}(s_1, s_2, q^2)}{(s_1 - p_1^2)(s_2 - p_2^2)}. \quad (5-69)$$

在 SVZ 求和规则中, 非微扰效应的贡献来自于真空凝聚。关联函数 (5-66) 在夸克胶子层面与真空的相互效应可以通过 OPE 逐阶展开为微扰贡献, 夸克凝聚贡献和夸克胶子凝聚贡献, 如图 5-6 所示。

5.4 数值结果与唯象应用

5.4.1 形状因子数值结果

我们详细给出基于 LCSR 方法的数值计算结果。重夸克质量取为 $m_c = (1.35 \pm 0.10)$ GeV 和 $m_b = (4.7 \pm 0.1)$ GeV, 轻夸克质量近似为零。表 5-7 给出了双重为重

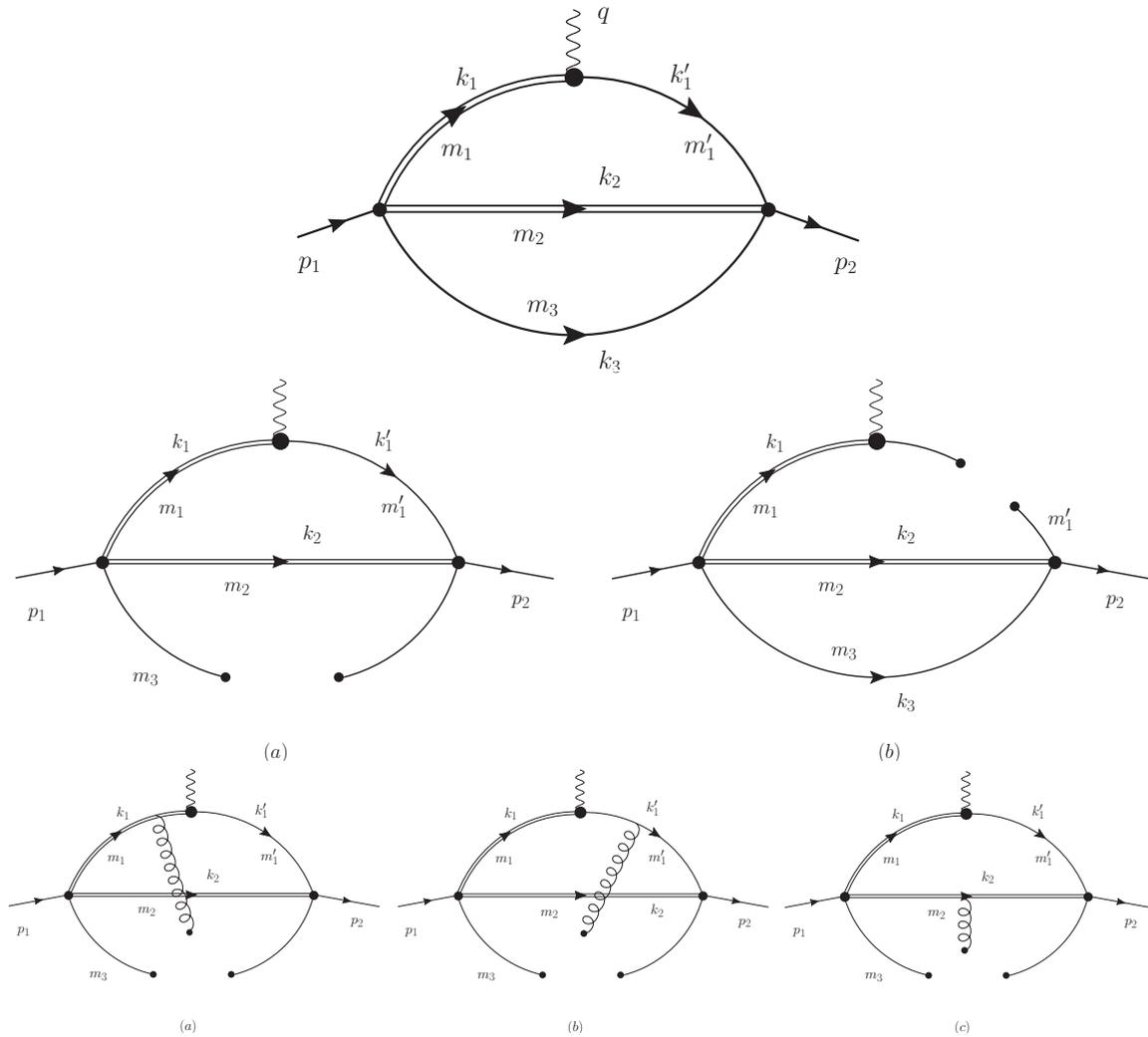


图 5-6 第一行：跃迁形状因子的微扰图贡献，双线表示重夸克，普通实线表示轻夸克。第二行：轻夸克凝聚图，重夸克没有真空凝聚，因此只有两条轻夸克传播子和真空相互作用。第三行：夸克胶子混合凝聚图。

Figure 5-6 The first line: The perturbative contribution to transition form factors. The doubly-solid line denotes a heavy quark, and the ordinary solid line corresponds to a light quark. The second line: Light-quark condensate diagrams. Heavy quark will not condensate and thus only the two light-quark propagators give condensate contributions. The third line: Mixed quark-gluon condensate diagrams.

子的质量, 寿命以及衰变常数 $f_{\Xi}^{[130-133]}$ 。LCDAs 定义式 (5-35) 中 Λ_Q 的衰变常数取为 $f^{(1)} = f^{(2)} = 0.03 \pm 0.005$, 质量为 $m_{\Lambda_c} = 2.286 \text{ GeV}$ 和 $m_{\Lambda_b} = 5.620 \text{ GeV}$ 。式 (5-43) 中 LCDAs 参数选为 $s_0 = 1.2 \text{ GeV}$ 和 $\tau = (0.6 \pm 0.1) \text{ GeV}$ 。

表 5-7 双重味重子的质量, 寿命和衰变常数。

Table 5-7 Masses, lifetimes and decay constants of doubly heavy baryons.

Baryons	Mass (GeV)	Lifetime (fs)	$f_{\Xi} \text{ (GeV}^3\text{)}$
Ξ_{cc}^{++}	3.621 ^[134]	256	0.109 ± 0.020
Ξ_{bc}^+	6.943 ^[135]	244	0.150 ± 0.035
Ξ_{bc}^0	6.943 ^[135]	93	0.150 ± 0.035
Ξ_{bb}^-	10.143 ^[135]	370	0.199 ± 0.052

我们需要适当地选取 Borel 参数使得数值结果尽可能稳定, 对于 $\Xi_{QQ'}$ 的阈值 s_{th} 和 Borel 参数 M^2 的选取我们参考了 QCDSR 中三点关联函数的结果^[129]。另一方面, 重子衰变过程中光锥 OPE 只能在 q^2 为正但是接近零点的区域成立^[136], 因此我们需要参数化形状因子并将其延拓到更高的能量区域。表 5-8 中最后一列给出了对不同衰变道所采用的 q^2 拟合区间。表 5-9 给出了对形状因子拟合的结果, 其中不带星号的是用标准的双奇点公式拟合的

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - \frac{q^2}{m_{\text{fit}}^2} + \delta \left(\frac{q^2}{m_{\text{fit}}^2} \right)^2}, \quad (5-70)$$

带星号的是用修正过的参数化公式拟合得到的

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 + \frac{q^2}{m_{\text{fit}}^2} + \delta \left(\frac{q^2}{m_{\text{fit}}^2} \right)^2}. \quad (5-71)$$

对于 q^2 依赖很小的形状因子, 我们不采用上述公式进行拟合。其中 $f_2^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$ 当做一个常数处理, 并且取它在 $q^2 = 0$ 处的值。另外因为我们采用了 LCSR 的方法, 因此我们期望估计由我们采用的方法导致的误差大小。对于误差我们考虑了来自于阈值 s_{th} , Borel 参数 M^2 以及 LCDAs 参数 τ 的误差。图 5-7 给出了不同形状因子对 q^2 的依赖曲线, 其中 s_{th}, M^2 取为它们在表 5-8 中的中心值, $\tau = 0.6 \text{ GeV}$ 。

在表 5-10 和表 5-11 中, 我们分别将 Ξ_{cc} 衰变和 Ξ_{bb}, Ξ_{bc} 衰变形状因子的结果和其他文献中的结果进行了比较。通过比较, 发现大部分结果和以往结果在同一个量

表 5-8 $\Xi_{QQ'}$ 的阈值 s_{th} , Borel 参数 M^2 和拟合形状因子的 q^2 区间。

 Table 5-8 Threshold s_{th} of $\Xi_{QQ'}$, Borel parameters M^2 , and q^2 range for fitting form factors.

Channel	s_{th} (GeV ²)	M^2 (GeV ²)	Fit Range (GeV ²)
$\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c$	16 ± 1	6 ± 1	$0 < q^2 < 0.8$
$\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b$	112 ± 2	12 ± 1	$0 < q^2 < 3$
$\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c$	54 ± 1.5	9 ± 1	$0 < q^2 < 3$
$\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b$	54 ± 1.5	9 ± 1	$0 < q^2 < 0.8$

 表 5-9 双重味重子衰变形状因子: $F(0)$, m_{fit} 和 δ 对应于公式 (5-70) 或 (5-71) 中的三个拟合参数。没有打星号的结果由标准的公式 (5-70) 拟合得到, 而打星号的结果通过公式 (5-71) 拟合得到。

 Table 5-9 The decay form factors of doubly-heavy baryons. $F(0)$, m_{fit} and δ correspond to the three fitting parameters in Eq. (5-70) or (5-71). The results without asterisks are obtained by fitting the form factors with Eq. (5-70), while the results with asterisks are obtained by Eq. (5-71).

F	$F(0)$	m_{fit}	δ	F	$F(0)$	m_{fit}	δ
$f_1^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.81 ± 0.01	1.38 ± 0.05	0.34 ± 0.01	$g_1^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	-1.09 ± 0.02	2.02 ± 0.08	0.66 ± 0.05
$f_2^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.32 ± 0.01	1.92 ± 0.08	0.40 ± 0.04	$g_2^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	0.86 ± 0.02	2.17 ± 0.1	0.95 ± 0.11
$f_3^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	0.9 ± 0.07	1.62 ± 0.1	1.38 ± 0.7	$g_3^{\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.76 ± 0.01	1.95 ± 0.02	-0.4 ± 0.08
$f_1^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	$-0.01 \pm 0.003^*$	$1.33 \pm 0.24^*$	$0.71 \pm 0.16^*$	$g_1^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	$-0.02 \pm 0.004^*$	$1.1 \pm 0.13^*$	$0.53 \pm 0.08^*$
$f_2^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	0.03 ± 0.0	--	--	$g_2^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	-0.03 ± 0.002	2.03 ± 0.04	0.35 ± 0.006
$f_3^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	$0.1 \pm 0.007^*$	$3.34 \pm 0.13^*$	$5.28 \pm 0.08^*$	$g_3^{\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b}$	$0.14 \pm 0.003^*$	$7.24 \pm 0.40^*$	$-2.35 \pm 1.37^*$
$f_1^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.14 ± 0.005	2.93 ± 0.06	0.39 ± 0.001	$g_1^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.16 ± 0.001	3.45 ± 0.05	0.43 ± 0.0
$f_2^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.09 ± 0.002	3.19 ± 0.04	0.34 ± 0.001	$g_2^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	0.17 ± 0.0	3.72 ± 0.04	0.39 ± 0.001
$f_3^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	0.1 ± 0.005	2.6 ± 0.08	0.44 ± 0.0	$g_3^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c}$	-0.17 ± 0.001	4.43 ± 0.03	0.22 ± 0.01
$f_1^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	0.39 ± 0.01	1.23 ± 0.03	0.44 ± 0.02	$g_1^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	1.06 ± 0.03	1.77 ± 0.06	0.65 ± 0.03
$f_2^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	0.06 ± 0.01	0.73 ± 0.03	1.29 ± 0.06	$g_2^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	-0.69 ± 0.02	1.89 ± 0.06	0.81 ± 0.06
$f_3^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	-0.79 ± 0.06	1.60 ± 0.1	2.62 ± 1.15	$g_3^{\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b}$	0.56 ± 0.01	1.79 ± 0.01	-0.48 ± 0.04

级, 尤其是 $f_1(0)$ 符合得很好。但是, 我们得到的 $g_1(0)$ 比文献中的普遍大了一个量级。从另一方面来看, 我们得到的 $f_1(0)$ 和 $g_1(0)$ 是在一个量级的。根据重夸克有效理论 (HQET) 对 $\Lambda_Q \rightarrow \Lambda_Q$ 过程的 $f_1(0)$ 和 $g_1(0)$ 都约化成同一个 Isgur-Wise 函数。尽管 HQET 无法处理双重味重子的衰变, 我们的计算结果中仍然显示出了重夸克对称性的效应。

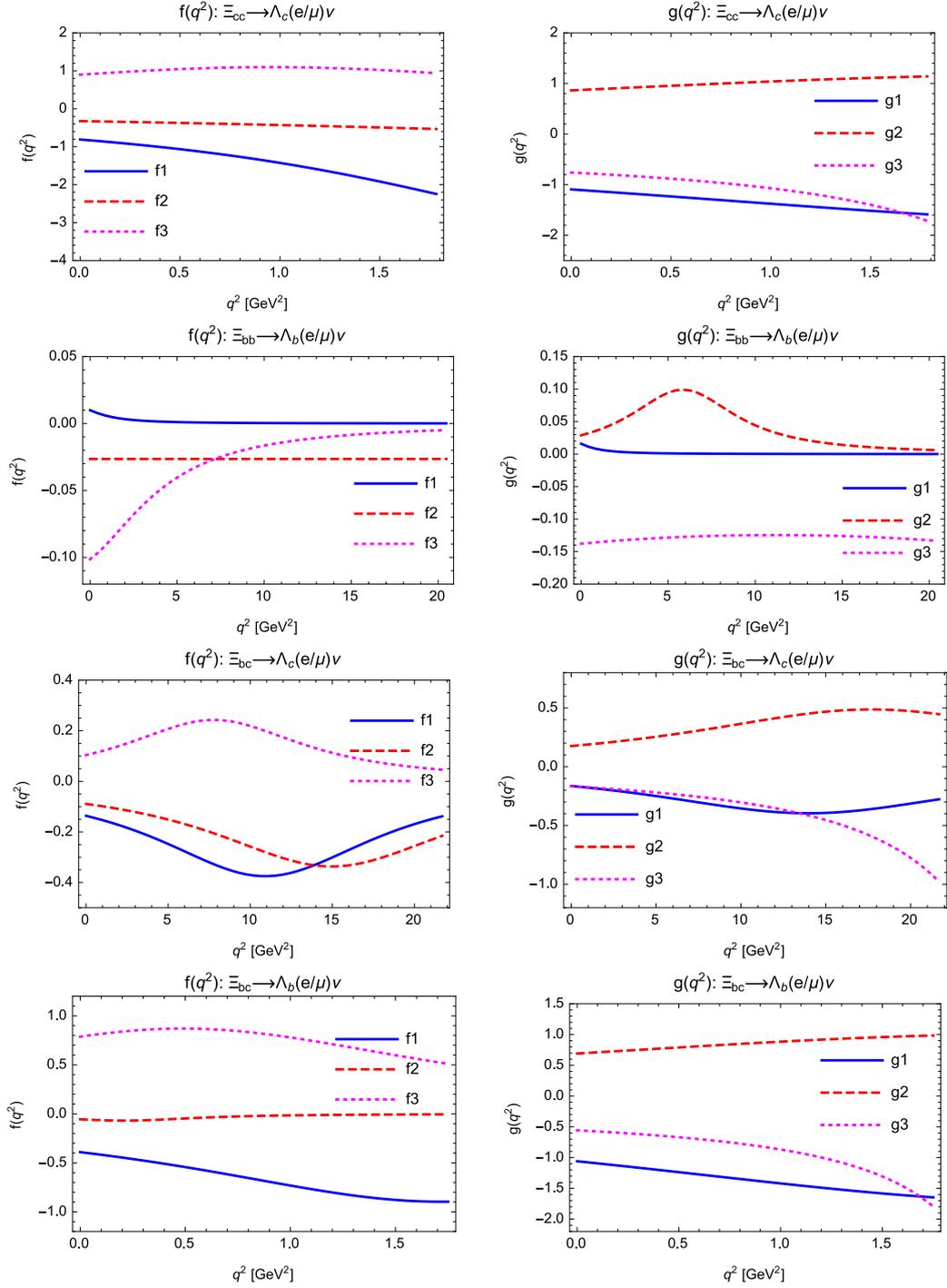


图 5-7 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ 形状因子对 q^2 的依赖关系。第一行是 $\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c$ 形状因子，第二行是 $\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b$ ，第三行是 $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c$ ，第四行是 $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b$ 。

Figure 5-7 q^2 dependence of the $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ form factors. The first two graphs correspond to $\Xi_{cc} \rightarrow \Lambda_c$, the second two graphs correspond to $\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b$, the third two graphs correspond to $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c$ and the fourth two graphs correspond to $\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b$. Here the parameters s_{th} , M^2 are fixed at their center values as shown in Table 5-8, while $\tau = 0.6$ GeV.

表 5-10 Ξ_{cc} 衰变形状因子的 LCSR 结果与 QCD 求和规则 (QCDSR)^[129], 光前夸克模型 (LFQM)^[97], 相对论夸克模型 (NRQM) 和 MIT 袋模型 (MBM)^[137] 的结果比较。

Table 5-10 Comparison of our results of Ξ_{cc} decay form factors with the results from QCD sum rules (QCDSR)^[129], light-front quark model (LFQM)^[97], the nonrelativistic quark model (NRQM) and the MIT bag model (MBM)^[137].

Transitions	$F(0)$	This work	QCDSR ^[129]	LFQM ^[97]	NRQM ^[137]	MBM ^[137]
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+$	$f_1(0)$	-0.81 ± 0.01	-0.59 ± 0.05	-0.79	-0.36	-0.45
	$f_2(0)$	-0.32 ± 0.01	0.039 ± 0.024	0.008	-0.14	-0.01
	$f_3(0)$	0.9 ± 0.07	0.35 ± 0.11	-	-0.08	0.28
	$g_1(0)$	-1.09 ± 0.02	-0.13 ± 0.08	-0.22	-0.20	-0.15
	$g_2(0)$	0.86 ± 0.02	0.037 ± 0.027	0.05	-0.01	-0.01
	$g_3(0)$	-0.76 ± 0.01	0.31 ± 0.09	-	0.03	0.70

5.4.2 半轻衰变

我们考虑 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ 的半轻衰变过程, 其有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(V_{cd}^* [\bar{d}\gamma_\mu(1-\gamma_5)c] [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)l] + V_{ub} [\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)b] [\bar{l}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu] \right), \quad (5-72)$$

G_F 是费米常数, $V_{cs,cd,ub}$ 是 CKM 矩阵元, 我们采用以下数值^[53, 138]:

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2},$$

$$|V_{ud}| = 0.974, \quad |V_{us}| = 0.225, \quad |V_{cd}| = 0.225, \quad |V_{ub}| = 0.00357. \quad (5-73)$$

我们采用螺旋度振幅的方法计算振幅, 矢量流和轴矢流的螺旋度振幅为

$$H_{\frac{1}{2},0}^V = -i \frac{\sqrt{Q_-}}{\sqrt{q^2}} \left((M_1 + M_2)f_1 - \frac{q^2}{M_1}f_2 \right), \quad H_{\frac{1}{2},0}^A = -i \frac{\sqrt{Q_+}}{\sqrt{q^2}} \left((M_1 - M_2)g_1 + \frac{q^2}{M}g_2 \right),$$

$$H_{\frac{1}{2},t}^V = -i \frac{\sqrt{Q_+}}{\sqrt{q^2}} \left((M_1 - M_2)f_1 + \frac{q^2}{M_1}f_3 \right), \quad H_{\frac{1}{2},t}^A = -i \frac{\sqrt{Q_-}}{\sqrt{q^2}} \left((M_1 + M_2)g_1 - \frac{q^2}{M_1}g_3 \right),$$

$$H_{\frac{1}{2},1}^V = i\sqrt{2Q_-} \left(-f_1 + \frac{M_1 + M_2}{M_1}f_2 \right), \quad H_{\frac{1}{2},1}^A = i\sqrt{2Q_+} \left(-g_1 - \frac{M_1 - M_2}{M_1}g_2 \right). \quad (5-74)$$

其中 $Q_\pm = (M_1 \pm M_2)^2 - q^2$, M_1, M_2 分别是初末态重子的质量。正反螺旋度振幅之间存在以下关系

$$H_{-\lambda_2, -\lambda_W}^V = H_{\lambda_2, \lambda_W}^V \quad \text{和} \quad H_{-\lambda_2, -\lambda_W}^A = -H_{\lambda_2, \lambda_W}^A, \quad (5-75)$$

表 5-11 Ξ_{bb} , Ξ_{bc} 衰变形状因子的 LCSR 结果和文献 QCD 求和规则 (QCDSR)^[129], 光前夸克模型 (LFQM)^[97] 的结果比较。

Table 5-11 Comparison of our results on Ξ_{bb} and Ξ_{bc} decay form factors with the results from QCD sum rules (QCDSR)^[129] and light-front quark model (LFQM)^[97].

Transitions	$F(0)$	This work	QCDSR ^[129]	LFQM ^[97]
$\Xi_{bb} \rightarrow \Lambda_b$	$f_1(0)$	-0.01 ± 0.003	-0.086 ± 0.013	-0.102
	$f_2(0)$	0.03 ± 0.0	0.0022 ± 0.0020	0.0006
	$f_3(0)$	0.1 ± 0.007	0.0071 ± 0.0072	--
	$g_1(0)$	-0.02 ± 0.004	-0.074 ± 0.013	-0.036
	$g_2(0)$	-0.03 ± 0.002	0.0011 ± 0.0024	0.012
	$g_3(0)$	0.14 ± 0.003	0.0085 ± 0.0055	--
$\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_b$	$f_1(0)$	0.39 ± 0.01	-0.65 ± 0.06	-0.55
	$f_2(0)$	0.06 ± 0.01	0.67 ± 0.07	0.30
	$f_3(0)$	-0.79 ± 0.06	-1.73 ± 0.48	--
	$g_1(0)$	1.06 ± 0.03	-0.15 ± 0.08	-0.15
	$g_2(0)$	-0.69 ± 0.02	-0.16 ± 0.08	0.10
	$g_3(0)$	0.56 ± 0.01	3.26 ± 0.44	--
$\Xi_{bc} \rightarrow \Lambda_c$	$f_1(0)$	-0.14 ± 0.005	-0.11 ± 0.01	-0.11
	$f_2(0)$	-0.09 ± 0.002	-0.11 ± 0.02	-0.03
	$f_3(0)$	0.1 ± 0.005	0.16 ± 0.03	--
	$g_1(0)$	-0.16 ± 0.001	-0.085 ± 0.014	-0.047
	$g_2(0)$	0.17 ± 0.0	0.11 ± 0.02	0.02
	$g_3(0)$	-0.17 ± 0.001	-0.14 ± 0.02	--

λ_2 和 λ_W 分别表示末态重子和中间态 W 玻色子的极化。由此得到对应于 $V - A$ 流的总螺旋度振幅

$$H_{\lambda_2, \lambda_W} = H_{\lambda_2, \lambda_W}^V - H_{\lambda_2, \lambda_W}^A. \quad (5-76)$$

$\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu$ 的衰变宽度可以按照 $l \nu$ 对的极化分为两类，分别对应于 $l \nu$ 对纵向和横向极化的情况

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_L}{dq^2} &= \frac{G_F^2 |V_{CKM}|^2 q^2 p (1 - \hat{m}_l^2)^2}{384\pi^3 M_1^2} \\ &\quad \times \left((2 + \hat{m}_l^2) (|H_{-\frac{1}{2}, 0}|^2 + |H_{\frac{1}{2}, 0}|^2) + 3\hat{m}_l^2 (|H_{-\frac{1}{2}, t}|^2 + |H_{\frac{1}{2}, t}|^2) \right), \end{aligned} \quad (5-77)$$

$$\frac{d\Gamma_T}{dq^2} = \frac{G_F^2 |V_{CKM}|^2 q^2 p (1 - \hat{m}_l^2)^2 (2 + \hat{m}_l^2)}{384\pi^3 M_1^2} (|H_{\frac{1}{2}, 1}|^2 + |H_{-\frac{1}{2}, -1}|^2). \quad (5-78)$$

其中 $\hat{m}_l \equiv m_l / \sqrt{q^2}$, $p = \sqrt{Q_+ Q_-} / (2M_1)$ 是在 $\Xi_{QQ'}$ 静止系中 $\Lambda_{Q'}$ 的三动量大小。对移动量 q^2 积分可以得到总衰变宽度：

$$\Gamma = \int_{m_l^2}^{(M_1 - M_2)^2} dq^2 \frac{d\Gamma}{dq^2}, \quad (5-79)$$

$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = \frac{d\Gamma_L}{dq^2} + \frac{d\Gamma_T}{dq^2}. \quad (5-80)$$

表 5-12 给出了不同半轻衰变道 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l(\tau) \nu_l$ 衰变宽度结果，分支比以及纵向和横向宽度比值 Γ_L / Γ_T ，其中 $l = e / \mu$ 。 e 和 μ 质量近似为零， τ 的质量取为 $1.78 \text{ GeV}^{[53]}$ 。图 5-8 给出了对应于四种衰变道的微分宽度关于 q^2 的依赖曲线。表 5-13 中对比了我们计算得到的和文献中的结果。

对于半轻的数值结果，我们有以下几点说明：

- 表 5-12 和图 5-8 中，数值结果的误差来自于形状因子参数化的误差。
- 通过表 5-12，我们可以发现 $c \rightarrow d$ 过程的宽度要比 $b \rightarrow u$ 过程的宽度大几个数量级。这一现象与底重子、粲重子衰变的情况是一致的^[140, 141]。
- 本章第一节中用 $SU(3)$ 对称性方法分析了双重味重子的半轻弱衰变过程，系统地研究了不同衰变道宽度之间的关联性。尽管本节只考虑了末态为 $\Lambda_{Q'}$ 的情况，我们可以根据 $SU(3)$ 对称性预言一些其他衰变道的宽度

$$\begin{aligned} \Gamma(\Omega_{cc}^+ \rightarrow \Xi_c^0 l^+ \nu) &= \Gamma(\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ l^+ \nu) = (3.95 \pm 0.21) \times 10^{-14} \text{ GeV}, \\ \Gamma(\Omega_{bc}^0 \rightarrow \Xi_b^- l^+ \nu) &= \Gamma(\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Lambda_b^0 l^+ \nu) = (5.51 \pm 0.38) \times 10^{-14} \text{ GeV}, \\ \Gamma(\Omega_{bb}^- \rightarrow \Xi_b^0 l^- \bar{\nu}) &= \Gamma(\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 l^- \bar{\nu}) = (7.35 \pm 1.43) \times 10^{-19} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (5-81)$$

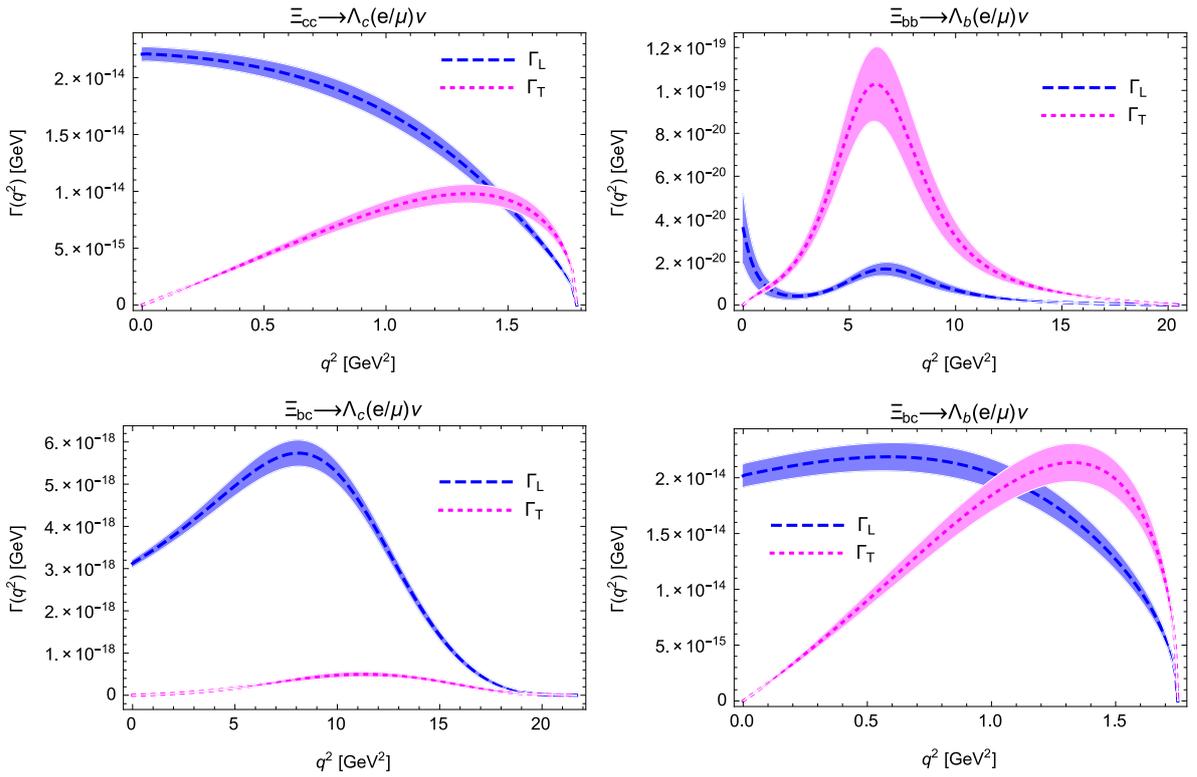


图 5-8 半轻过程 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu_l$ 的衰变宽度随 q^2 的变换曲线。蓝带表示 Γ_L ，红带表示 Γ_T 。虚线和点线表示中心值，带宽则反映了误差的大小。

Figure 5-8 q^2 dependence of the semi-leptonic $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu_l$ decay widths. The blue bands correspond to Γ_L while the red bands correspond to Γ_T . The dashed and dotted lines describe the center value curves and the band width reflects the error.

表 5-12 半轻过程 $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu_l$ 的衰变宽度和分支比, 其中 $l = e/\mu$ 。

 Table 5-12 Decay widths and branching ratios of the semi-leptonic $\Xi_{QQ'} \rightarrow \Lambda_{Q'} l \nu_l$ decays, where $l = e/\mu$.

Channels	Γ/GeV	\mathcal{B}	Γ_L/Γ_T
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ l^+ \nu_l$	$(3.95 \pm 0.21) \times 10^{-14}$	$(1.53 \pm 0.1) \times 10^{-2}$	2.6 ± 0.35
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 l^- \nu_l$	$(7.35 \pm 1.43) \times 10^{-19}$	$(4.13 \pm 0.8) \times 10^{-7}$	0.21 ± 0.12
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 \tau^- \nu_l$	$(6.1 \pm 1.1) \times 10^{-19}$	$(3.43 \pm 0.65) \times 10^{-7}$	0.08 ± 0.04
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \nu_l$	$(7.17 \pm 0.4) \times 10^{-17}$	$(1.01 \pm 0.06) \times 10^{-5}$	13.38 ± 2.74
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \tau^- \nu_l$	$(4.09 \pm 0.28) \times 10^{-17}$	$(5.77 \pm 0.4) \times 10^{-6}$	7.38 ± 1.61
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Lambda_b^0 l^+ \nu_l$	$(5.51 \pm 0.38) \times 10^{-14}$	$(2.04 \pm 0.14) \times 10^{-2}$	1.39 ± 0.21

 表 5-13 QCD 求和规则 (QCDSR)^[129], 光前夸克模型 (LFQM)^[97], 重夸克自旋对称性 (HQSS)^[139], 非相对论夸克模型 (NRQM)^[137] 和 MIT 袋模型 (MBM)^[137] 计算结果之间的比较。

 Table 5-13 Comparison of the decay widths (in units of GeV) for the semi-leptonic decays in this work with the results derived from QCD sum rules (QCDSR)^[129], the light-front quark model (LFQM)^[97], the heavy quark spin symmetry (HQSS)^[139], the nonrelativistic quark model (NRQM)^[137] and the MIT bag model (MBM)^[137] in literatures.

Channels	This work	QCDSR ^[129]	LFQM ^[97]	HQSS ^[139]	NRQM ^[137]	MBM ^[137]
$\Xi_{cc}^{++} \rightarrow \Lambda_c^+ l^+ \nu_l$	$(3.95 \pm 0.21) \times 10^{-14}$	$(6.1 \pm 1.1) \times 10^{-15}$	1.05×10^{-14}	3.20×10^{-15}	1.97×10^{-15}	1.32×10^{-15}
$\Xi_{bb}^- \rightarrow \Lambda_b^0 l^- \bar{\nu}_l$	$(7.35 \pm 1.43) \times 10^{-19}$	$(3.0 \pm 0.7) \times 10^{-17}$	1.58×10^{-17}	--	--	--
$\Xi_{bc}^0 \rightarrow \Lambda_c^+ l^- \bar{\nu}_l$	$(7.17 \pm 0.4) \times 10^{-17}$	$(2.2 \pm 0.5) \times 10^{-17}$	1.84×10^{-17}	--	--	--
$\Xi_{bc}^+ \rightarrow \Lambda_b^0 l^+ \nu_l$	$(5.51 \pm 0.38) \times 10^{-14}$	$(1.1 \pm 0.2) \times 10^{-14}$	6.85×10^{-15}	--	--	--

5.5 本章总结

本章首先用味道 $SU(3)$ 对称性分析了双重味重子的半轻衰变。根据味道 $SU(3)$ 对称性，我们预言了几种半轻衰变道之间的宽度关系，并且列出了所有 Cabibbo 角允的黄金衰变道，它们是实验上最有可能用来重建出双重味重子的衰变道。之后我们用 LCSR 计算了双重味重子衰变到反三重态重子 Λ_Q 的形状因子。根据重夸克对称性，我们论证了对于末态分别为 Λ_b 和 Λ_c 重子的情况，可以近似地用同一套 LCDAs 描述。从形状因子的数值结果中，我们发现虽然双重系统不能用 HQET 描述，但得到的 f_1 和 g_1 大约在同一个量级，这意味着在双重味重子的衰变中也存在有重夸克对称性的效应。接下来采用所得的形状因子计算了双重半轻过程的衰变宽度和分支比，其中大部分结果和过去文献中给出的是基本一致的。我们得到的唯象结果可以通过 LHCb, BES-III 等实验组检验，这对于检验并理解重子 LCDAs 有重要的意义。

第六章 总结和展望

重味强子弱衰变过程是一个用于精确检验标准模型、理解 CP 破坏乃至寻找新物理的理想平台。其中重味强子的半轻树图弱衰变过程可以用来精确测量 CKM 矩阵元。底味强子的 FCNC 过程对新物理效应的高度敏感性可以用来探测新物理。通过对衰变末态粒子的角分布、前反对称性、极化或自旋等物理量的计算和测量，人们可以定量地确定实验结果和标准模型预言的偏离程度。

在重味物理的研究中，我们可以采用一些有效的非微扰方法来处理涉及低能强子能标的物理过程。其中包括了光锥 QCD 求和规则、手征微扰论和 SU(3) 对称性分析。光锥 QCD 求和规则是基于算符乘积展开，将小尺度的量子涨落和长程非微扰效应分离开来，非常适用于重味强子的跃迁过程，能够描述粲强子衰变等小反冲情形下的强子跃迁行为。光锥 QCD 求和规则的基本思想是在光锥面上对算符乘积做非定域的部分展开，并且用光锥分布振幅作为非微扰输入，从而抽取出与强子相关的非微扰物理量。手征微扰论作为 QCD 的低能有效理论，是以强子场作为基本自由度，可以描述 QCD 的低能动力学行为。手征微扰论适用于处理重味强子衰变的末态中轻强子之间的相互作用。味道 SU(3) 对称性分析是一种能够系统地分析强子弱衰变的方法。基于 u, d, s 夸克的 SU(3) 味道对称性，我们可以用一系列独立的 SU(3) 不可约表示振幅表示出每一个衰变道的振幅，并进一步给出不同衰变道振幅之间的关系。

本论文中，我们首先用手征微扰论系统地研究了两介子的标量、矢量和张量形状因子，同时采用么正化的方法将形状因子的适用范围延拓到较高的能量区域。之后我们将所得的标量形状因子应用于一些由 S-波共振态主导的重味介子弱衰变过程，详细分析了半轻衰变 $D, D_s \rightarrow \pi\pi l\bar{\nu}$ 以及味道改变中性流引发的半轻过程 $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-$ 。在这些过程中，中间标量共振态衰变为末态两个轻介子对。我们用 LCSR 计算了强子跃迁矩阵元，同时用介子低能形状因子处理末态介子相互作用。对于 $D \rightarrow \pi\pi l\bar{\nu}$ 衰变，我们给出了一个普适的并且包含任意 $\pi\pi$ 分波成分的角分布，并研究了分支比、前反对称性和一些其他的可观测量。其中 P-波贡献由 ρ^0 共振态主导，而 S-波贡献则是通过么正化的手征微扰论进行分析。最终得到的 $D \rightarrow \rho l\nu$ 分支比和目前的实验结果是相符的，我们也预言了 S-波在其中的贡献，部分结果得到了 BES-III 实验的证实^[84]，其它预言有待于今后 BES-III 或者 LHCb 实验组进行验证。对于 B_s 的 FCNC 过程： $B_s \rightarrow \pi^+\pi^-l^+l^-(\nu\bar{\nu})$ 。我们利用标量形状因子归一化 S-波 $\pi^+\pi^-$ 光锥分布振幅，并比较了用么正化的手征微扰论结果与用 $B_s \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 数据进行拟合得到的标量形状因子，发现两者的形状是相似的。我们计算了相应的微分衰变宽度，其结果和实

验也是基本符合的。对此我们期望在未来 BES-III, LHCb 和 Super-B 工厂能够更精确地检验我们的结果。

双粲重子的发现对于检验夸克模型以及研究强子结构有着重要的意义。在本文中,我们用味道 SU(3) 对称性分析了双重味重子的半轻衰变振幅,并对不同半轻衰变道之间的宽度关系做了预言。之后进一步针对双重味重子衰变到反三重态重子 Λ_Q 的过程,分别用光锥 QCD 求和规则和 SVZ 求和规则计算了跃迁形状因子。两种方法得到的形状因子在最大反冲处的值基本上具有相同的数量级。在 LCSR 的结果中 f_1 和 g_1 的数值比较接近,这意味着在双重味重子的衰变过程中可能仍然存在有重夸克对称的效应。另外对双重半轻过程的衰变宽度和分支比的计算结果和以往文献中给出的是基本一致的。我们得到的唯象结果可以通过 LHCb, BES-III 等实验组检验,这对于检验并理解重子 LCDAs 有重要的意义。

双重味重子在未来将是一个热门的研究对象。目前能够处理双重味重子弱衰变的理论方法非常有限,除了 QCD 求和规则和夸克模型,还没有一套成熟的有效理论能够描述双重味重子的动力学。对于只含有一个重夸克的强子,我们可以用 HQET 来处理。可是如果同时存在有两个重夸克,重夸克散射的单圈图由于存在库仑发散从而使得 HQET 失效。我们期望能够发展出一套新的有效理论,其中重夸克对或者重轻夸克对能够被作为一个整体,称为 Diquark。在这样的有效理论中将只存在两种场自由度: Diquark 场和轻夸克场,而不再有重夸克场。然而要建立这套 Diquark 有效理论我们需要解决三个问题:第一,在怎样的动力学区域 Diquark 有效理论可以适用? 第二,对不同自旋的 Diquark 场如何构造有效拉氏量? 第三, Diquark 有效理论如何与完整的 QCD 理论进行匹配? 如果所有这些问题得以解决,那么 Diquark 有效理论的建立将极大地帮助我们理解双重味重子的结构。

我们期望在不久的将来, LHCb, BES-III 以及其他实验组能够提供更多更精确的测量数据,为标准模型的验证、强子谱的研究乃至新物理的寻找指引方向。我们不仅需要提高理论计算的精度,更需要发展新的理论方法,包括新的有效理论或者非微扰方法,从而进一步理解强子结构以及 QCD 的低能动力学机制。我们相信,作为粒子物理的主要研究领域之一,重味物理在未来对于人们理解基本粒子及其相互作用仍将起着至关重要的作用。

附录 A χ PT 中介子-介子散射振幅表达式

在第三章第三节我们计算了具有确定总同位旋的两介子散射振幅，并且可以证明所有散射振幅都可以用公式 (3-21) 中八个独立散射道的振幅表示出来。这里我们给出这八个振幅的解析表达式：

$$\begin{aligned}
& T_1(s, t, u) \\
= & \frac{s - M_\pi^2}{f_\pi^2} - \frac{\mu_\pi}{3f_\pi^2 M_\pi^2} \{4s^2 - 4tu - 4sM_\pi^2 + 9M_\pi^4\} - \frac{\mu_K}{6f_\pi^2 M_K^2} \{s^2 - tu + 2sM_\pi^2\} - \frac{\mu_\eta M_\pi^4}{9f_\pi^2 M_\eta^2} \\
& + \frac{4}{f_\pi^4} \{(2L_1^r + L_3)(s - 2M_\pi^2)^2 + L_2^r[(t - 2M_\pi^2)^2 + (u - 2M_\pi^2)^2]\} \\
& + \frac{8M_\pi^2}{f_\pi^4} \{(2L_4^r + L_5^r)s + 2(2L_6^r + L_8^r - 2L_4^r - L_5^r)M_\pi^2\} \\
& + \frac{1}{576\pi^2 f_\pi^4} \{30(M_\pi^2 - s)s + 21tu - 56M_\pi^4\} + \frac{1}{2f_\pi^4} \left\{ \frac{s^2 \bar{J}_{KK}(s)}{4} + \frac{M_\pi^4 \bar{J}_{\eta\eta}(s)}{9} + (s^2 - M_\pi^4) \bar{J}_{\pi\pi}(s) \right\} \\
& + \frac{1}{6f_\pi^4} \left\{ \frac{(t - 4M_K^2)(2s + t - 4M_\pi^2) \bar{J}_{KK}(t)}{4} + [t(t - u) - 2M_\pi^2(t - 2u + M_\pi^2)] \bar{J}_{\pi\pi}(t) + [t \leftrightarrow u] \right\}, \quad (\text{A-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_2(s, t, u) \\
= & \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - s}{2f_\pi^2} + \frac{2}{f_\pi^4} \{(4L_1^r + L_3)(t - 2M_K^2)(t - 2M_\pi^2) + (2L_2^r + L_3)(u - M_K^2 - M_\pi^2)^2 \\
& + 2L_4^r(s - M_K^2 - M_\pi^2)^2 + 4L_4^r[tM_\pi^2 + M_K^2(t - 4M_\pi^2)] - 2L_5^r M_\pi^2(s + M_K^2 - M_\pi^2) \\
& + 8(2L_6^r + L_8^r)M_K^2 M_\pi^2\} + \frac{\mu_\pi}{24f_\pi^2 M_\pi^2 (M_\pi^2 - M_K^2)} \{2M_K^2(7s + 5u - 12M_K^2)(2M_\pi^2 - t) \\
& - [26s^2 + 21su + 25u^2 - 3M_K^2(s + 5u + 16M_K^2)]M_\pi^2 + (85s + 53u - 78M_K^2)M_\pi^4 - 66M_\pi^6\} \\
& + \frac{\mu_K}{12f_\pi^2 M_K^2 (M_\pi^2 - M_K^2)} \{42M_K^6 - M_\pi^2(5s + 4u - 9M_\pi^2)(2M_K^2 - t) + 4M_K^4(12M_\pi^2 - 13s - 8u) \\
& + M_K^2[11s^2 + 12su + 7u^2 - 3M_\pi^2(s - u + 8M_\pi^2)]\} + \frac{\mu_\eta}{72f_\pi^2 M_\eta^2 (M_\eta^2 - M_\pi^2)} \{41M_\pi^6 - 18(s + u)M_\pi^4 \\
& + [36(s - u)u + 9(s + 5u)M_\pi^2 - 59M_\pi^4]M_\eta^2 - 3[9(5s + u) - 43M_\pi^2]M_\eta^4 + 81M_\eta^6\} \\
& + \frac{1}{1152f_\pi^4 \pi^2} \{3(s - 10t)t - 6su - 3u^2 - 27M_K^4 + M_K^2(30s - 3t + 21u - 34M_\pi^2) - 3M_\pi^2(t - 2s - 3u + M_\pi^2)\} \\
& - \frac{\bar{J}_{K\pi}(u)}{16f_\pi^4} \{(s - 5u)u + 5M_K^4 - 2(s - 2u)M_\pi^2 + 5M_\pi^4 - 2M_K^2(s - 2u + 5M_\pi^2)\} \\
& + \frac{\bar{J}_{\pi\pi}(t)}{24f_\pi^4} \{t(5t - 2s + 2M_K^2) + (8s + 3t - 8M_K^2)M_\pi^2 - 8M_\pi^4\} - \frac{\bar{J}_{\eta\eta}(t)M_\pi^2}{72f_\pi^4} [2M_\pi^2 + 6M_\eta^2 - 9t] \\
& + \frac{\bar{J}_{KK}(t)}{24f_\pi^4} \{M_K^2(4s + 3t - 4M_\pi^2) + t(4t - s + M_\pi^2) - 4M_K^4\} + \frac{\bar{J}_{K\eta}(u)}{432f_\pi^4} \{2M_K^2(27s + 18u - 74M_\pi^2 - 51M_\eta^2) \\
& + 29M_K^4 + 38M_\pi^4 - M_\pi^2(36u - 48M_\eta^2) - 9(3(s - u)u - 6sM_\eta^2 + M_\eta^4)\} + \frac{\bar{J}_{K\pi}(s)}{4f_\pi^4} (M_K^2 + M_\pi^2 - s)^2 \\
& - \frac{\bar{J}_{K\eta}(u)}{48f_\pi^4 u} \{2M_K^6 + 10M_\pi^4 M_\eta^2 + 3sM_\eta^4 + M_K^4(3s - 4M_\pi^2 + 10M_\eta^2) - 2M_K^2(2M_\pi^4 + (3s + 4M_\pi^2)M_\eta^2 + 3M_\eta^4)\} \\
& + (M_K^2 - M_\pi^2)^2 \frac{(M_K^2 - M_\eta^2)^2 \bar{J}_{K\eta}(u) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2 \bar{J}_{K\pi}(u)}{8f_\pi^4 u^2}
\end{aligned}$$

$$- (M_K^2 - M_\pi^2)^2 \frac{\bar{J}_{K\pi}(u) (s - 2M_K^2 - 2M_\pi^2)}{16f_\pi^4 u}, \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} & T_3(s, t, u) \\ = & \frac{2M_K^2 - u}{f_\pi^2} - \frac{\mu_K}{6f_\pi^2 M_K^2} [5(s^2 + st + t^2) + 6u^2 - 13uM_K^2 - 8M_K^4] \\ & + \frac{\mu_\pi}{2f_\pi^2} \left\{ 5(u - 2M_K^2) - \frac{11s^2 + 8st + 11t^2 + 8uM_K^2 - 32M_K^4}{24M_\pi^2} + \frac{9(s^2 + t^2) + 24uM_K^2 - 64M_K^4}{16(M_K^2 - M_\pi^2)} \right\} \\ & + \frac{\mu_\eta}{12f_\pi^2} \left\{ 64M_K^2 - 2M_\pi^2 - 27u - \frac{81(s^2 + t^2) - 36(s+t)M_\pi^2 + 8M_\pi^4}{12M_\eta^2} + \frac{9(s^2 + t^2) + 24uM_K^2 - 64M_K^4}{2(M_\pi^2 - M_\eta^2)} \right\} \\ & + \frac{4}{f_\pi^4} \{ 2L_2^r(u - 2M_K^2)^2 + (2L_1^r + L_2^r + L_3) [(s - 2M_K^2)^2 + (t - 2M_K^2)^2] - 4L_4^r u M_K^2 - 2L_5^r(u - 2M_K^2) M_\pi^2 \\ & - 4[L_5^r - 2(2L_6^r + L_8^r)] M_K^4 \} + \frac{186st - 177u^2 + 1032uM_K^2 - 1648M_K^4}{2304f_\pi^4 \pi^2} + \frac{1}{2f_\pi^4} (u - 2M_K^2)^2 \bar{J}_{KK}(u) \\ & + \frac{1}{288f_\pi^4} \left\{ 60 [s(2s + t) + 4uM_K^2 - 8M_K^4] \bar{J}_{KK}(s) + 2(9s - 8M_K^2 - M_\pi^2 - 3M_\eta^2)^2 \frac{\bar{J}_{\pi\eta}(s)}{3} \right. \\ & \left. + (9s - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2)^2 \bar{J}_{\eta\eta}(s) + 3 [s(11s + 4t - 8M_K^2) - 8(s + 2t - 4M_K^2) M_\pi^2] \bar{J}_{\pi\pi}(s) + [s \leftrightarrow t] \right\}, \quad (\text{A-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_4(s, t, u) \\ = & \frac{2M_K^2 - u}{2f_\pi^2} - \frac{\mu_K}{12f_\pi^2 M_K^2} \{ 5s^2 - su + 8u^2 - 2M_K^2(s + 16u) + 36M_K^4 \} \\ & + \frac{\mu_\pi}{4f_\pi^2} \left\{ 5(u - 2M_K^2) - \frac{11s^2 + 4t^2 + 4s(2t + u) - 8(s + 2t)M_K^2}{12M_\pi^2} + \frac{24(s - 2t)M_K^2 - 9(s^2 - 2t^2) + 16M_K^4}{8(M_K^2 - M_\pi^2)} \right\} \\ & + \frac{\mu_\eta}{12f_\pi^2} \left\{ 9(s - u) + 14M_K^2 - M_\pi^2 - \frac{(9s - 2M_\pi^2)^2}{12M_\eta^2} + \frac{8M_K^2(3s - 6t + 2M_K^2) - 9(s^2 - 2t^2)}{2(M_\pi^2 - M_\eta^2)} \right\} \\ & + \frac{2}{f_\pi^4} \{ (4L_1^r + L_3)(s - 2M_K^2)^2 + 2L_2^r(u - 2M_K^2)^2 + (2L_2^r + L_3)(t - 2M_K^2)^2 \} \\ & + \frac{4}{f_\pi^4} \{ 4L_4^r s M_K^2 - 2M_K^4 [4L_4^r + L_5^r - 2(2L_6^r + L_8^r)] - L_5^r(u - 2M_K^2) M_\pi^2 \} \\ & - \frac{3(31s^2 + 4su + 16u^2) - 4M_K^2(30s + 57u - 80M_K^2)}{2304f_\pi^4 \pi^2} \\ & + \frac{\bar{J}_{KK}(s)}{6f_\pi^4} [s(s - u) + 4M_K^2(2M_K^2 - t)] - \frac{\bar{J}_{\pi\eta}(s)}{432f_\pi^4} (9s - 8M_K^2 - M_\pi^2 - 3M_\eta^2)^2 + \frac{\bar{J}_{KK}(u)}{4f_\pi^4} (u - 2M_K^2)^2 \\ & + \frac{\bar{J}_{\pi\pi}(s)}{96f_\pi^4} [s(7s - 4t + 8M_K^2) + 8(s + 2t - 4M_K^2) M_\pi^2] + \frac{\bar{J}_{\pi\pi}(t)}{24f_\pi^4} (2s + t - 4M_K^2)(t - 4M_\pi^2) \\ & + \frac{\bar{J}_{\pi\eta}(t)}{216f_\pi^4} (9t - 8M_K^2 - M_\pi^2 - 3M_\eta^2)^2 + \frac{\bar{J}_{KK}(t)}{24f_\pi^4} [t(s + 2t) + 4uM_K^2 - 8M_K^4] \\ & + \frac{\bar{J}_{\eta\eta}(s)}{288f_\pi^4} (9s - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2)^2, \quad (\text{A-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_5(s, t, u) \\ = & \frac{9t - 6M_\eta^2 - 2M_\pi^2}{12f_\pi^2} - \frac{2L_5^r}{3f_\pi^4} [3M_\pi^4 + 12M_\eta^4 + M_\pi^2(5M_\eta^2 - 9t)] \\ & + \frac{1}{3f_\pi^4} \left\{ 2(12L_1^r + 5L_3)(2M_K^2 - t)(2M_\eta^2 - t) + (12L_2^r + L_3) [(s - M_K^2 - M_\eta^2)^2 + (u - M_K^2 - M_\eta^2)^2] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{f_\pi^4} \{8(L_6^r - L_4^r)M_K^2 M_\eta^2 + 2L_7 (M_\pi^4 - 4M_\pi^2 M_\eta^2 + 3M_\eta^4) + L_8^r (M_\pi^4 - 3M_\pi^2 M_\eta^2 + 6M_\eta^4) + 2L_4^r t(M_\eta^2 + M_K^2)\} \\
 & - \frac{\mu_\pi}{48f_\pi^2 (M_K^2 - M_\eta^2)} \{2M_K^2 [26M_\eta^2 + 69t] - 84M_K^4 + 3 [16M_\eta^4 - 50tM_\eta^2 + (s-u)^2]\} \\
 & - \frac{\mu_K}{72f_\pi^2 M_K^2 (M_K^2 - M_\eta^2)} \{92M_K^6 - 81M_\eta^2 t^2 - 60M_K^4 [3t + M_\eta^2] + 18M_K^2 (5t^2 - 2su + 6tM_\eta^2 + 8M_\eta^4)\} \\
 & + \frac{\mu_\eta}{144f_\pi^2 M_\eta^2 (M_K^2 - M_\eta^2)} \{144tM_K^4 - 128M_K^6 + [27(s-u)^2 - 486tM_K^2 + 428M_K^4] M_\eta^2 \\
 & + 2 [153t - 166M_K^2] M_\eta^4 + 144M_\eta^6\} + \frac{1}{2304f_\pi^4 \pi^2} \{116M_K^4 + M_K^2 [184M_\eta^2 - 153t] \\
 & - 9 [10t^2 + 2su - 3tM_\eta^2 + 4M_\eta^4]\} + \frac{t\bar{J}_{KK}(t) (9t - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2)}{16f_\pi^4} + \frac{\bar{J}_{\eta\eta}(t) (9t - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2) (16M_K^2 - 7M_\pi^2)}{216f_\pi^4} \\
 & + \frac{t\bar{J}_{\pi\pi}(t)M_\pi^2}{8f_\pi^4} + \frac{1}{32f_\pi^4} \left\{ \frac{\bar{J}_{K\eta}(s)}{9} [27s(s-u) + 189M_K^4 + 8M_\pi^4 + 54uM_\eta^2 + 45M_\eta^4 + 12M_\pi^2(3s - 2M_\eta^2)] \right. \\
 & - 18M_K^2 (6s - 3u + 4M_\pi^2 + 9M_\eta^2) + \frac{\bar{J}_{K\pi}(s)}{9} [27s(s-u) + 29M_K^4 + 11M_\pi^4 + 18M_\eta^4 \\
 & + 2M_K^2 (18s + 27u - 47M_\pi^2 - 78M_\eta^2) + 6M_\pi^2 (9u - 6s + 8M_\eta^2)] - \frac{\bar{J}_{K\pi}(s)}{s} [M_K^4 (3u + 14M_\pi^2 - 8M_\eta^2) \\
 & + 2M_K^6 - 2M_K^2 M_\pi^2 (3u + 5M_\pi^2 + 4M_\eta^2) + M_\pi^2 (6M_\eta^4 + M_\pi^2 (3u + 4M_\eta^2))] \\
 & + \frac{\bar{J}_{K\eta}(s)}{s} (M_K^2 - M_\eta^2)^2 (4M_\pi^2 - 18M_K^2 - 6M_\eta^2 - 3u) \\
 & \left. + 6 (M_K^2 - M_\eta^2)^2 \frac{\bar{J}_{K\pi}(s)(M_K^2 - M_\pi^2)^2 + \bar{J}_{K\eta}(s)(M_K^2 - M_\eta^2)^2}{s^2} + [s \leftrightarrow u] \right\}, \tag{A-5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_6(s, t, u) \\
 & = \frac{8M_K^2 + 3M_\eta^2 + M_\pi^2 - 9t}{12\sqrt{3}f_\pi^2} + \frac{\mu_\pi}{48\sqrt{3}f_\pi^2 (M_K^2 - M_\pi^2)} \{27s^2 + 18su + 27u^2 + 174tM_K^2 \\
 & - 292M_K^4 + 12(5M_K^2 - 6t)M_\pi^2 - 32M_\pi^4\} - \frac{\mu_K}{24\sqrt{3}f_\pi^2 M_K^2 (M_K^2 - M_\pi^2)} \{9t^2 M_\pi^2 + 24M_K^6 \\
 & + 4M_K^4 (17M_\pi^2 - 15t) + 2M_K^2 [9(s-u)^2 + 6tM_\pi^2 - 22M_\pi^4]\} - \frac{\mu_\eta}{16\sqrt{3}f_\pi^2 (M_K^2 - M_\eta^2)} \{3(s-u)^2 \\
 & + 2(3t - 14M_K^2 + 10M_\eta^2)(M_K^2 - 2M_\eta^2)\} + \frac{1}{256\sqrt{3}\pi^2 f_\pi^4} \{2(2s+u)(s+2u) - 192M_K^4 - 23tM_\eta^2 - 16M_\eta^4 \\
 & + 5M_K^2 (13t + 24M_\eta^2)\} - \frac{L_3}{\sqrt{3}f_\pi^4} \{s^2 + 4su + u^2 - 30M_K^4 - 2tM_\eta^2 + 2M_\eta^4 + 6M_K^2 (t + 2M_\eta^2)\} \\
 & + \frac{1}{\sqrt{3}f_\pi^4} \{3M_\pi^4 [L_5^r - 2(2L_7 + L_8^r)] + M_\eta^4 [6(2L_7 + L_8^r) - L_5^r] - 6L_5^r M_\pi^2 (t - M_\eta^2)\} \\
 & - \frac{9t - 8M_K^2 - M_\pi^2 - 3M_\eta^2}{144\sqrt{3}f_\pi^4} [3t\bar{J}_{KK}(t) + 4M_\pi^2 \bar{J}_{\pi\eta}(t)] + \frac{1}{288\sqrt{3}f_\pi^4} \{\bar{J}_{K\eta}(s) [27s(u-s) - 45M_K^4 + 14M_\pi^4 \\
 & - 6M_\eta^2 (9u + 7M_\pi^2) - 9M_\eta^4 + M_K^2 (36s - 54u + 22M_\pi^2 + 156M_\eta^2)] + 3\bar{J}_{K\pi}(s) [29M_K^4 + 7M_\pi^4 \\
 & + 3s(9s + 3u - 4M_\eta^2) - 2M_K^2 (16s + 9u - 18M_\pi^2 + 3M_\eta^2) - M_\pi^2 (40s + 18u - 30M_\eta^2)] \\
 & + 9\frac{\bar{J}_{K\eta}(s)}{s} (M_K^2 - M_\eta^2) [10M_K^4 + 2M_\pi^4 - M_\eta^2 (3u + 8M_\pi^2) + M_K^2 (3u - 12M_\pi^2 + 8M_\eta^2)] \\
 & + 9\frac{\bar{J}_{K\pi}(s)}{s} (M_K^2 - M_\pi^2)^2 (3u - 2M_K^2 + 2M_\pi^2) - \frac{54\bar{J}_{K\eta}(s)}{s^2} (M_K^2 - M_\pi^2) (M_K^2 - M_\eta^2)^3 \\
 & - \frac{54\bar{J}_{K\pi}(s)}{s^2} (M_K^2 - M_\pi^2)^3 (M_K^2 - M_\eta^2) + [s \leftrightarrow u]\}, \tag{A-6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_7(s, t, u) \\
 = & \frac{M_\pi^2}{3f_\pi^2} - \frac{(13M_\pi^4 + 6t(M_\pi^2 - M_\eta^2) - 9M_\pi^2 M_\eta^2) \mu_\pi}{9f_\pi^2 (M_\pi^2 - M_\eta^2)} + \frac{(M_\pi^6 - M_\pi^4 M_\eta^2 + 4M_\pi^2 M_\eta^4) \mu_\eta}{9f_\pi^2 M_\eta^2 (M_\pi^2 - M_\eta^2)} \\
 & - \frac{\mu_K}{6f_\pi^2 M_K^2} \{20M_\pi^2 (t - 3M_\eta^2) - 25M_\pi^4 + 3[3(s^2 + su + u^2) + 8tM_\eta^2 - 9M_\eta^4]\} \\
 & + \frac{4}{f_\pi^4} \{2(L_1^r + L_3/6)(t - 2M_\pi^2)(t - 2M_\eta^2) + (L_2^r + L_3/3)[(s - M_\pi^2 - M_\eta^2)^2 + (u - M_\pi^2 - M_\eta^2)^2]\} \\
 & + \frac{8}{f_\pi^4} \{[t(M_\pi^2 + M_\eta^2) - 4M_\pi^2 M_\eta^2] L_4^r + 2(2L_6^r - L_5^r/3)M_\pi^2 M_\eta^2 + 4L_7 M_\pi^2 (M_\pi^2 - M_\eta^2) + 2L_8^r M_\pi^4\} \\
 & + \frac{1}{576f_\pi^4 \pi^2} \{77M_\pi^4 + M_\pi^2 (154M_\eta^2 - 72t) - 9[3(s^2 + su + u^2) + 8tM_\eta^2 - 9M_\eta^4]\} \\
 & + \frac{1}{6f_\pi^4} \left\{ \frac{M_\pi^2}{9} \bar{J}_{\eta\eta}(t)(16M_K^2 - 7M_\pi^2) + \frac{t}{4} \bar{J}_{KK}(t)(9t - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2) + \bar{J}_{\pi\pi}(t)M_\pi^2 (2t - M_\pi^2) \right\} \\
 & + \frac{1}{9f_\pi^4} \left\{ M_\pi^4 \bar{J}_{\pi\eta}(s) + \frac{1}{24} \bar{J}_{KK}(s) (9s - 8M_K^2 - M_\pi^2 - 3M_\eta^2)^2 + [s \leftrightarrow u] \right\}, \tag{A-7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_8(s, t, u) \\
 = & \frac{16M_K^2 - 7M_\pi^2}{9f_\pi^2} + \frac{\mu_\pi}{9f_\pi^2} \{7M_\pi^2 - 48M_\eta^2\} \\
 & - \frac{\mu_K}{18f_\pi^2 M_K^2} \{81[t^2 - su - 4tM_\eta^2] + 14M_\pi^4 - 48M_\pi^2 M_\eta^2 + 378M_\eta^4\} \\
 & - \frac{\mu_\eta}{3f_\pi^2 M_\eta^2} \{M_\pi^4 - 8M_\pi^2 M_\eta^2 + 24M_\eta^4\} + \frac{4}{f_\pi^4} (2L_1^r + 2L_2^r + L_3) \{s^2 + t^2 + u^2 - 4M_\eta^4\} \\
 & - \frac{8}{3f_\pi^4} \{12M_\eta^4 L_4^r + (3M_\pi^4 - 10M_\pi^2 M_\eta^2 + 13M_\eta^4) L_5^r - 36M_\eta^4 L_6^r - 24(M_\pi^4 - 3M_\pi^2 M_\eta^2 + 2M_\eta^4) L_7 \\
 & - 6L_8^r (2M_\pi^4 - 6M_\pi^2 M_\eta^2 + 7M_\eta^4)\} - \frac{1}{192\pi^2 f_\pi^4} \{27(t^2 - su - 4tM_\eta^2) + 16(23M_\eta^4 - 22M_K^2 M_\eta^2 + 10M_K^4)\} \\
 & + \frac{1}{6f_\pi^4} \left\{ \frac{1}{27} (16M_K^2 - 7M_\pi^2)^2 \bar{J}_{\eta\eta}(s) + M_\pi^4 \bar{J}_{\pi\pi}(s) + \frac{1}{12} (9s - 2M_\pi^2 - 6M_\eta^2)^2 \bar{J}_{KK}(s) + [s \leftrightarrow t] + [s \leftrightarrow u] \right\}. \tag{A-8}
 \end{aligned}$$

附录 B χ PT 中介子形状因子表达式

在第三章第二节我们介绍了如何通过 χ PT 计算精确到次领头阶的标量、矢量和张量形状因子，这里给出具有确定同位旋的两介子形状因子解析表达式。初末态介子选为两粒子同位旋本征态，通过计算费曼图 Fig. 3-3 可以得到形状因子。

B.1 标量形状因子

$I = 0$ 两介子系统:

$$\begin{aligned}
-\frac{F_{S,\pi\pi}^n(s)}{\sqrt{3}} &= 1 + \mu_\pi - \frac{1}{3}\mu_\eta - \frac{8(2m_K^2 + 3m_\pi^2 - s)}{f_\pi^2}L_4^r + \frac{4(s - 4m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_5^r + \frac{16(2m_K^2 + 3m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_6^r \\
&\quad + \frac{32m_\pi^2}{f_\pi^2}L_8^r + \frac{2s - m_\pi^2}{2f_\pi^2}J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{s}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{m_\pi^2}{18f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s), \\
-F_{S,K\bar{K}}^n(s) &= 1 + \frac{2}{3}\mu_\eta - \frac{8(6m_K^2 + m_\pi^2 - 2s)}{f_\pi^2}L_4^r + \frac{4(s - 4m_K^2)}{f_\pi^2}L_5^r + \frac{16(6m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_6^r \\
&\quad + \frac{32m_K^2}{f_\pi^2}L_8^r + \frac{3s}{4f_\pi^2}J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{3s}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{36f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s), \\
3F_{S,\eta\eta}^n(s) &= 1 - 3\mu_\pi + 4\mu_K - \frac{1}{3}\mu_\eta + \frac{8(-10m_K^2 + m_\pi^2 + 3s)}{f_\pi^2}L_4^r - \frac{4(16m_K^2 - 4m_\pi^2 - 3s)}{3f_\pi^2}L_5^r \\
&\quad + \frac{16(10m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_6^r - \frac{128(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_7^r + \frac{32m_\pi^2}{f_\pi^2}L_8^r + \frac{3m_\pi^2}{2f_\pi^2}J_{\pi\pi}^r(s) \\
&\quad + \frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{16m_K^2 - 7m_\pi^2}{18f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s), \\
-\sqrt{\frac{2}{3}}F_{S,\pi\pi}^{\bar{s}s}(s) &= \frac{8(s - 2m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_4^r + \frac{32m_\pi^2}{f_\pi^2}L_6^r + \frac{s}{2f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{2m_\pi^2}{9f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s), \\
-\frac{F_{S,K\bar{K}}^{\bar{s}s}(s)}{\sqrt{2}} &= 1 + \frac{2}{3}\mu_\eta - \frac{8(4m_K^2 + m_\pi^2 - s)}{f_\pi^2}L_4^r + \frac{4(s - 4m_K^2)}{f_\pi^2}L_5^r + \frac{16(4m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_6^r \\
&\quad + \frac{32m_K^2}{f_\pi^2}L_8^r + \frac{3s}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{18f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s), \\
\frac{3\sqrt{2}F_{S,\eta\eta}^{\bar{s}s}(s)}{4} &= 1 + 2\mu_K - \frac{4}{3}\mu_\eta + \frac{2(-16m_K^2 - 2m_\pi^2 + 3s)}{f_\pi^2}L_4^r - \frac{4(16m_K^2 - 4m_\pi^2 - 3s)}{3f_\pi^2}L_5^r \quad (\text{B-1}) \\
&\quad + \frac{8(8m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_6^r + \frac{64(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_7^r + \frac{32(2m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_8^r \\
&\quad + \frac{9s - 2m_\pi^2 - 6m_\eta^2}{8f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{16m_K^2 - 7m_\pi^2}{18f_\pi^2}J_{\eta\eta}^r(s). \quad (\text{B-2})
\end{aligned}$$

$I = \frac{1}{2}$ 两介子系统:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{2}{3}}F_{S,K\pi}^{\bar{u}s}(s) &= 1 + \frac{5s - 4m_\pi^2}{4(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\pi - \frac{s}{2(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_K + \frac{8m_K^2 + 4m_\pi^2 - 9s}{12(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\eta \\
 &\quad - \frac{8(2m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}(L_4^r - 2L_6^r) + \frac{4(-2m_K^2 - 2m_\pi^2 + s)}{f_\pi^2}L_5^r + \frac{16(m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_8^r \\
 &\quad - \frac{3m_\eta^2(3m_K^2 - 3m_\pi^2 + s) - 9m_K^4 + m_K^2(9m_\pi^2 + 2s) + s(7m_\pi^2 - 9s)}{72f_\pi^2s}\bar{J}_{K\eta}(s) \\
 &\quad - \frac{3m_K^4 + m_K^2(2s - 6m_\pi^2) + 3m_\pi^4 + 2m_\pi^2s - 5s^2}{8f_\pi^2s}\bar{J}_{\pi K}(s), \\
 -\sqrt{6}F_{S,K\eta}^{\bar{u}s}(s) &= 1 - \frac{3(4m_\pi^2 - 3s)}{4(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\pi + \frac{16m_K^2 - 9s}{2(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_K + \frac{-88m_K^2 + 28m_\pi^2 + 27s}{12(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\eta \\
 &\quad - \frac{8(2m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}(L_4^r - 2L_6^r) + \frac{4(-14m_K^2 + 2m_\pi^2 + 3s)}{3f_\pi^2}L_5^r + \frac{128(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_7^r \\
 &\quad - \frac{9m_\eta^4 - 6m_\eta^2(3m_K^2 + s) + 9m_K^4 - 18m_K^2s + s(4m_\pi^2 + 9s)}{24f_\pi^2s}\bar{J}_{K\eta}(s) \\
 &\quad - \frac{3m_\eta^2(3m_K^2 - 3m_\pi^2 + s) - 9m_K^4 + m_K^2(9m_\pi^2 + 2s) + s(7m_\pi^2 - 9s)}{8f_\pi^2s}\bar{J}_{\pi K}(s) \\
 &\quad + \frac{16(5m_K^2 - 3m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_8^r. \tag{B-3}
 \end{aligned}$$

$I = 1$ 两介子系统:

$$\begin{aligned}
 F_{S,K\bar{K}}^{\bar{u}d}(s) &= 1 + \frac{2}{3}\mu_\eta - \frac{8(2m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}(L_4^r - 2L_6^r) + \frac{4(s - 4m_K^2)}{f_\pi^2}L_5^r + \frac{32m_K^2}{f_\pi^2}L_8^r \\
 &\quad + \frac{s}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s) - \frac{8m_K^2 + m_\pi^2 + 3m_\eta^2 - 9s}{18f_\pi^2}J_{\pi\eta}^r(s), \\
 -\sqrt{\frac{3}{2}}F_{S,\pi\eta}^{\bar{u}d}(s) &= 1 - \mu_\pi + 2\mu_K - \frac{1}{3}\mu_\eta - \frac{8(2m_K^2 + m_\pi^2)}{f_\pi^2}(L_4^r - 2L_6^r) - \frac{4(8m_K^2 + 4m_\pi^2 - 3s)}{3f_\pi^2}L_5^r \\
 &\quad - \frac{64(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_7^r + \frac{32m_\pi^2}{f_\pi^2}L_8^r + \frac{9s - 8m_K^2 - m_\pi^2 - 3m_\eta^2}{12f_\pi^2}J_{KK}^r(s) + \frac{m_\pi^2}{3f_\pi^2}J_{\pi\eta}^r(s), \\
 F_{S,\pi\pi}^{\bar{u}d}(s) &= 0. \tag{B-4}
 \end{aligned}$$

B.2 矢量形状因子

$I = 0$ 两介子系统:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_{V^-,K\bar{K}}^{\bar{s}s}}{\sqrt{2}} &= 1 - 2\mu_K + \frac{s - 6m_K^2}{96\pi^2 f_\pi^2} + \frac{2s}{f_\pi^2}L_9^r + \frac{s - 4m_K^2}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s), \\
 F_{V^-,\pi\pi}^{\bar{s}s}(s) &= 0,
 \end{aligned}$$

$$F_{V^-, \eta\eta}^{\bar{s}s}(s) = 0. \quad (\text{B-5})$$

$I = \frac{1}{2}$ 两介子系统:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2}{3}}F_{V^-, K\pi}^{\bar{u}s}(s) &= 1 + \frac{s - 4m_K^2}{4(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\pi + \frac{-8m_K^2 + 4m_\pi^2 + s}{2(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_K + \frac{3(4m_K^2 - s)}{4(m_K^2 - m_\pi^2)}\mu_\eta \\ &\quad - \frac{5m_K^2 + m_\pi^2 - s}{96\pi^2 f_\pi^2} + \frac{2s}{f_\pi^2}L_9^r + \frac{m_\eta^4 - 2m_\eta^2(m_K^2 + s) + (m_K^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s}\bar{J}_{K\eta}(s) \\ &\quad + \frac{m_K^4 - 2m_K^2(m_\pi^2 + s) + (m_\pi^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s}\bar{J}_{\pi K}(s) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}}F_{V^-, K\eta}^{\bar{u}s}(s). \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

$I = 1$ 两介子系统:

$$\begin{aligned} \frac{F_{V^-, \pi\pi}^{\bar{u}d}(s)}{\sqrt{2}} &= 1 - \frac{4}{3}\mu_\pi - \frac{2}{3}\mu_K + \frac{s - 2m_K^2 - 4m_\pi^2}{96\pi^2 f_\pi^2} + \frac{2}{f_\pi^2}L_9^r \\ &\quad + \frac{s - 4m_\pi^2}{6f_\pi^2}J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{s - 4m_K^2}{12f_\pi^2}J_{KK}^r(s) = F_{V^-, K\bar{K}}^{\bar{u}d}(s), \\ F_{V^-, \pi\eta}^{\bar{u}d}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

B.3 张量形状因子

$I = 0$ 两介子系统:

$$\begin{aligned} F_{T, K\bar{K}}^n(s) &= 1 - 7\mu_\pi - \frac{1}{3}\mu_\eta + \frac{s - 6m_K^2}{96\pi^2 f_\pi^2} - \frac{8(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_5^r - 4m_\pi^2\tilde{C}_{34}^r \\ &\quad + 2(m_\pi^2 - 2m_K^2)\tilde{C}_{35}^r - 2(2m_K^2 + m_\pi^2)\tilde{C}_{36}^r + 8(m_K^2 - m_\pi^2)\tilde{C}_{37}^r - 2s\tilde{C}_{88}^r \\ &\quad + 2(s - 2m_K^2)\tilde{C}_{89}^r - 4m_K^2\tilde{C}_{106}^r + 2(s - 2m_K^2)\tilde{C}_{107}^r + \frac{s - 4m_K^2}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s), \\ F_{T, \pi\pi}^n(s) &= 0, \\ F_{T, \eta\eta}^n(s) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

$$\begin{aligned} -\frac{F_{T, K\bar{K}}^{\bar{s}s}(s)}{\sqrt{2}} &= 1 - 4\mu_\pi - 2\mu_K - \frac{4}{3}\mu_\eta + \frac{s - 6m_K^2}{96\pi^2 f_\pi^2} - \frac{8(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2}L_5^r \\ &\quad + 4(m_\pi^2 - 2m_K^2)\tilde{C}_{34}^r - 2m_\pi^2\tilde{C}_{35}^r - 2(2m_K^2 + m_\pi^2)\tilde{C}_{36}^r - 4(m_K^2 - m_\pi^2)\tilde{C}_{37}^r - 2s\tilde{C}_{88}^r \\ &\quad + 2(s - 2m_K^2)\tilde{C}_{89}^r - 4m_K^2\tilde{C}_{106}^r + 2(s - 2m_K^2)\tilde{C}_{107}^r + \frac{s - 4m_K^2}{4f_\pi^2}J_{KK}^r(s), \\ F_{T, \pi\pi}^{\bar{s}s}(s) &= 0, \end{aligned}$$

$$F_{T,\eta\eta}^{\bar{s}s}(s) = 0. \quad (\text{B-9})$$

$I = 1/2$ 两介子系统:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} F_{T,K\pi}^{\bar{u}s}(s) &= 1 + \frac{-20m_K^2 + 16m_\pi^2 + s}{4(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_\pi + \frac{-12m_K^2 + 8m_\pi^2 + s}{2(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_K + \frac{44m_K^2 - 8m_\pi^2 - 9s}{12(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_\eta \\ &\quad - \frac{5m_K^2 + m_\pi^2 - s}{96\pi^2 f_\pi^2} - \frac{4(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} L_5^r - 4m_K^2 \tilde{C}_{34}^r - 2m_\pi^2 \tilde{C}_{35}^r - 2(2m_K^2 + m_\pi^2) \tilde{C}_{36}^r \\ &\quad - 2s \tilde{C}_{88}^r - 2(m_K^2 + m_\pi^2 - s) \tilde{C}_{89}^r - 2(m_K^2 + m_\pi^2) \tilde{C}_{106}^r - 2(m_K^2 + m_\pi^2 - s) \tilde{C}_{107}^r \\ &\quad + \frac{m_\eta^4 - 2m_\eta^2(m_K^2 + s) + (m_K^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s} \bar{J}_{K\eta}(s) \\ &\quad + \frac{m_K^4 - 2m_K^2(m_\pi^2 + s) + (m_\pi^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s} \bar{J}_{\pi K}(s), \\ \sqrt{\frac{2}{3}} F_{T,K\eta}^{\bar{u}s}(s) &= 1 + \frac{-20m_K^2 + 16m_\pi^2 + s}{4(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_\pi + \frac{-12m_K^2 + 8m_\pi^2 + s}{2(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_K + \frac{44m_K^2 - 8m_\pi^2 - 9s}{12(m_K^2 - m_\pi^2)} \mu_\eta \\ &\quad - \frac{5m_K^2 + m_\pi^2 - s}{96\pi^2 f_\pi^2} - \frac{28(m_K^2 - m_\pi^2)}{3f_\pi^2} L_5^r - 4m_K^2 \tilde{C}_{34}^r + \frac{2(m_\pi^2 - 4m_K^2)}{3} \tilde{C}_{35}^r \\ &\quad - 2(2m_K^2 + m_\pi^2) \tilde{C}_{36}^r - 2s \tilde{C}_{88}^r + \frac{2(-7m_K^2 + m_\pi^2 + 3s)}{3} \tilde{C}_{89}^r + \frac{2(m_\pi^2 - 7m_K^2)}{3} \tilde{C}_{106}^r \\ &\quad + \frac{2(-7m_K^2 + m_\pi^2 + 3s)}{3} \tilde{C}_{107}^r + \frac{m_\eta^4 - 2m_\eta^2(m_K^2 + s) + (m_K^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s} \bar{J}_{K\eta}(s) \\ &\quad + \frac{m_K^4 - 2m_K^2(m_\pi^2 + s) + (m_\pi^2 - s)^2}{8f_\pi^2 s} \bar{J}_{\pi K}(s). \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

$I = 1$ 两介子系统:

$$\begin{aligned} -\frac{F_{T,\pi\pi}^{\bar{u}d}(s)}{\sqrt{2}} &= 1 - \frac{13}{3} \mu_\pi - \frac{8}{3} \mu_K - \frac{1}{3} \mu_\eta + \frac{-2m_K^2 - 4m_\pi^2 + s}{96\pi^2 f_\pi^2} - 4m_\pi^2 \tilde{C}_{34}^r - 2m_\pi^2 \tilde{C}_{35}^r \\ &\quad - 2(2m_K^2 + m_\pi^2) \tilde{C}_{36}^r - 2s \tilde{C}_{88}^r + 2(s - 2m_\pi^2) \tilde{C}_{89}^r - 4m_\pi^2 \tilde{C}_{106}^r + 2(s - 2m_\pi^2) \tilde{C}_{107}^r \\ &\quad + \frac{s - 4m_\pi^2}{6f_\pi^2} J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{s - 4m_K^2}{12f_\pi^2} J_{KK}^r(s), \\ -F_{T,K\bar{K}}^{\bar{u}d}(s) &= 1 - \frac{13}{3} \mu_\pi - \frac{8}{3} \mu_K - \frac{1}{3} \mu_\eta + \frac{-2m_K^2 - 4m_\pi^2 + s}{96\pi^2 f_\pi^2} - \frac{8(m_K^2 - m_\pi^2)}{f_\pi^2} L_5^r - 4m_\pi^2 \tilde{C}_{34}^r \\ &\quad + 2(m_\pi^2 - 2m_K^2) \tilde{C}_{35}^r - 2(2m_K^2 + m_\pi^2) \tilde{C}_{36}^r - 2s \tilde{C}_{88}^r + 2(s - 2m_K^2) \tilde{C}_{89}^r - 4m_K^2 \tilde{C}_{106}^r \\ &\quad + 2(s - 2m_K^2) \tilde{C}_{107}^r + \frac{s - 4m_\pi^2}{6f_\pi^2} J_{\pi\pi}^r(s) + \frac{s - 4m_K^2}{12f_\pi^2} J_{KK}^r(s), \\ F_{T,\pi\eta}^{\bar{u}d}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

附录 C 螺旋度振幅方法

第四章第四节给出了半轻衰变 $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ 的衰变宽度计算以及角分布分析，其中用到了螺旋度振幅方法。这里将简要介绍如何用螺旋度振幅方法计算 P-波的贡献，也就是 $D \rightarrow \rho\ell\bar{\nu}$ 过程。对于末态为 S-波的情况，计算方法也是类似的。 $D \rightarrow \rho\ell\bar{\nu}$ 过程的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cd} (\bar{c}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) d) (\bar{\ell}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\ell). \quad (\text{C-1})$$

我们引入一个辅助的矢量粒子 V ，度规张量可以用这一粒子的极化矢量 ϵ_V^μ 表示

$$g_{\mu\nu} = - \sum_{\lambda_t} \epsilon_\mu(\lambda_t) \epsilon_\nu^*(\lambda_t) + \epsilon_\mu(t) \epsilon_\nu^*(t), \quad \epsilon_\mu(t) = \frac{q_\mu}{\sqrt{q^2}}, \quad (\text{C-2})$$

其中 $\lambda_t = 0, \pm 1$ 表示横向和纵向极化， t 表示类时极化。总衰变振幅可以被分离为强子部分和轻子部分，它们都是洛伦兹不变量，可以在特定的参考系中独立计算。

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \bar{\ell}\bar{\nu} | \mathcal{H}_{eff} | \bar{D} \rangle \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cd} \langle \rho | \bar{c}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) d | \bar{D} \rangle \langle \bar{\ell}\bar{\nu} | \bar{\ell}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\ell | 0 \rangle \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cd} H^\mu L^\nu g_{\mu\nu} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cd} \left(H^\mu \epsilon_{V\mu}^*(t) \times L^\nu \epsilon_{V\nu}(t) - \sum_{\lambda_t} H^\mu \epsilon_{V\mu}^*(\lambda_t) \times L^\nu \epsilon_{V\nu}(\lambda_t) \right), \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

其中强子部分和轻子部分定义为

$$\langle \rho | \bar{c}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) d | \bar{D} \rangle \equiv H_\mu, \quad \langle \bar{\ell}\bar{\nu} | \bar{\ell}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\ell | 0 \rangle \equiv L^\mu, \quad (\text{C-4})$$

C.1 强子部分振幅

强子部分的洛伦兹不变振幅为

$$H^\mu \epsilon_{V\mu}^*(\lambda) = \langle \rho | \bar{c}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) d | \bar{D} \rangle \epsilon_{V\mu}^*(\lambda) \quad (\text{C-5})$$

在 \bar{D} 的静止系中，假定矢量粒子 V 的运动方向沿 z 轴正方向，而 ρ 介子运动方向沿 z 轴负方向，它们的动量和极化矢量表示为

$$q^\mu = P_V^\mu = (E_V, 0, 0, |\vec{p}_V|), \quad \epsilon_V^\mu(0) = \frac{1}{\sqrt{q^2}} (|\vec{p}_V|, 0, 0, E_V),$$

$$\epsilon_V^\mu(\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0), \quad \epsilon_V^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{q^2}}(E_V, 0, 0, |\vec{p}_V|), \quad (\text{C-6})$$

$$P_\rho^\mu = (E_\rho, 0, 0, -|\vec{p}_V|), \quad \epsilon_\rho^\mu(0) = \frac{1}{m_\rho}(|\vec{p}_V|, 0, 0, -E_\rho),$$

$$\epsilon_\rho^\mu(\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, i, 0), \quad (\text{C-7})$$

另外有 $\epsilon_\rho^\mu(t) = 0$ 。根据末态粒子的不同极化组合，我们可以定义螺旋度振幅

$$\mathcal{A}(\lambda\lambda') = \epsilon_{V\mu}^*(\lambda) \langle \rho(P_\rho, \epsilon_\rho^*(\lambda')) | \bar{c}\gamma^\mu(1 - \gamma_5) d | \bar{D}(P_D) \rangle, \quad (\text{C-8})$$

其中 $\lambda, \lambda' = 0, \pm 1, t$ 分别是矢量粒子 V 和 ρ 介子的螺旋度，根据自旋守恒条件，它们满足 $\lambda = \lambda'$ 。根据形状因子的定义 (4-41)，螺旋度振幅用形状因子表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda\lambda') = & -\frac{2V}{m_{\bar{D}} + m_\rho} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{V\mu}^* \epsilon_{\rho\nu}^* (P_{\bar{D}})_\rho (P_\rho)_\sigma \\ & - 2im_\rho A_0 \frac{(\epsilon_\rho^* \cdot q)(\epsilon_V^* \cdot q)}{q^2} - i(m_{\bar{D}} + m_\rho) A_1 \left[\epsilon_\rho^* \cdot \epsilon_V^* - \frac{(\epsilon_\rho^* \cdot q)(\epsilon_V^* \cdot q)}{q^2} \right] \\ & + iA_2 \frac{\epsilon_\rho^* \cdot q}{m_{\bar{D}} + m_\rho} \left[(P_{\bar{D}} + P_\rho) \cdot \epsilon_V^* - \frac{m_{\bar{D}}^2 - m_\rho^2}{q^2} \epsilon_V^* \cdot q \right], \end{aligned} \quad (\text{C-9})$$

非零的强子部分螺旋度振幅为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(00) &= -i \frac{1}{2m_\rho \sqrt{q^2}} \left[(m_{\bar{D}}^2 - m_\rho^2 - q^2)(m_{\bar{D}} + m_\rho) A_1 - \frac{\lambda}{m_{\bar{D}} + m_\rho} A_2 \right], \\ \mathcal{A}(++) &= i \left[-V \frac{\sqrt{\lambda}}{m_{\bar{D}} + m_\rho} + (m_{\bar{D}} + m_\rho) A_1 \right], \\ \mathcal{A}(--) &= i \left[V \frac{\sqrt{\lambda}}{m_{\bar{D}} + m_\rho} + (m_{\bar{D}} + m_\rho) A_1 \right], \\ \mathcal{A}(t0) &= -i \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{q^2}} A_0, \end{aligned} \quad (\text{C-10})$$

$$\lambda = \left[m_{\bar{D}}^2 - (\sqrt{q^2} + m_\rho)^2 \right] \left[m_{\bar{D}}^2 - (\sqrt{q^2} - m_\rho)^2 \right]. \quad (\text{C-11})$$

这些螺旋度振幅对应于公式 (4-64) 中一般末态自旋的结果，两者相差一个 CG 系数。

C.2 轻子部分振幅

轻子部分的洛伦兹不变振幅为

$$L^\mu \epsilon_{V\mu}(\lambda) = \langle l\bar{\nu} | \bar{l}\gamma^\mu(1 - \gamma_5) \nu_l | 0 \rangle \epsilon_{V\mu}(\lambda) = \bar{l}\not{\epsilon}_V(\lambda)(1 - \gamma_5) \nu_l. \quad (\text{C-12})$$

旋量定义为

$$u(\vec{p}, 1) = N_p \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \phi^1 \end{pmatrix}, \quad u(\vec{p}, 2) = N_p \begin{pmatrix} \phi^2 \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C-13})$$

反粒子旋量定义为 $v(\vec{p}, s) = -i\gamma^2(u(\vec{p}, s))^*$, 其中归一化系数为 $N_p = \sqrt{E+m}$, 两分量旋量为

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} e^{-i\phi/2}, \quad \phi^2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} e^{i\phi/2}. \quad (\text{C-14})$$

非零的轻子部分螺旋度振幅为

$$\begin{aligned} \bar{u}(1)\not{\epsilon}_V(0)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) \cos \theta_l \sqrt{q^2 - m_l^2} \frac{2m_l}{\sqrt{q^2}}, \\ \bar{u}(1)\not{\epsilon}_V(+)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) (-e^{i\phi}) \sin \theta_l \sqrt{q^2 - m_l^2} \frac{\sqrt{2}m_l}{\sqrt{q^2}}, \\ \bar{u}(1)\not{\epsilon}_V(-)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) e^{-i\phi} \sin \theta_l \sqrt{q^2 - m_l^2} \frac{\sqrt{2}m_l}{\sqrt{q^2}}, \\ \bar{u}(1)\not{\epsilon}_V(t)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) \sqrt{q^2 - m_l^2} \frac{2m_l}{\sqrt{q^2}}, \\ \bar{u}(2)\not{\epsilon}_V(0)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) (-2\sin \theta_l) \sqrt{q^2 - m_l^2}, \\ \bar{u}(2)\not{\epsilon}_V(+)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) \sqrt{2} e^{i\phi} (1 - \cos \theta_l) \sqrt{q^2 - m_l^2}, \\ \bar{u}(2)\not{\epsilon}_V(-)(1-\gamma_5)v(1) &= (\pm i) \sqrt{2} e^{i\phi} (1 + \cos \theta_l) \sqrt{q^2 - m_l^2}, \\ \bar{u}(2)\not{\epsilon}_V(t)(1-\gamma_5)v(1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C-15})$$

对末态自旋求和就能得到总衰变振幅, 见第四章第三节。

参考文献

- [1] Hagiwara K, et al. Review of Particle Physics. Particle Data Group[J]. Phys. Rev., 2002, D66: 010001.
- [2] Olive K A, et al. Review of Particle Physics[J]. Chin. Phys., 2014, C38: 090001.
- [3] Beneke M, Buchalla G, Neubert M, et al. QCD factorization for $B \rightarrow \pi\pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 1914-1917.
- [4] Bauer C W, Fleming S, Luke M E. Summing Sudakov logarithms in $B \rightarrow X(s\gamma)$ in effective field theory[J]. Phys. Rev., 2000, D63: 014006.
- [5] Bauer C W, Fleming S, Pirjol D, et al. An Effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays[J]. Phys. Rev., 2001, D63: 114020.
- [6] Beneke M, Feldmann T. Factorization of heavy to light form-factors in soft collinear effective theory[J]. Nucl. Phys., 2004, B685: 249-296.
- [7] Keum Y Y, Li H n, Sanda A I. Fat penguins and imaginary penguins in perturbative QCD[J]. Phys. Lett., 2001, B504: 6-14.
- [8] Keum Y Y, Li H N, Sanda A I. Penguin enhancement and $B \rightarrow K\pi$ decays in perturbative QCD[J]. Phys. Rev., 2001, D63: 054008.
- [9] Lu C D, Ukai K, Yang M Z. Branching ratio and CP violation of $B \rightarrow \pi\pi$ decays in perturbative QCD approach[J]. Phys. Rev., 2001, D63: 074009.
- [10] Lu C D, Yang M Z. $B \rightarrow \pi\rho, \pi\omega$ decays in perturbative QCD approach[J]. Eur. Phys. J., 2002, C23: 275-287.
- [11] Kurimoto T, Li H n, Sanda A I. Leading power contributions to $B \rightarrow \pi, \rho$ transition form-factors[J]. Phys. Rev., 2002, D65: 014007.
- [12] Shifman M A, Vainshtein A I, Zakharov V I. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations[J]. Nucl. Phys., 1979, B147: 385-447.
- [13] Colangelo P, Khodjamirian A. QCD sum rules, a modern perspective[J]., 2000: 1495-1576.

- [14] Scherer S, Schindler M R. A Primer for Chiral Perturbation Theory[M]. [S.l.]: Springer, 2012.
- [15] C. Vafa, E. Witten. Restrictions On Symmetry Breaking In Vector-Like Gauge Theories[J]. Nucl. Phys., 1984, B234: 173.
- [16] S. Coleman. [J]. J. Math. Phys., 1966, 7: 787.
- [17] He X G, Shi Y J, Wang W. Unification of Flavor SU(3) Analyses of Heavy Hadron Weak Decays[J]., 2018.
- [18] Savage M J, Wise M B. SU(3) Predictions for Nonleptonic B Meson Decays[J]. Phys. Rev., 1989, D39: 3346.
- [19] Deshpande N G, He X G. CP asymmetry relations between $\bar{B}^0 \rightarrow \pi\pi$ and $\bar{B}^0 \rightarrow \pi K$ rates[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 75: 1703-1706.
- [20] He X G. SU(3) analysis of annihilation contributions and CP violating relations in $B \rightarrow PP$ decays[J]. Eur. Phys. J., 1999, C9: 443-448.
- [21] He X G, Hsiao Y K, Shi J Q, et al. The CP violating phase γ from global fit of rare charmless hadronic B decays[J]. Phys. Rev., 2001, D64: 034002.
- [22] Hsiao Y K, Chang C F, He X G. A global $SU(3)/U(3)$ flavor symmetry analysis for $B \rightarrow PP$ with $\eta - \eta'$ Mixing[J]. Phys. Rev., 2016, D93(11): 114002.
- [23] Chau L L, Cheng H Y. Quark Diagram Analysis of Two-body Charm Decays[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 56: 1655-1658.
- [24] Chau L L, Cheng H Y. Analysis of Exclusive Two-Body Decays of Charm Mesons Using the Quark Diagram Scheme[J]. Phys. Rev., 1987, D36: 137.
- [25] Chau L L, Cheng H Y, Sze W K, et al. Charmless nonleptonic rare decays of B mesons[J]. Phys. Rev., 1991, D43: 2176-2192.
- [26] Gronau M, Hernandez O F, London D, et al. Decays of B mesons to two light pseudoscalars[J]. Phys. Rev., 1994, D50: 4529-4543.
- [27] Gronau M, Hernandez O F, London D, et al. Broken SU(3) symmetry in two-body B decays[J]. Phys. Rev., 1995, D52: 6356-6373.
- [28] Cheng H Y, Chiang C W, Kuo A L. Updating $B \rightarrow PP, VP$ decays in the framework of flavor symmetry[J]. Phys. Rev., 2015, D91(1): 014011.

- [29] Buchalla G, Buras A J, Lautenbacher M E. Weak decays beyond leading logarithms[J]. Rev. Mod. Phys., 1996, 68: 1125-1144.
- [30] Ciuchini M, Franco E, Martinelli G, et al. The $\Delta S = 1$ effective Hamiltonian including next-to-leading order QCD and QED corrections[J]. Nucl. Phys., 1994, B415: 403-462.
- [31] Deshpande N G, He X G. Gluonic penguin B decays in Standard and two Higgs doublet Models[J]. Phys. Lett., 1994, B336: 471-476.
- [32] S. Weinberg. Phenomenological Lagrangians[J]. Physica, 1979, A96: 327.
- [33] Gasser J, Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory to One Loop[J]. Annals Phys., 1984, 158: 142.
- [34] Bijmans J, Colangelo G, Gasser J. $K(14)$ decays beyond one loop[J]. Nucl. Phys., 1994, B427: 427-454.
- [35] Bijmans J, Ecker G. Mesonic low-energy constants[J]. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 2014, 64: 149-174.
- [36] Gomez Nicola A, Pelaez J R. Meson meson scattering within one loop chiral perturbation theory and its unitarization[J]. Phys. Rev., 2002, D65: 054009.
- [37] Cata O, Mateu V. Chiral perturbation theory with tensor sources[J]. JHEP, 2007, 09: 078.
- [38] Jiang S Z, Wang Q, Zhang Y. Computation of the p^6 order low-energy constants with tensor sources[J]. Phys. Rev., 2013, D87(9): 094014.
- [39] Dobbs S, et al. First Measurement of the Form Factors in the Decays $D^0 \rightarrow \rho^- e^+ \nu_e$ and $D^+ \rightarrow \rho^0 e^+ \nu_e$ [J]. Phys. Rev. Lett., 2013, 110(13): 131802.
- [40] Lu C D, Wang W. Analysis of $B \rightarrow K_J^*(\rightarrow K\pi)\mu^+\mu^-$ in the higher kaon resonance region[J]. Phys. Rev., 2012, D85: 034014.
- [41] Dey B. Angular analyses of exclusive $\bar{B} \rightarrow X\ell_1\ell_2$ with complex helicity amplitudes[J]. Phys. Rev., 2015, D92: 033013.
- [42] Gratx J, Hopfer M, Zwicky R. Generalised helicity formalism, higher moments and the $B \rightarrow K_{JK}(\rightarrow K\pi)\bar{\ell}_1\ell_2$ angular distributions[J]. Phys. Rev., 2016, D93(5): 054008.

- [43] Becirevic D, Tayduganov A. Impact of $B \rightarrow K_0^* \ell^+ \ell^-$ on the New Physics search in $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$ decay[J]. Nucl. Phys., 2013, B868: 368-382.
- [44] Matias J. On the S-wave pollution of $B \rightarrow K^* l^+ l^-$ observables[J]. Phys. Rev., 2012, D86: 094024.
- [45] Blake T, Egede U, Shires A. The effect of S-wave interference on the $B^0 \rightarrow K^{*0} \ell^+ \ell^-$ angular observables[J]. JHEP, 2013, 03: 027.
- [46] Meissner U G, Wang W. Generalized Heavy-to-Light Form Factors in Light-Cone Sum Rules[J]. Phys. Lett., 2014, B730: 336-341.
- [47] Das D, Hiller G, Jung M, et al. The $\bar{B} \rightarrow \bar{K} \pi \ell \ell$ and $\bar{B}_s \rightarrow \bar{K} K \ell \ell$ distributions at low hadronic recoil[J]. JHEP, 2014, 09: 109.
- [48] Hofer L, Matias J. Exploiting the symmetries of P and S wave for $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$ [J]. JHEP, 2015, 09: 104.
- [49] Yelton J, et al. Absolute Branching Fraction Measurements for Exclusive D(s) Semileptonic Decays[J]. Phys. Rev., 2009, D80: 052007.
- [50] Ecklund K M, et al. Study of the semileptonic decay $D_s^+ \rightarrow f_0(980) e^+ \nu$ and implications for $B_s \rightarrow J/\psi f_0$ [J]. Phys. Rev., 2009, D80: 052009.
- [51] Hietala J, Cronin-Hennessy D, Pedlar T, et al. Exclusive D_s semileptonic branching fraction measurements[J]. Phys. Rev., 2015, D92(1): 012009.
- [52] Colangelo P, De Fazio F, Wang W. $B_s \rightarrow f_0(980)$ form factors and B_s decays into $f_0(980)$ [J]. Phys. Rev., 2010, D81: 074001.
- [53] Patrignani C, et al. Review of Particle Physics[J]. Chin. Phys., 2016, C40(10): 100001.
- [54] De Fazio F, Pennington M R. Probing the structure of $f_0(980)$ through radiative ϕ decays[J]. Phys. Lett., 2001, B521: 15-21.
- [55] Weinberg S. The Quantum Theory of Fields. Volume 1: Foundations.[M]. [S.l.]: Cambridge, 1995.
- [56] Döring M, Meissner U G, Wang W. Chiral Dynamics and S-wave Contributions in Semileptonic B decays[J]. JHEP, 2013, 10: 011.
- [57] Shi Y J, Wang W. Chiral Dynamics and S-wave contributions in Semileptonic D_s/B_s decays into $\pi^+ \pi^-$ [J]. Phys. Rev., 2015, D92(7): 074038.

- [58] Cheng H Y, Chua C K, Yang K C. Charmless hadronic B decays involving scalar mesons: Implications to the nature of light scalar mesons[J]. Phys. Rev., 2006, D73: 014017.
- [59] Gasser J, Meissner U G. Chiral expansion of pion form-factors beyond one loop[J]. Nucl. Phys., 1991, B357: 90-128.
- [60] Meissner U G, Oller J A. $J/\psi \rightarrow \phi\pi\pi(K\bar{K})$ decays, chiral dynamics and OZI violation[J]. Nucl. Phys., 2001, A679: 671-697.
- [61] Bijnens J, Talavera P. $K(13)$ decays in chiral perturbation theory[J]. Nucl. Phys., 2003, B669: 341-362.
- [62] Lahde T A, Meissner U G. Improved Analysis of J/ψ Decays into a Vector Meson and Two Pseudoscalars[J]. Phys. Rev., 2006, D74: 034021.
- [63] Guo Z H, Oller J A, Ruiz de Elvira J. Chiral dynamics in form factors, spectral-function sum rules, meson-meson scattering and semi-local duality[J]. Phys. Rev., 2012, D86: 054006.
- [64] Gasser J, Leutwyler H. Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark[J]. Nucl. Phys., 1985, B250: 465-516.
- [65] Gasser J, Leutwyler H. Low-Energy Expansion of Meson Form-Factors[J]. Nucl. Phys., 1985, B250: 517-538.
- [66] Donoghue J F, Gasser J, Leutwyler H. The Decay of a Light Higgs Boson[J]. Nucl. Phys., 1990, B343: 341-368.
- [67] Oller J A, Oset E, Pelaez J R. Meson meson interaction in a nonperturbative chiral approach[J]. Phys. Rev., 1999, D59: 074001.
- [68] Oller J A, Oset E. Chiral symmetry amplitudes in the S wave isoscalar and isovector channels and the σ , $f_0(980)$, $a_0(980)$ scalar mesons[J]. Nucl. Phys., 1997, A620: 438-456.
- [69] Cheng H Y, Chua C K, Hwang C W. Covariant light front approach for s wave and p wave mesons: Its application to decay constants and form-factors[J]. Phys. Rev., 2004, D69: 074025.
- [70] Wu Y L, Zhong M, Zuo Y B. $B_s, D_s \rightarrow \pi, K, \eta, \rho, K^*, \omega, \phi$ Transition Form Factors and Decay Rates with Extraction of the CKM parameters $|V_{ub}|$, $|V_{cs}|$, $|V_{cd}|$ [J]. Int. J. Mod. Phys., 2006, A21: 6125-6172.

- [71] Diehl M, Gousset T, Pire B, et al. Probing partonic structure in $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi\pi$ near threshold[J]. Phys. Rev. Lett., 1998, 81: 1782-1785.
- [72] Polyakov M V. Hard exclusive electroproduction of two pions and their resonances[J]. Nucl. Phys., 1999, B555: 231.
- [73] Kivel N, Mankiewicz L, Polyakov M V. NLO corrections and contribution of a tensor gluon operator to the process $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi\pi$ [J]. Phys. Lett., 1999, B467: 263-270.
- [74] Diehl M. Generalized parton distributions[J]. Phys. Rept., 2003, 388: 41-277.
- [75] Braun V M, Korchemsky G P, Mueller D. The Uses of conformal symmetry in QCD[J]. Prog. Part. Nucl. Phys., 2003, 51: 311-398.
- [76] Aaij R, et al. Analysis of the resonant components in $B + 0 \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ [J]. Phys. Rev., 2013, D87(5): 052001.
- [77] Aaij R, et al. Measurement of resonant and CP components in $\bar{B}_s^0 \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ decays[J]. Phys. Rev., 2014, D89(9): 092006.
- [78] Flatte S M. Coupled - Channel Analysis of the $\pi \eta$ and $K \bar{K}$ Systems Near $K \bar{K}$ Threshold[J]. Phys. Lett., 1976, 63B: 224-227.
- [79] Flatte S M. On the Nature of 0^+ Mesons[J]. Phys. Lett., 1976, 63B: 228-230.
- [80] Watson K M. The Effect of final state interactions on reaction cross-sections[J]. Phys. Rev., 1952, 88: 1163-1171.
- [81] Aoki S, et al. Review of lattice results concerning low-energy particle physics[J]. Eur. Phys. J., 2014, C74: 2890.
- [82] Del Amo Sanchez P, et al. Analysis of the $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ e^+ \nu_e$ decay channel[J]. Phys. Rev., 2011, D83: 072001.
- [83] Meißner U G, Wang W. $B_s \rightarrow K^{(*)} \ell \bar{\nu}$, Angular Analysis, S-wave Contributions and $|V_{ub}|$ [J]. JHEP, 2014, 01: 107.
- [84] Ablikim M, et al. Observation of $D^+ \rightarrow f_0(500)e^+\nu_e$ and Improved Measurements of $D \rightarrow \rho e^+\nu_e$ [J]. Phys. Rev. Lett., 2019, 122(6): 062001.
- [85] Aaij R, et al. Study of the rare B_s^0 and B^0 decays into the $\pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ final state[J]. Phys. Lett., 2015, B743: 46-55.

- [86] Inami T, Lim C S. Effects of Superheavy Quarks and Leptons in Low-Energy Weak Processes $k_L \rightarrow \mu\bar{\mu}, K^+ \rightarrow \pi^+\nu$ anti-neutrino and $K^0 \leftrightarrow$ anti- K^0 [J]. Prog. Theor. Phys., 1981, 65: 297.
- [87] Buchalla G, Buras A J. QCD corrections to rare K and B decays for arbitrary top quark mass[J]. Nucl. Phys., 1993, B400: 225-239.
- [88] Buchalla G, Buras A J. The rare decays $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}, B \rightarrow X\nu\bar{\nu}$ and $B \rightarrow l^+l^-$: An Update[J]. Nucl. Phys., 1999, B548: 309-327.
- [89] Misiak M, Urban J. QCD corrections to FCNC decays mediated by Z penguins and W boxes[J]. Phys. Lett., 1999, B451: 161-169.
- [90] Mattson M, et al. First Observation of the Doubly Charmed Baryon Ξ_{cc}^+ [J]. Phys. Rev. Lett., 2002, 89: 112001.
- [91] Ocherashvili A, et al. Confirmation of the double charm baryon $Xi_{cc}^+(3520)$ via its decay to pD^+K^- [J]. Phys. Lett., 2005, B628: 18-24.
- [92] Kato Y, et al. Search for doubly charmed baryons and study of charmed strange baryons at Belle[J]. Phys. Rev., 2014, D89(5): 052003.
- [93] Aaij R, et al. Search for the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^+ [J]. JHEP, 2013, 12: 090.
- [94] Aubert B, et al. Search for doubly charmed baryons Ξ_{cc}^+ and Ξ_{cc}^{++} in BABAR[J]. Phys. Rev., 2006, D74: 011103.
- [95] Ratti S P. New results on c-baryons and a search for cc-baryons in FOCUS[J]. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 2003, 115: 33-36.
- [96] Aaij R, et al. Observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++} [J]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(11): 112001.
- [97] Wang W, Yu F S, Zhao Z X. Weak decays of doubly heavy baryons: the $1/2 \rightarrow 1/2$ case[J]. Eur. Phys. J., 2017, C77(11): 781.
- [98] Meng L, Li N, Zhu S l. Possible hadronic molecules composed of the doubly charmed baryon and nucleon[J]. Eur. Phys. J., 2018, A54(9): 143.
- [99] Wang W, Xing Z P, Xu J. Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: SU(3) Analysis[J]. Eur. Phys. J., 2017, C77(11): 800.
- [100] Gutsche T, Ivanov M A, Körner J G, et al. Decay chain information on the newly discovered double charm baryon state Ξ_{cc}^{++} [J]. Phys. Rev., 2017, D96(5): 054013.

- [101] Li H S, Meng L, Liu Z W, et al. Radiative decays of the doubly charmed baryons in chiral perturbation theory[J]. Phys. Lett., 2018, B777: 169-176.
- [102] Guo Z H. Prediction of exotic doubly charmed baryons within chiral effective field theory[J]. Phys. Rev., 2017, D96(7): 074004.
- [103] Xiao L Y, Wang K L, Lu Q f, et al. Strong and radiative decays of the doubly charmed baryons[J]. Phys. Rev., 2017, D96(9): 094005.
- [104] Sharma N, Dhir R. Estimates of W-exchange contributions to Ξ_{cc} decays[J]. Phys. Rev., 2017, D96(11): 113006.
- [105] Ma Y L, Harada M. Chiral partner structure of doubly heavy baryons with heavy quark spin-flavor symmetry[J]. J. Phys., 2018, G45(7): 075006.
- [106] Hu X H, Shen Y L, Wang W, et al. Weak decays of doubly heavy baryons: "decay constants"[J]. Chin. Phys., 2018, C42(12): 123102.
- [107] Shi Y J, Wang W, Xing Y, et al. Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: Multi-body Decay Channels[J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(1): 56.
- [108] Yao X, Müller B. Doubly charmed baryon production in heavy ion collisions[J]. Phys. Rev., 2018, D97(7): 074003.
- [109] Yao D L. Masses and sigma terms of doubly charmed baryons up to $\mathcal{O}(p^4)$ in manifestly Lorentz-invariant baryon chiral perturbation theory[J]. Phys. Rev., 2018, D97(3): 034012.
- [110] Özdem U. Magnetic moments of doubly heavy baryons in light-cone QCD[J]. J. Phys., 2019, G46: 035003.
- [111] Ali A, Parkhomenko A Y, Qin Q, et al. Prospects of discovering stable double-heavy tetraquarks at a Tera-Z factory[J]. Phys. Lett., 2018, B782: 412-420.
- [112] Dias J M, Debastiani V R, Xie J J, et al. Doubly charmed Ξ_{cc} molecular states from meson-baryon interaction[J]. Phys. Rev., 2018, D98(9): 094017.
- [113] Zhao Z X. Weak decays of doubly heavy baryons: the $1/2 \rightarrow 3/2$ case[J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(9): 756.
- [114] Wang Z G. Analysis of the doubly heavy baryon states and pentaquark states with QCD sum rules[J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(10): 826.

-
- [115] Xing Y, Zhu R. Weak Decays of Stable Doubly Heavy Tetraquark States[J]. Phys. Rev., 2018, D98(5): 053005.
- [116] Ali A, Qin Q, Wang W. Discovery potential of stable and near-threshold doubly heavy tetraquarks at the LHC[J]. Phys. Lett., 2018, B785: 605-609.
- [117] Liu M Z, Xiao Y, Geng L S. Magnetic moments of the spin-1/2 doubly charmed baryons in covariant baryon chiral perturbation theory[J]. Phys. Rev., 2018, D98(1): 014040.
- [118] Xing Z P, Zhao Z X. Weak decays of doubly heavy baryons: the FCNC processes[J]. Phys. Rev., 2018, D98(5): 056002.
- [119] Aaij R, et al. Physics case for an LHCb Upgrade II - Opportunities in flavour physics, and beyond, in the HL-LHC era[J]., 2018.
- [120] Wang W, Zhu R L. Interpretation of the newly observed Ω_c^0 resonances[J]. Phys. Rev., 2017, D96(1): 014024.
- [121] Dhir R, Sharma N. Weak decays of doubly heavy charm Ω_{cc}^+ baryon[J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(9): 743.
- [122] Berezhnoy A V, Likhoded A K, Luchinsky A V. Doubly heavy baryons at the LHC[J]. Phys. Rev., 2018, D98(11): 113004.
- [123] Jiang L J, He B, Li R H. Weak decays of doubly heavy baryons: $\mathcal{B}_{cc} \rightarrow \mathcal{B}_c V$ [J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(11): 961.
- [124] Zhang Q A. Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: W-Exchange[J]. Eur. Phys. J., 2018, C78(12): 1024.
- [125] Li G, Wang X F, Xing Y. SU(3) analysis of weak decays of doubly-heavy tetraquarks $b\bar{c}q\bar{q}$ [J]. Eur. Phys. J., 2019, C79(3): 210.
- [126] Gutsche T, Ivanov M A, Körner J G, et al. Ab initio three-loop calculation of the W-exchange contribution to nonleptonic decays of double charm baryons[J]., 2018.
- [127] Yu F S, Jiang H Y, Li R H, et al. Discovery Potentials of Doubly Charmed Baryons[J]. Chin. Phys., 2018, C42(5): 051001.
- [128] Ball P, Braun V M, Gardi E. Distribution Amplitudes of the Λ_b Baryon in QCD[J]. Phys. Lett., 2008, B665: 197-204.

- [129] Shi Y J, Wang W, Zhao Z X. QCD Sum Rules Analysis of Weak Decays of Doubly-Heavy Baryons[J], 2019.
- [130] Karliner M, Rosner J L. Baryons with two heavy quarks: Masses, production, decays, and detection[J]. Phys. Rev., 2014, D90(9): 094007.
- [131] Shah Z, Thakkar K, Rai A K. Excited State Mass spectra of doubly heavy baryons Ω_{cc} , Ω_{bb} and Ω_{bc} [J]. Eur. Phys. J., 2016, C76(10): 530.
- [132] Shah Z, Rai A K. Excited state mass spectra of doubly heavy Ξ baryons[J]. Eur. Phys. J., 2017, C77(2): 129.
- [133] Kiselev V V, Likhoded A K. Baryons with two heavy quarks[J]. Phys. Usp., 2002, 45: 455-506.
- [134] Aaij R, et al. Observation of the doubly charmed baryon Ξ_{cc}^{++} [J]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(11): 112001.
- [135] Brown Z S, Detmold W, Meinel S, et al. Charmed bottom baryon spectroscopy from lattice QCD[J]. Phys. Rev., 2014, D90(9): 094507.
- [136] Wang Y M, Shen Y L, Lu C D. $\Lambda_b \rightarrow p, \Lambda$ transition form factors from QCD light-cone sum rules[J]. Phys. Rev., 2009, D80: 074012.
- [137] Perez-Marcial R, Huerta R, Garcia A, et al. Predictions for Semileptonic Decays of Charm Baryons. 2. Nonrelativistic and MIT Bag Quark Models[J]. Phys. Rev., 1989, D40: 2955.
- [138] Tanabashi M, et al. Review of Particle Physics[J]. Phys. Rev., 2018, D98(3): 030001.
- [139] Albertus C, Hernandez E, Nieves J. Semileptonic Decays of Spin-1/2 Doubly Charmed Baryons[J]. PoS, 2012, QNP2012: 073.
- [140] Zhao Z X. Weak decays of heavy baryons in the light-front approach[J]. Chin. Phys., 2018, C42(9): 093101.
- [141] Gutsche T, Ivanov M A, Körner J G, et al. Heavy-to-light semileptonic decays of Λ_b and Λ_c baryons in the covariant confined quark model[J]. Phys. Rev., 2014, D90(11): 114033.

致 谢

时光飞逝，五年的博士生涯已经走向尾声。仔细想来，这已经是我在交大生活的第九个年头了。九年前当我如愿考入交大物理系时，正怀揣着在同龄人中为数不多的梦想：成为一名理论物理学家。

然而这一梦想曾经也不是那么的坚定，本科时当我认真学习每一门理论课程，完成每一道无论有多难的习题，从图书馆借了一本又一本物理书时，周围许多人确做着完全不同的事情。由于物理系鼓励本科生参与科研，于是许多人纷纷进入实验室参与最前沿的研究。我感到很诧异，心想如果我们连四大力学都没学完，也就是连二十世纪初的物理学知识都没掌握，那又如何做二十一世纪最前沿的研究？记得大二结束时，我花了一个暑假的时间在图书馆仔细研读梁灿彬老师写的《微分几何入门和广义相对论》以及曾谨严老师写的《量子力学》，然而我的一位好友却参加了一个科研项目，乐此不疲地研究着如何让图钉飘浮在水面上。看着周围参与科研的同学不是在网上采购实验材料，就是坐在电脑屏幕前写代码，我仿佛意识到或许这才是现在的物理学研究趋势，物理理论已不再重要，实验和技术才是当今物理研究的全部。带着这样的认识，我如过江之鲫一般涌入了实验的洪流当中。

当时我加入了可以说是整个物理系中最重要的实验组，其研究目标是揭开当前物理学中最大的一朵乌云。其中我参与了探测器的设计，也做过一些数据分析，但是日复一日地焊接电极，拧着大小不一的螺丝螺帽，画着一幅幅五颜六色的分布图，所有这些都让我感到枯燥乏味。实验室里有着动辄就上千上万的进口仪器设备，什么都是最顶级的，唯独没有物理。我承认实验物理就是这样的，要研究物理就要尊重实验，实验没有错，但是我的选择错了。终于我义无反顾地离开了实验组，重新选择了理论物理，并且选择的是理论粒子物理，我想要理解这个世界最本质的规律。物理学的确是一门实验科学，但它之所以能区别于其他学科并立于所有自然科学的顶点，是因为物理学的真正核心不在于发现，而在于理解。无论我们发现什么，无论我们的发现有多么实用，如果不能从根本上去理解它就没有任何意义。

如今我即将完成五年的博士生涯，正朝着我最初的梦想迈出第一步。我真的非常感谢我的导师王伟老师对我的悉心指导。王老师不仅在学术上严格锻炼我们的理论功底，也非常重视对于我们的表达能力以及论文写作水平的培养。我要感谢何小刚老师和郭奉坤老师，与他们的合作使我对物理问题有了更深入的理解。与何老师共同对 $SU(3)$ 对称性的研究使我认识到 $SU(3)$ 分析方法和拓扑图方法的等价性；在与郭老师一起计算介子形状因子的过程中我学到了许多强子物理中的非微扰方法，而且郭老师

的 Fortran 真的很厉害，在拟合低能系数的时候他在算法上为我提供了很多帮助和建议。此外，我很感谢王玉明老师，王玉明老师的理论功底深厚，尤其是对量子色动力学的理解非常深刻，我曾向他请教了许多在 QCD 求和规则的计算中遇到的问题，无论是多棘手的问题他都能给出一个令人信服的答案。我还要感谢何红建老师，他开设的规范场论课程使我受益匪浅，课程内容涉及了规范场论中许多极其深刻的理论思想，其中用 BRST 对非阿贝尔规范场可重整化的证明令人惊叹。

我要感谢同门的赵振兴师兄和邢晔师兄，与他们的合作和讨论使我受益良多。赵振兴师兄强大的 Mathematica 数值计算能力着实令人钦佩，在与他的合作中他总是主动承担最复杂部分的计算，没有赵振兴师兄许多工作单靠我的一己之力是根本无法完成的。邢晔师兄十分乐于助人，许多时候虽然他没有和我做同一个研究工作，但每当我把自己遇到的问题告诉他，他总是会努力地和我一起寻找答案。我还要感谢徐吉和赵帅学长，他们都是微扰量子色动力学的专家，由于我在微扰计算领域涉足不多，每当我遇到圈图计算中无法解决的发散问题我都会向他们请教。我还要感谢成千业学长，在他的指导下我学会了手征微扰理论，在与他的合作当中我学到了许多基于么正性的非微扰场论方法。当然我也不会忘记感谢胡晓会师姐（妹）以及邢志鹏师弟，他们给办公室带来了许多欢乐。也多亏了胡晓会，大家的一日三餐才能够时不时地挣脱一餐的桎梏。

另外，我也必须要感谢我的好友何沛伦以及何敏。在博士期间我们组成了一个讨论小组，每周都有一个晚上，我们三个会聚在一起讨论某个理论专题。我们从庞加莱群聊到了超对称，从爱因斯坦场方程聊到了量子引力，从弦论聊到了全息。尽管每一个讨论专题在理论物理中都是如此的艰深以至于我们只能触及皮毛，在不断的探讨和思索当中我们仍然能够领略到理论物理中最美妙的东西。

我非常感谢我的隔壁室友李光宇，感谢他对我在他寝室里“为非作歹”的无限制容忍，更感谢他曾帮助我度过博士期间最为黑暗无助的日子。我也十分感谢我的高中同学兼好友：许一鸣，郭汪辉，顾韧臻。虽然我们每个人都走上了不同的道路，但我们仍时常聚在一起分享各自的生活，讨论人生和理想。

最后我要感谢我的家人一直以来对我的支持，尤其是生活上他们给予了我最大程度的帮助。我希望有一天他们能够真正地理解我的选择。

攻读学位期间发表以及完成的学术论文

- [1] **Yu-Ji Shi** AND WEI WANG. Chiral Dynamics and S-wave contributions in Semileptonic D_s/B_s decays into $\pi^+\pi^-$ [J]. Phys. Rev. D **92**, no. 7, 074038 (2015).
- [2] **Yu-Ji Shi**, WEI WANG AND ZHEN-XING ZHAO. $B_c \rightarrow B_{sJ}$ form factors and B_c decays into B_{sJ} in covariant light-front approach[J]. Eur. Phys. J. C **76**, no. 10, 555 (2016).
- [3] **Yu-Ji Shi**, WEI WANG AND SHUAI ZHAO. Chiral dynamics, S-wave contributions and angular analysis in $D \rightarrow \pi\pi\ell\bar{\nu}$ [J]. Eur. Phys. J. C **77**, no. 7, 452 (2017).
- [4] **Yu-Ji Shi**, WEI WANG, YE XING AND JI XU. Weak Decays of Doubly Heavy Baryons: Multi-body Decay Channels[J]. Eur. Phys. J. C **78**, no. 1, 56 (2018).
- [5] XIAO-GANG HE, **Yu-Ji Shi** AND WEI WANG. Unification of Flavor SU(3) Analyses of Heavy Hadron Weak Decays[J]. arXiv:1811.03480 [hep-ph].
- [6] **Yu-Ji Shi**, WEI WANG AND ZHEN-XING ZHAO. QCD Sum Rules Analysis of Weak Decays of Doubly-Heavy Baryons[J]. arXiv:1902.01092 [hep-ph].
- [7] **Yu-Ji Shi**, YE XING AND ZHEN-XING ZHAO. Light-Cone Sum Rules Analysis of $\Xi_{QQ'q} \rightarrow \Lambda_{Q'}$ Weak Decays[J]. Accepted by Eur. Phys. J. C. arXiv:1903.03921 [hep-ph].
- [8] FENG-KUN GUO, BASTIAN KUBIS, ULF-G. MEISSNER, CHIEN-YEAH SENG, **Yu-Ji Shi**, AND WEI WANG. Meson Form factors in unitarized χ PT. In preparation.